1-1-1975

Síntesis de los fraccionarios a nivel primario

Mauro Humberto Puentes Dederlee
Universidad de La Salle, Bogotá

UNIVERSIDAD SOCIAL CATOLICA DE LA SALLE

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

SINTESIS DE LOS FRACCIONARIOS A NIVEL PRIMARIO

MAURO HUMBERTO FUENTES DEDERLES

Tesis para optar al título
de Licenciado en Matemáticas

Bogotá, Septiembre 1975

D E D I C A T O R I A

Para todo aquel que contribuyó he hizo posible el otorgamiento de grado de Licenciado en Matemática le dedico esta obra.

En especial a la Presidente de Tesis, al Jurado y a la Universidad, y a mis familiares en especial a Gladys.

LAURA DE PEREA
Presidente de Tesis

DAVID MOREL
Jurado

ORLANDO RODRIGUEZ
Jurado

J U S T I F I C A C I O N

Las experiencias en las que intervienen cantidades fraccionarias son extremadamente limitadas para todo niño.

La idea de un medio, un cuarto, un tercio, dos tercios o tres cuartos pueden presentarse con cierta normalidad al niño, pero es evidente que son mayoría las fracciones con escasa o nula posibilidad de presentarseles en su vida cotidiana.

Ello hace que las variaciones matemáticas necesarias para familiarizarse con las propiedades de las fracciones no entre a formar parte de su ambientación inmediata, y por lo tanto corresponde al medio ambiente escolar buscar el sistema concreto de proporcionárselas.

La experiencia que se tiene tratándo de ofrecer los fraccionarios como un todo me han permitido elaborar una síntesis de los fraccionarios en la cual se les dan al alumno ciertas normas e ideas que van a tener sentido cuando el alumno las use en situaciones concretas y a fuerza de usarlas se cimenten en posteriores avances de el estudio de las matemáticas.

Se ha tratado de presentar una colección de métodos y ejercicios que hagan desencadenar la actividad del alumno y encausar cualidades como el espíritu de observación su imaginación y en lo abstracto como las operaciones de ordén práctico para la mejor comprensión de los problemas técnicos y económicos que tendrá que desarrollar en su vida ordinaria de estudiante.

MAURO HUMBERTO FUENTES DEDERLER

formales; cobran naturales y sobretodo creatividad y vida. Para tal efecto, por ejemplo, se ha tratado de presentar las propiedades de los fraccionarios bajo las operaciones de suma, multiplicación, resta y división como consecuencias naturales de su naturaleza y definición, y no como "leyes" impuestas arbitrariamente.

Como se ha dicho, el profesor deberá idearse sus propios ejercicios, aunque aquí hay muchas sugerencias, que servirán para la clase. Las láminas son como unas sugerencias para que el profesor dibuje muchas más para ilustrar los conceptos de las operaciones.

I N D I C E

	Página	Horas
INTRODUCCION		
A. Preliminares: Relaciones	1	
B. Magnitud	3	
C. Unidad y cantidad	4	6
FRACCIONARIOS		
A. Recta, segmentos	6	
B. Fraccionarios por medio de segmentos	7	
C. Amplificación y simplificación	10	
D. Fraccionarios inversos	13	8
SUMA DE FRACCIONARIOS		
A. Suma de fraccionarios	16	
B. Propiedad clausurativa	20	
C. Propiedad asociativa	22	
D. Propiedad idéntica o modulativa	24	
E. Propiedad cancelativa	25	

		Página	Horas
F.	Propiedad conmutativa	26	
G.	Orden aditivo de los fraccionarios.....	27	
H.	Propiedades del orden aditivo..........	30	12

DISMINUCION DE FRACCIONARIOS

A.	Disminución	32	
B.	Condición para efectuar la resta.......	34	
C.	Clausurativa condicionada	35	
D.	Asociativas condicionadas	37	
E.	Modulativa	40	
F.	Cancelativa	41	
G.	Reintegrativa	42	11

MULTIPLICACION DE FRACCIONARIOS

A.	Abstracción del concepto	45	
B.	Propiedad clausurativa	49	
C.	Propiedad asociativa	50	
D.	Propiedad idéntica o modulativa	52	
E.	Propiedad invertiva	53	
F.	Propiedad conmutativa	55	
G.	Propiedad distributiva recolectiva, con respecto a la adición y a la disminución.	56	13

	Página	Horas
DIVISION DE FRACCIONARIOS		
A. División como caso particular de la multiplicación	61	
B. Propiedad clausurativa	63	
C. Propiedad asociativa en sus tres formas.	64	
D. Propiedad idéntica	66	
E. Propiedad cancelativa	67	
F. Propiedad reintegrativa e invariativa.	68	14
POTENCIACION DE FRACCIONARIOS		
Potenciación	71	
Concepto, como caso particular de la multiplicación	72	
Propiedades de la potenciación	73	4
PARALELOS		
Semejanzas y diferencias entre las operaciones.	77	
Aprovechamiento de estas semejanzas y diferencias para la transferencia en el aprendizaje de los fraccionarios	77	
Semejanzas entre las propiedades...........	80	3
Bibliografía	81	71

I N T R O D U C C I O N

A. Preliminares: Relaciones.

B. Magnitud, Longitud

C. Conceptos de Unidad y cantidad, Cantidades Homogeneas y Heterogeneas.

A. Relaciones

Uno de los conceptos que más precisamos para el estudio de los fraccionarios es la noción de Relación y la mejor forma de llegar a ella es por medio de ejemplos. Sean las proposiciones.

Inés es hermana de María.

Juan y Pedro son miembros de una familia.

Ocho es mayor que cinco.

Uno, dos, tres, cuatro y cinco son los números menores que seis.

Cinco es divisor de diez.

Todas estas proposiciones y muchas otras tienen tácitamente o explícitamente la expresión SER ALGO DE, que es el vínculo, lazo o cadena que une dos o más elementos. Ese vínculo es en sí lo, que vamos a llamar relación y escribiremos ser. R de que significará estar relacionado con.

Al decir María es madre de. . . Pedro es hermano de. . . Es lógico suponer y preguntar de quien ? Al contestar lo hacemos con otro individuo, objeto o cosa de tal manera que quedan concatenados, dependiendo uno del otro, dándole significado a la proposición y forma a la relación. De lo anterior se deduce que las relaciones vienen dadas por dos elementos.

En las relaciones hay dos variantes la primera cambiando el orden de los elementos no se altera su significado y otro que al cambiarlos si se altera su significado y puede llegar a ser contrario a la realidad. Ejemplos: es lo mismo decir que Juan es primo de Luis o Luis es primo de Juan, su significado es el mismo. Pero al decir Pedro es el padre de José no es lo mismo que José es el padre de Pedro pues uno de los dos significados se ajusta a la realidad y no ambos.

Para evitar ambiguedades en las relaciones siempre habrá dos elementos que tienen un orden de colocación y estarán de acuerdo a la lógica y a la realidad. Así cuando se diga que A y B están relacionados entre sí es porque A cumple lo referente a B y no B lo referente a A y en caso de que la cumpla entonces diremos esta relación tiene una inversa, que significa lo mismo. Para nuestro caso tendremos la relación directa si no se dice lo contrario y es aquella que une dos elementos teniendo un orden de enumeración y al mismo tiempo estar de acuerdo con la realidad.

B. <u>Magnitud</u>

Hay en la naturaleza de los cuerpos ciertas propiedades, por ejemplo la longitud, el peso, la capacidad de los recipientes. . . etc., que tienen una característica y que se puede hablar de números así: una mesa tiene de ancho 2 metros, de largo 4 metros y de alto 1 metro y además se le puede adicionar a esta mesa con sus medidas las de otra mesa quedando otra mesa de medidas de 4 ancho 8 de largo el mismo alto o el doble sin perder el nombre de mesa. Tambien se tiene por ejemplo en una balanza un queso de ocho libras si le agregamos 4 libras del mismo queso nos queda un queso de 12 libras, el agregarle no implicó que cambiara el nombre de queso pero si sus medidas. Así también se tiene en un recipiente 5 litros de leche y le agregamos otros 10 litros nos dan diferentes números de litros pero no nos cambia el significado de leche. Estas y otras propiedades de los cuerpos nos permiten comentar numéricamente su igualdad y sus modificaciones siempre agregando algo más.

En cambio hay otras propiedades que es casi imposible darles un valor numérico como el olor, el sabor y el color y además agregarle algo más, porque tampoco sabríamos cuanto. De las dos clases de propiedades que hay en los cuerpos tomamos aquellas que se pueden cuantificar y pueden sufrir modificaciones en aumento y las vamos a llamar MAGNITUDES.

C. <u>Unidad y Cantidad</u>.

Después de hablar de magnitudes y de tener su concepto con otros ejemplos se ha tomado una medida convencional para comparar la magnitud de un cuerpo exactamente y ha surgido LA UNIDAD que en las mas comunes es el metro, el litro, el kilo. . . etc. La comparación de la magnitud de un cuerpo con la unidad nos da entonces lo que se llama cantidad.

En las cantidades existen dos formas de concebirlas para su clasificación en Homogeneas y Heterogeneas, cuando se tiene un terreno y decimos que sus medidas son ocho (8) y en otro las medidas son diez (10) hay que designarles su unidad ya sean en fanegadas en metros cuadrados o en hectáreas, en el caso que los dos terrenos estan medidos en fanegadas entonces se dice que las cantidades son homogeneas o si ambos terrenos están medidos en metros cuadrados o ambos están medidos en hectáreas también reciben el nombre de cantidades homogéneas de lo contrario si una esta medida en fanegadas y otro en metros cuadrados por ejemplo tendríamos cantidades heterogeneas. De lo anterior se deduce que las cantidades que están medidas con la misma unidad son las homogeneas y aquellas que están medidas en diferentes unidades son las heterogéneas.

Ejercicios: Clasificar en homogéneas y heterogéneas las siguientes cantidades: a) 20 litros de leche, b) 12 libras de papa, c) 6 litros de aceite, d) 23 kilos de arroz e) 1 arroba de carne, f) 4 litros de vino, g) 34 litros de leche, h) 10 fanegadas, i) 68 metros de piola y 34 metros cuadrados de superficie, j) 55 libras de trigo, k) 32 metros de tela, l) 76 kilos de empermes, ll) 104 fanegadas de pasto sembrado, m) 28 metros cuadrados de arena, n) 90 litros de agua.

F R A C C I O N A R I O S

A. Recta, segmentos.

B. Concepto de fraccionarios por medio de segmentos. Numerador y denominador.

C. Amplificación y simplificación.

D. Fraccionarios inversos.

A. Recta, segmentos.

Sabiéndose ya lo que es una relación, una cantidad y una clase trataremos de llegar a los fraccionarios sin olvidar los conceptos anteriores.

La idea de recta intuitivamente la podemos sacar de la naturaleza al tomar el borde de una mesa, el estirar una piola que quede tensa, o mirar la trayectoria que siguen los alambres sobre los postes de la luz, el borde de una hoja de papel etc. Todos estos ejemplos nos pueden dar una idea de lo que es una recta pero no nos pueden dar la definición exacta y solamente diremos que es una sucesión de puntos que siguen una misma dirección, por consiguiente la podemos imaginar como una linea tal delgada y tenue que se extiende a lado y lado de nuestra vista hasta perderse en los confines de nuestro horizonte.

Después de imaginada y captada la idea de la recta la podemos representar graficamente.

. . . ____ . . .

Y si a esta recta le tomamos un punto cualquiera a, nos la divide en dos partes llamadas semirectas, siendo el punto a el origen de ellas.

a = punto de origen.

. . . . . .

Por último si en lugar de un punto tomamos dos cualesquiera de la recta tenemos entonces un segmento, siendo este el pedazo de recta que queda encerrado dentro de los dos puntos por ejemplo:

A ________________ B y diremos el segmento AB. Como los segmentos tienen longitud, (tomando longitud como idea intuitiva) por consiguiente los podemos comparar con una unidad cualquiera y los podemos convertir en cantidades homogeneas para llegar más facilmente al concepto de fraccionarios por medio de una relación de ubicación.

B. Fraccionarios por medio de segmentos.

Tomemos dos segmentos AB y CD medidos en la misma unidad en otras palabras tomados como homogéneos.

mentos etc. Ahora estamos en capacidad de dar la definición de fraccionario diciendo que es la relación existente entre dos magnitudes medidas con igual unidad y de la forma $\frac{A}{B}$.

Prescindiendo de la unidad y tomando solamente el número entonces su lectura se hace: los fraccionarios que tienen como denominador 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se leen diciendo el número del numerador y por denominador unidades, medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, septimos, octavos y novenos.

Los fraccionarios con denominador diez, cien mil. . . se leen los numeradores como número y como denominador décimos, centésimos, milésimos. . .

Los demás fraccionarios se lee el numerador como número y el denominador tambien el número pero agregandole la terminación avo.

Ejercicios: Decir en fraccionarios numéricos a que son igual las siguientes expresiones:

a) Veinticinco medios R__________

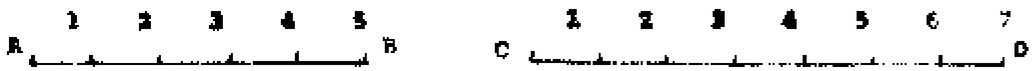
b) Treinta y tres centésimos R__________

c) Doce unidades R__________

d) Ciento cuarenta y ocho dieciochoavos R__________

e) Mil quinientos treceavos R__________

f) Se tienen las siguientes cantidades a = 20, b = 33 c = 12 d = 3 e = 168 y f = 4 g = t h = m i = 44 j = 100 escribir los



se pueden relacionar colocando el primer segmento encima de una raya y por debajo el segundo quedándonos de la forma $\frac{AB}{CD}$, esta relación se puede dar también y ordenadamente diciendo AB esta relacionado con CD y su relación es $\frac{5}{7}$.

Todas las formas que encontramos relacionando cantidades homogéneas que representan magnitudes y de la manera descrita anteriormente son las que vamos a llamar relaciones fraccionales o simplemente fraccionarios, donde el número que esta por encima de la linea se va a llamar NUMERADOR y el que esta por debajo DENOMINADOR.

Como son relaciones que representan lazos entre dos magnitudes entonces los fraccionarios no solamente provienen de longitudes sino tambien de la relación entre las cantidades que representan el valor de las áreas, ya sea en kilómetros, metros, varas cuadradas o relaciones en volúmenes o capacidad, por último en peso y en todo aquello que sea cuantificable. Si Juan pesa 55 kilos y Pedro pesa 72 entonces como estan en las mismas unidades podemos hacer la relación de pesos en la misma forma que en la longitud, el peso de Juan relacionado con el peso de Pedro es $\frac{55}{72}$.

Son muchos los ejemplos que se pueden tomar para dar mayor claridad a el concepto de fraccionario, entre los más comunes están la comparación de las cantidades que se pesan en pesos dos individuos, la edad en años, el kilometraje de dos carreteras, el valor de dos elefraccionarios que representan sus relaciones de tal manera que uno de ellos sirva por lo menos tres veces de denominador.

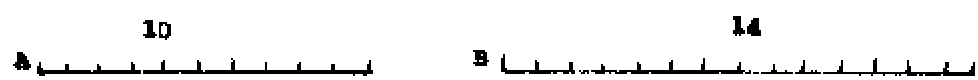
g) Ejercicios prácticos, midiendo, pesando y comparando las magnitudes de objetos en el salón.

C. <u>Amplificación y Simplificación</u>.

Un proceso que es indispensable en toda nuestra matemática y en especial en los fraccionarios es el de simplificación y amplificación.

Si los dos segmentos que dimos anteriormente los tomamos en el cuaderno y los medimos con otras unidades más pequeñas, por ejemplo con medio centímetros en vez de centímetros, vemos que la cantidad de divisiones varia y aumentando, y relacionandolas en forma de fraccionarios tendríamos

$$\frac{A}{B} = \frac{10}{14}$$



pero analizandolo bien nos damos cuenta que son los mismos segmentos divididos con una unidad más pequeña, por tanto podemos afirmar que $\frac{10}{14}$ es otro nombre del fraccionario $\frac{5}{7}$. Por tener los segmentos la misma longitud.

Si a los segmentos A y B los volvemos a dividir con una unidad más pequeña que la anterior un cuarto de centímetro tendríamos

30 28

A  B  y su relación numérica sería $\frac{A}{B} = \frac{30}{28}$. Que serían los mismos segmentos y la misma relación de los segmentos A respecto al segmento B pero con diferentes símbolos o números.

En resumen del ejemplo anterior se puede decir que $\frac{5}{7}$, $\frac{10}{14}$ $\frac{20}{28}$ etc. son nombres diferentes de un mismo fraccionario en su valor.

Tomemos otro ejemplo y después de ir dividiéndolo con unidades cada vez más pequeñas las analizamos para sacar nuestra conclusión.

4 5

M  N 

$\frac{M}{N}$ es igual según la unidad tomada a $\frac{4}{5}$ pero si a estos mismos segmentos M y N se miden con una unidad mitad de la tomada anteriormente nos quedaría.

8 10

M  N 

y cuya relación de $\frac{M}{N}$ se convertiría en $\frac{8}{10}$

Y si a esa última unidad la tomamos por mitad para medir los mismos segmentos entonces tendríamos:

16 20

M  N 

que la relación entre los segmentos se nos convertiría en $\frac{M}{N} = \frac{16}{20}$.

Y si por último tomamos la unidad anterior y la dividimos por mitad para medir los segmentos M y N tendríamos:

Nos quedaría la relación de los segmentos en $\frac{M}{N} = \frac{32}{40}$.

En el primer ejemplo se tenían los segmentos que medían 5 y 7 respectivamente comparados con la unidad a, para pasarlos a 10 y 14 respectivamente empleamos la mitad de la anterior unidad o sea $a/2$ y para pasarlos a 20 y 28 la mitad de esta unidad o sea $a/4$.

Lo mismo se hizo con el siguiente ejemplo; tomamos como punto de partida la unidad b luego la mitad, $b/2$, luego la mitad, $b/4$, y por último la mitad $b/8$.

$\frac{5}{4}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{20}{16}$, y en el segundo $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{16}{20}$ y $\frac{32}{40}$. Son las mismas relaciones de los segmentos A y B, y M y N pero tomando la unidad anterior y dividiéndola por dos dándonos el doble de partes o divisiones.

Fijémonos que para llegar a $\frac{10}{8}$ o $\frac{20}{16}$ que son nombres diferentes de un mismo fraccionario, tanto el numerador, como el denominador de ellos se fue multiplicando por 2 y nuevamente por 2 o sea que se puede descomponer 10 en 5.2 y 8 en 4.2 y 20 se puede descomponer en 5.4 y 16 en 4.4, escribiendo $\frac{10}{8}$ y $\frac{20}{16}$ por sus equivalentes $\frac{5.2}{4.2}$ y $\frac{5.4}{4.4}$ nos damos cuenta que en ambos aparece el fraccionario inicial $\frac{5}{4}$ y que sus dos miembros están multiplicados por un mismo número, en este caso por dos y luego por 4. Para llegar en el segundo ejemplo a $\frac{8}{10}$ la unidad se hizo a la mitad y el número de segmentos unitarios se duplicó, entonces 8 se puede descomponer en 4.2 y 10 en 5.2. Al considerar $\frac{16}{20}$ se dividió la unidad inicial en cuatro partes y se cuadruplicaron los segmentos quedándonos entonces 4.4 para 16 y 4.5 para 20. La misma consideración puede hacerse para $\frac{32}{40}$, se dividió la unidad inicial en 8 partes y quedamos entonces 8.4 y 8.5. Convirtiéndonos entonces $\frac{4}{5}$ en $\frac{4.2}{5.2}$ en $\frac{4.4}{5.4}$ y en $\frac{4.8}{5.8}$ en todos se repite el fraccionario inicial $\frac{4}{5}$ y están multiplicados tanto el numerador como el denominador por un mismo número en este caso por 2 por 4 y por 8.

Este proceso de multiplicar tanto el numerador como el denominador por un mismo número se llama amplificación y su operación inversa que es dividiendo el numerador y el denominador por un mismo número se denomina simplificación.

Aquellos fraccionarios que no son simplificables se llaman fraccionarios irreductibles. Por ejemplo, traten de simplificar $\frac{7}{5}$; se descubre que no hay ningún número que al mismo tiempo divida tanto al numerador como al denominador. Hallar diez ejemplos más de fraccionarios irreductibles.

O. <u>Fraccionarios inversos.</u>

Ya se habló sobre relaciones inversas y se dijo que para nuestro estudio las habían de dos clases unas que al intercambiar los términos de la relación no se alteraba el significado y otras que al variar los términos si cambiaba el significado como en el caso de el inverso de un fraccionario. Así el inverso de $\frac{A}{B}$ es sencillamente $\frac{B}{A}$ significando un valor diferente. Todos los fraccionarios se pueden invertir salvo los que tienen como numerador 0, dandonos un valor diferente a excepción de las expresiones que tienen denominador igual al numerador.

Ejercicios de amplificación y simplificación.

a) Amplifiquemos por 4 a $\frac{2}{7}$ = —— b) Amplifiquemos por 7 a $\frac{2}{3}$ = ——

c) Amplifiquemos por 5 a $\frac{1}{7}$ = —— d) Amplifiquemos por 9 a $\frac{8}{5}$ = ——

e) Simplifiquemos por 7 a $\frac{7}{14}$ = —— f) Simplifiquemos por 3 a $\frac{12}{3}$ = ——

g) Simplifiquemos por 5 a $\frac{20}{35}$ = —— h) Simplifiquemos por 3 a $\frac{27}{15}$ = ——

Completemos los ejercicios por medio de la amplificación y simplificación.

a) $\frac{\ }{9} = \frac{9}{81}$ b) $\frac{15}{9} = \frac{5}{\ }$ c) $\frac{16}{8} = \frac{\ }{1}$

d) $\frac{14}{47} = \frac{2}{\ }$ e) $\frac{9}{7} = \frac{\ }{21}$ f) $\frac{3}{\ } = \frac{15}{35}$

g) $\frac{\ }{1} = \frac{63}{\ }$ h) $\frac{50}{10} = \frac{\ }{1}$ i) $\frac{24}{40} = \frac{\ }{5}$

j) $\frac{\ }{7} = \frac{15}{24}$ k) $\frac{81}{27} = \frac{\ }{3}$ l) $\frac{18}{9} = \frac{5}{\ }$

m) $\frac{7}{\ } = \frac{49}{\ }$ n) $\frac{30}{42} = \frac{15}{\ }$ o) $\frac{2}{3} =$

Las fracciones siguientes convertirlas en fracciones irreductibles.

a) $\frac{14}{21} =$ ____ b) $\frac{30}{42} =$ ____ c) $\frac{105}{66} =$ ____

d) $\frac{56}{68} =$ ____ e) $\frac{64}{20} =$ ____ f) $\frac{102}{108} =$ ____

g) $\frac{125}{25} =$ ____ h) $\frac{624}{44} =$ ____ i) $\frac{183}{54} =$ ____

SUMA DE FRACCIONARIOS

A. Concepto y explicación de la suma de fraccionarios por medio de segmentos.

B. Ley clausurativa.

C. Ley asociativa

D. Ley idéntica o modulativa

E. Ley cancelativa.

F. Ley conmutativa

G. Orden aditivo, concepto

H. Leyes del orden aditivo

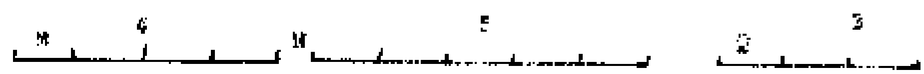
A. <u>Suma de fraccionarios.</u>

En la suma emplearemos segmentos para su concepto. Sean A, B y C los segmentos relacionados de la manera siguiente A con C y B con C donde el segundo o sea el denominador es el mismo.

Entonces $\frac{A}{C} = \frac{4}{3}$ y $\frac{B}{C} = \frac{5}{3}$, pero como los segmentos son longitudes podemos tomar los segmentos A y B y los adicionamos dándonos el segmento A + B

que relacionado con C nos da el fraccionario $\frac{A + B}{C}$. Tomando los números que nos dan al medir los segmentos y reemplazándolos por su letra respectiva nos da que A + B es igual a 4 + 5 y que relacionado con el número de C sería igual a $\frac{4 + 5}{3}$. Este resultado tambien se obtiene sumando los numeradores entre si y colocandoles como único el denominador que es común para ambos así: $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{4 + 5}{3} = \frac{9}{3}$

Este proceso se verifica para todos los segmentos que tienen la misma relación fraccional, llámense M, N y Q o cualquier otra letra. Así



entonces $\frac{M}{Q}$ y $\frac{N}{Q}$ son iguales a $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$ respectivamente, y si tomamos los segmentos M y N y los adicionamos nos dará M + N = 5 + 4 que relacionando el resultado con Q sería igual $\frac{M + N}{Q} = \frac{5 + 4}{3} = \frac{9}{3}$.

Este mismo resultado se obtiene tomando los fraccionarios, sumando los numeradores y como denominador colocandoles el denominador común, así $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{4 + 5}{3} = \frac{9}{3}$.

Los mismos pasos se deben de seguir para todos los tríos de segmentos que tengan una relación fraccional con el mismo segmento de denominador.

Ya sabiendo que los fraccionarios y su adición provienen de las relaciones de segmentos, prescindamos de ellos y trabajemos solamente con sus relaciones numerales, diciendo como regla general que para sumar fraccionarios que tengan igual denominador solo basta sumar sus numeradores y al resultado se le coloca el denominador común.

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A + B}{C}$$

La pregunta sería: ¿ Se puede sumar fraccionarios con diferente denominador ? Sí, pues dos fraccionarios con diferente denominador se pueden amplificar hasta que tengan igual denominador para después efectuar la suma de la manera ya descrita.

Qué sucede entonces con $\frac{2}{7} + \frac{1}{21}$ Sencillísimo ¡ se recuerda nuestra amplificación de manera que en lugar de decir $\frac{2}{7}$ diríamos $\frac{2.3}{7.3}$ que es igual a $\frac{6}{21}$ que serían los mismos dos séptimos, pero dicho con otros números y las suma nos quedaría $\frac{2}{7} + \frac{1}{21} = \frac{6}{21} + \frac{1}{21} = \frac{6 + 1}{21} = \frac{7}{21}$.

Por consiguiente es posible sumar $\frac{12}{9}$ con $\frac{5}{7}$? Lo mismo que en el caso anterior en lugar de recurrir a la amplificación recurrimos a la operación inversa que es la simplificación y tendríamos otro nombre de $\frac{12}{9}$ con diferentes números al dividir tanto el numerador como el denominador por tres dándonos como resultado $\frac{4}{3}$ entonces efectuando la suma $\frac{12}{9} + \frac{5}{3}$ convertida en $\frac{4}{3} + \frac{5}{3}$ nos quedaría como resultado $\frac{4 + 5}{3} = \frac{9}{3}$.

Un poco mas complicado sería la suma de $\frac{5}{4} + \frac{3}{7}$, pero sin olvidar nuestra amplificación y simplificación podemos efectuarla: el primer sumando se puede amplificar por 7 y el segundo por 4 entonces tendríamos $\frac{5.7}{4.7} + \frac{3.4}{7.4}$ lo que daría en ambos sumandos como denominador ventiochoavos $\frac{35}{28} + \frac{12}{28} = \frac{35 + 12}{28} = \frac{47}{28}$ como respuesta.

Teniendo en cuenta los ejemplos de suma que presentamos, en el primero y segundo solamente hubo necesidad de amplificar o simplificar en uno de los dos sumandos, con el tercer caso hubo la necesidad de amplificar los dos sumandos, y fijandonos un poco más, vemos que el primero se amplificó por el denominador del segundo y el segundo se amplificó por el denominador del primero. Este último caso de suma entre fraccionarios es el más complicado, pero dominando la amplificación y simplificación se puede llevar facilmente a un común denominador y efectuar la operación.

Estamos en capacidad de dar una regla general de la adición entre fraccionarios enunciandola así: para sumar dos fraccionarios se reducen a un común denominador, se suman los numeradores y como único denominador el producto de los denominadores de los fraccionarios.

Ejemplos de suma:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3.7}{5.7} + \frac{5.2}{5.7} = \frac{21}{35} + \frac{10}{35} = \frac{21 + 10}{35} = \frac{31}{35}$$

$$\frac{6}{12} + \frac{3}{8} = \frac{6.8}{12.8} + \frac{3.12}{12.8} = \frac{48}{96} + \frac{36}{96} = \frac{84}{96} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{6}{5} + \frac{13}{4} = \frac{8.4}{5.4} + \frac{13.5}{4.5} = \frac{32}{20} + \frac{65}{20} = \frac{97}{20}$$

$$\frac{4}{1} + \frac{1}{10} = \frac{4.10}{1.10} + \frac{1.1}{1.10} = \frac{40}{10} + \frac{1}{10} = \frac{41}{10}$$

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m.q}{nq} + \frac{p.n}{n.q} = \frac{m.q + p.n}{n.q}$$

PROPIEDADES DE LA ADICION

B. <u>Ley clausurativa.</u>

Las propiedades de la adición se estudiarán con el orden siguiente:

1. El profesor efectuará dos ejemplos
2. El alumno desarrollará los ejercicios propuestos, hasta que se dé cuenta, con la ayuda del profesor, de la propiedad en cuestión.
3. Se enunciará la propiedad formal y teóricamente.

1) a) Sumamos $\frac{3}{5} + \frac{1}{9} = \frac{3.9}{5.9} + \frac{5.1}{9.5} = \frac{27 + 10}{45} = \frac{37}{45}$

b) Sumamos $\frac{6}{7} + \frac{7}{3} = \frac{6.3}{7.3} + \frac{7.1}{3.7} = \frac{18 + 7}{21} = \frac{25}{21}$

2) Ejercicios:

Efectuar

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \_\_\_ + \_\_\_ = \frac{\_\_\_ + \_\_\_}{\_\_\_} = \_\_\_ = R\ \_\_\_$

b) $\frac{5}{4} + \frac{8}{9} = \_\_\_ + \_\_\_ = \frac{\_\_\_ + \_\_\_}{\_\_\_} = \_\_\_ = R\ \_\_\_$

c) $\frac{9}{4} + \frac{7}{6} = \_\_\_ + \_\_\_ = \frac{\_\_\_ + \_\_\_}{\_\_\_} = \_\_\_ = R\ \_\_\_$

d) $\frac{6}{3} + \frac{6}{8} = \_\_\_ + \_\_\_ = \frac{\_\_\_ + \_\_\_}{\_\_\_} = \_\_\_ = R\ \_\_\_$

e) [illegible] + [illegible] $= \_\_\_ + \_\_\_ = \frac{\_\_\_ + \_\_\_}{\_\_\_} = \_\_\_ = R\ \_\_\_$

f) [illegible] + [illegible] $= \_\_\_ + \_\_\_ = \frac{\_\_\_ + \_\_\_}{\_\_\_} = \_\_\_ = R\ \_\_\_$

3) En los ejemplos y ejercicios nos damos cuenta que al sumar dos fraccionarios el resultado es otro fraccionario, que al simplificarse puede dar un entero.

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{D} = \frac{AC + BD}{CD}$$

y es la propiedad clausurativa.

Comprobamos la clausurativa por medio de la tabla siguiente colocando los resultados donde corresponda después de efectuada la operación.

	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\frac{41}{4}$	$\frac{40}{53}$	$\frac{13}{11}$	[illegible]
$\frac{5}{9}$												
$\frac{11}{14}$												

C. Ley asociativa

1) a) Sumar y comprobar que $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)$

Efectuamos la primera parte resolviendo primero el paréntesis.

Se tiene: $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}=\left(\frac{2.5}{3.5}+\frac{4.3}{3.5}\right)+\frac{1}{2}=\left(\frac{10+12}{15}\right)$

$+\frac{1}{2}=\left(\frac{22}{15}\right)+\frac{1}{2}=\frac{22.2}{15.2}+\frac{15.1}{15.2}=\frac{44+15}{30}=\frac{59}{30}$

como respuesta.

Lo mismo acontece con el paréntesis en la segunda parte.

$\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}+\left(\frac{4.2}{5.2}+\frac{1.5}{5.2}\right)=\frac{2}{3}+\left(\frac{8+5}{10}\right)=$

$\frac{2}{3}+\left(\frac{13}{10}\right)=\frac{2.10}{3.10}+\frac{3.13}{3.10}=\frac{20+39}{30}=\frac{59}{30}$ como respuesta.

b) Sumar y comprobar que $\left(\frac{2}{3}+\frac{6}{7}\right)+\frac{5}{4}=\frac{2}{3}+\left(\frac{6}{7}+\frac{5}{4}\right)$

Efectuamos la primera parte resolviendo el paréntesis.

Se tiene: $\left(\frac{2}{3}+\frac{6}{7}\right)+\frac{5}{4}=\left(\frac{2.7}{3.7}+\frac{3.6}{7.3}\right)+\frac{5}{4}=$

$\left(\frac{14+18}{21}\right)+\frac{5}{4}=\left(\frac{32}{21}\right)+\frac{5}{4}=\frac{32.4}{21.4}+\frac{21.5}{21.4}=\frac{128+105}{84}$

$=\frac{233}{84}$ como respuesta.

La segunda parte efectuando primero el paréntesis sería :

$\frac{2}{3}+\left(\frac{6}{7}+\frac{5}{4}\right)=\frac{2}{3}+\left(\frac{6.4}{7.4}+\frac{5.7}{4.7}\right)=\frac{2}{3}+\left(\frac{24+35}{28}\right)=$

$\frac{2}{3} + \left(\frac{59}{28}\right) = \frac{2.28}{3.28} + \frac{59.3}{3.28} = \frac{56 + 177}{84} = \frac{233}{84}$ como respuesta.

2) Ejercicios: Efectuar

	Respuesta	Respuesta	
a) $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{7} =$			$\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{7}\right)$
b) $\frac{3}{8} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) =$			$\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}$
c) $\frac{7}{5} + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{3}\right) =$			$\left(\frac{7}{5} + \frac{3}{4}\right) + \frac{5}{3}$
d) $\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{11}\right) =$			$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5}\right) + \frac{2}{11}$
e) $\frac{9}{7} + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{9}\right) =$			$\left(\frac{9}{7} + \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{9}$

3) En los dos ejemplos efectuando la primera parte y la segunda y resolviendo primero el paréntesis nos daba la misma respuesta por tanto podemos afirmar para tres fraccionarios que se quieran sumar se adicionan los dos primeros y al resultado le agregamos el tercero o también se puede efectuar la suma entre los dos últimos y este resultado agregarselo al primero, es la llamada propiedad asociativa.

$$\left(\frac{A}{D} + \frac{B}{E}\right) + \frac{C}{F} = \frac{A}{D} + \left(\frac{B}{E} + \frac{C}{F}\right)$$

D. <u>Ley idéntica o modulativa</u>

1) a) Sumar $\frac{3}{5} + \frac{0}{4} = \frac{3.4}{5.4} + \frac{5.0}{4.5} = \frac{12 + 0}{20} = \frac{12}{20}$ que simplificando por 4 se obtienen los mismos $\frac{3}{5}$.

b) Sumar $\frac{0}{7} + \frac{4}{3} = \frac{0.3}{7.3} + \frac{4.7}{3.7} = \frac{0 + 28}{21} = \frac{28}{21}$ que simplificando por 7 se obtienen los mismos $\frac{4}{3}$.

2) Ejercicios: Efectuar

a) $\frac{7}{4} + \frac{0}{20} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ = R\ \_\_\_\_\_\_$

b) $\frac{0}{9} + \frac{3}{10} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ = R\ \_\_\_\_\_\_$

c) $\frac{0}{15} + \frac{3}{15} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ = R\ \_\_\_\_\_\_$

d) $\frac{5}{25} + \frac{0}{3} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ = R\ \_\_\_\_\_\_$

e) $\frac{m}{n} + \frac{0}{p} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ = R\ \_\_\_\_\_\_$

3) De los ejercicios anteriores se deduce que si un fraccionario cualquiera se suma con uno de la forma $\frac{c}{d}$ en donde c es igual a cero, el resultado siempre será el mismo fraccionario; denominaremos esta propiedad como la <u>Idéntica o modulativa</u>.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \Longleftrightarrow C = 0$$

B. Ley cancelativa.

1) Sumar $\frac{3}{4} + \frac{m}{n} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ es muy fácil comprender esta por medio del ejemplo de la balanza. Se tiene en un platillo los tres cuartos de libra de una pesa y se tienen el objeto X para pesar, en el otro se iguala la balanza con los mismos tres cuartos y otra pesa de dos quintos de libra si quitamos los tres cuartos de ambos platillos, la pesa o balanza queda en equilibrio se puede afirmar que el cuerpo X pesa exactamente los quintos entonces se puede decir que $X = \frac{2}{5}$ que sería la respuesta.

Sumar $\frac{7}{3} + X = \frac{7}{3} + \frac{4}{9}$ la forma es la misma que en el anterior colocando el objeto con una pesa de $\frac{7}{3}$ de libra y en el otro platillo dos pesas que tenga una los $\frac{7}{3}$ y la otra con los $\frac{4}{9}$ y al retirar los $\frac{7}{3}$ de juntos platillos la balanza sigue en equilibrio nos significará que $X = \frac{4}{9}$ que sería la respuesta.

2) Ejercicios:

a) Si $\frac{5}{3} + \frac{3}{4} = \frac{5}{3} + \frac{m}{n} \longrightarrow \frac{m}{n} =$ R __________

b) Si $\frac{3}{5} + x = \frac{3}{5} + \frac{8}{9} \longrightarrow x =$ R __________

c) Si $\frac{m}{n} + \frac{3}{4} = \frac{5}{7} + \frac{3}{4} \longrightarrow \frac{m}{n} =$ R __________

d) Si $\frac{12}{17} \cdot \frac{x}{y} = \frac{12}{17} \cdot \frac{5}{1}$ $\longrightarrow$ $\frac{x}{y}$ = R ________

e) Si $\frac{6}{9} + \frac{p}{q} = \frac{6}{9} + \frac{3}{7}$ $\longrightarrow$ $\frac{p}{q}$ = R ________

3) Podríamos afirmar que si a un fraccionario conocido se le agrega uno desconocido y al mismo tiempo se conoce el resultado se puede hallar el valor del desconocido y esta manera de hallar el valor de un fraccionario es la propiedad cancelativa.

$$\frac{A}{C} + X = \frac{A}{C} + \frac{B}{D} \longrightarrow X = \frac{B}{D}$$

F. Ley conmutativa

1) a) Sumar $\frac{3}{2} + \frac{4}{7} = \frac{3.7}{2.7} + \frac{4.2}{2.7} = \frac{21 + 8}{14} = \frac{29}{14}$ como resultado.

Ahora $\frac{4}{7} + \frac{3}{2} = \frac{4.2}{7.2} + \frac{3.7}{7.2} = \frac{8 + 21}{14} = \frac{29}{14}$ que es el mismo resultado.

b) Sumar $\frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{2.3}{5.3} + \frac{4.5}{5.3} = \frac{6 + 20}{15} = \frac{26}{15}$ como respuesta.

Ahora con el orden contrario sumar $\frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{4.5}{3.5} + \frac{2.3}{3.5} = \frac{20 + 6}{15} = \frac{26}{15}$ como respuesta.

2) Ejercicio:

	Respuesta	Respuesta	
$\frac{2}{4} + \frac{3}{7}$			$\frac{3}{7} + \frac{2}{4}$
$\frac{1}{5} + \frac{2}{9}$	________	________	$\frac{2}{9} + \frac{1}{5}$
$\frac{7}{9} + \frac{6}{11}$	________	________	$\frac{6}{11} + \frac{7}{9}$
$\longrightarrow$			$\longleftarrow$

3) Entonces podemos afirmar que, cuando se suman dos fraccionarios el orden de los sumandos no altera el resultado y es la propiedad denominada <u>Conmutativa</u>.

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{D} = \frac{B}{D} + \frac{A}{C}$$

Ejercicios: De qué otra manera se pueden colocar los fraccionarios siguientes sin que el resultado varíe.

a) $\frac{5}{3} + \frac{4}{9} = \_ + \_$ b) $\frac{7}{5} + \frac{1}{9} = \_ + \_$

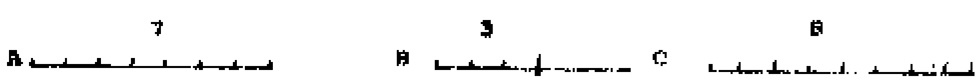
c) $\frac{8}{\ } + \frac{6}{\ } = \_ + \_$ d) $\frac{9}{\ } + \frac{5}{\ } = \_ + \_$

e) $\frac{3}{7} + \frac{15}{17} = \_ + \_$ f) $\frac{17}{4} + \frac{7}{11} = \_ + \_$

G. <u>Orden aditivo de los Fraccionarios.</u>

Recordando nuestro estudio de los números naturales encontramos que el orden aditivo se caracterizaba por el mayor y el menor ( ), ( ) En los fraccionarios se trabaja con el mismo criterio, pero teniendo en cuenta que estos son relaciones entre segmentos cuantificables.

Sean los segmentos A, B y C relacionados como fraccionarios de la siguiente manera:



$\frac{A}{C} = \frac{7}{8}$ y $\frac{B}{C} = \frac{3}{8}$ como sabemos son longitudes entonces entre las dos primeras averiguamos comparandolas cual es la mayor y es lógico suponer que si están medidas con la misma unidad es mayor la primera con 7 unidades que la segunda con tres unidades y si estan relacionados con la tercera que tiene ocho unidades entonces es de suponer que el fraccionario $\frac{7}{8}$ es mayor que $\frac{3}{8}$.

Sean los segmentos: 

si el primero lo comparamos con el tercero siendo medidos en las mismas unidades tenemos que 5 es mayor que 2 y por consiguiente nos quedaría que $\frac{5}{4}$ es mayor que $\frac{2}{4}$.

Tomando los mismos ejemplos podemos hacer la comparación del menor: en el primer ejemplo cual de los dos segmentos es menor y es lógico pensar que 3 comparado con 7 y si están relacionados con 8 entonces se puede afirmar que $\frac{3}{8}$ es menor que $\frac{7}{8}$. Y en el segundo ejemplo se puede decir sin temor a equivocarnos que 2 es menor que 5 y por consiguiente $\frac{2}{4}$ es menor que $\frac{5}{4}$.

De todo lo anterior podemos afirmar que de dos fraccionarios que tienen igual denominador es mayor el que tenga mayor numerador y de dos fraccionarios que tengan igual denominador es menor el que tenga menor numerador.

$$\frac{P}{Q} > \frac{R}{Q} \Longleftrightarrow P > R$$

$$\frac{A}{C} < \frac{B}{C} \Longleftrightarrow A < B$$

Las relaciones de menor y mayor entonces sólo son aplicables a fraccionarios que tengan igual denominador ? La pregunta se puede responder con el ejemplo siguiente: cuál de los dos fraccionarios $\frac{1}{4}$ y $\frac{7}{16}$ es mayor: basta recordar que $\frac{1}{4}$ por medio de la multiplicación de su numerador y denominador por un mismo número o sea amplificándolo encontramos que es igual a $\frac{4}{16}$ y como 7 es mayor que cuatro entonces tenemos que $\frac{7}{16}$ es mayor que $\frac{1}{4}$.

En el caso de que sean los fraccionarios $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{9}$ se convierte $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{9}$ a un común denominador amplificando el primero por el denominador del segundo y el segundo por el denominador del primero y se aplica el criterio de los casos anteriores, siendo $\frac{3.9}{5.9}$ y $\frac{4.5}{5.9}$ = 27 y 20 los numeradores entonces 27 es mayor que 20 y por consiguiente $\frac{3}{5}$ es mayor que $\frac{4}{9}$.

En este último ejemplo se llega a una manera general de tratar y averiguar que de dos fraccionarios que tengan diferentes denominadores sea cual fuere se puede averiguar cual es el mayor o cual es el menor. Y el criterio a aplicar es el último caso, que el primer fraccionario se amplifique por el denominador del segundo y el segundo se amplifique por el denominador del primero.

$$\frac{A}{C} < \frac{B}{D} \longrightarrow A.D < B.C \quad y \quad \frac{A}{C} > \frac{B}{D} \longrightarrow A.D > B.C$$

K. <u>Leyes del orden aditivo.</u>

Teniendo este concepto sobre lo que es el mayor y el menor podemos afirmar que tienen la misma propiedad de transitividad que en los naturales, o sea $\frac{A}{D} < \frac{B}{E}$ y $\frac{B}{E} < \frac{C}{F} \Longrightarrow \frac{A}{D} < \frac{C}{F}$

Sea $\frac{3}{5} < \frac{7}{4}$ y si agregamos cualquier otro fraccionario por ejemplo $\frac{1}{2}$ a ambos miembros de la desigualdad nos quedaría:

$\frac{3}{5} + \frac{1}{2} < \frac{7}{4} + \frac{1}{2}$ que efectuando operaciones tendríamos:

$\frac{6 + 5}{10} < \frac{14 + 4}{8} = \frac{11}{10} < \frac{18}{8}$ que enunciado en palabras tendríamos dos fraccionarios que tienen la relación de mayor o menor entre si al agregarles un fraccionario cualquiera a ambos miembros de la desigualdad tendríamos que la relación de mayor o menor no sufriría ninguna alteración y es la propiedad que denominamos <u>Ley monotónica con respecto a la adición.</u>

$$\frac{A}{C} < \frac{B}{D} \Longrightarrow \frac{A}{C} + \frac{E}{F} < \frac{B}{D} \quad \frac{E}{F}$$

Ejercicios: Decir en los ejercicios siguientes cual es el mayor.

a) $\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{4}$ R ________ b) $\frac{17}{4}$ y $\frac{7}{4}$ R ________

c) $\frac{7}{2}$ y $\frac{9}{2}$ R ________ d) $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{7}$ R ________

e) $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{5}$ R ________ f) $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{9}$ R ________

g) $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{3}$ R ________ h) $\frac{35}{5}$ y $\frac{3}{1}$ R ________

Ejercicios:

i) Ordenar de mayor a menor $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{4}$ R ________

j) Ordenar de menor a mayor $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{9}$ R ________

k) Ordenar de menor a mayor $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{7}{4}$ R ________

l) Ordenar $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{7}{8}$ R ________

m) a) De $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{4}$ cual es el mayor ? R ________

b) Entonces, de $\frac{3}{4} + \frac{11}{7}$ y $\frac{2}{4} + \frac{11}{7}$, cual es el mayor? R ________

n) a) De $\frac{38}{45}$ y $\frac{41}{45}$ cual es el mayor ? R ________

b) Entonces de $\frac{38}{45} + \frac{29}{41}$ y $\frac{41}{45} + \frac{29}{41}$ cual es el mayor? R ________

o) a) De $\frac{16}{24}$ y $\frac{15}{24}$ cual es el mayor ? R ________

b) Entonces de $\frac{9}{32} + \frac{15}{24}$ y $\frac{9}{32} + \frac{16}{24}$ cual es el mayor R ________

DISMINUCION DE FRACCIONARIOS

A. Concepto por medio de relaciones de segmentos.

B. Condición indispensable para efectuar la resta.

C. Clausurativa condicionada.

D. Asociativas condicionadas.

E. Modulativa.

F. Cancelativa.

G. Reintegrativa.

A. Disminución

Vista la adición entre fraccionarios y su orden aditivo entraremos a ver la disminución, siguiendo el mismo procedimiento que en la suma de fraccionarios. Al emplear los segmentos lo hacemos por estar familiarizados con ellos y facilitar la abstracción del concepto.

Sean los segmentos A, B y C medidos en la misma unidad U y relacionados A con B y C con B   A (7)   B (5)

C (3)   A−C (4)

A relacionado con B es igual a $\frac{A}{B} = \frac{7}{5}$ y C relacionado con B es igual a $\frac{C}{B} = \frac{3}{5}$ y la diferencia $A - C = 7 - 3 = 4$ y relacionada con B sería $\frac{A - C}{B} = \frac{7 - 3}{5} = \frac{4}{5}$.

Hemos hecho una diferencia de segmentos y la hemos relacionado con otro, pero si tomamos las relaciones numerales de los dos segmentos y efectuamos la resta entre los dos numeradores nos da el mismo resultado, colocándole como denominador el que tienen, o sea que para efectuar la disminución entre dos fraccionarios es indispensable que tengan el mismo denominador y se restan los numeradores fácilmente.

Ejemplos: $\frac{7}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7 - 3}{5} = \frac{4}{5}$.

Al tomar otros segmentos más grandes o más pequeños pero medidos con una unidad que nos de la misma cantidad y relacionándolos de la misma forma que en el caso anterior y tomando la diferencia vemos que nos da el mismo resultado.

M (7)   N (5)   Q (3)   M−Q

$\frac{M}{N} = \frac{7}{5}$ y $\frac{Q}{N} = \frac{3}{5}$ y la diferencia $M - Q = 7 - 3 = 4$ que relacionada con N sería: $\frac{M - Q}{N} = \frac{7 - 3}{5} = \frac{4}{5}$. Al tomar los fraccionarios $\frac{7}{5} - \frac{3}{5}$ y restar los numeradores nos da el resultado anterior igual a $\frac{4}{5}$.

Se ha cumplido para los segmentos A, B y C y también para el trio M, N y Q entonces se cumple para todos los segmentos en número de tres que sean sus longitudes iguales a los anteriores y relacionados de la misma manera. También podemos tomar otros segmentos cualesquiera y proceder en la misma manera para abstraer el concepto de sustracción relacionando dos de ellos con el tercero.

Ya prescindiendo de los segmentos podemos decir que para la disminución de fraccionarios lo mismo que en la suma se necesita que tengan el mismo denominador, para poder restar los numeradores.

B. <u>Condición para efectuar la resta.</u>

En los ejemplos de deducción del concepto hemos tenido ciertas precauciones para no encontrarnos con el problema que vamos a plantear: si en lugar de tomar el segmento mayor y restarle el segmento menor, hiciéramos lo contrario, que sucedería? Es lógico suponer que no tendríamos como respuesta un segmento y entonces nos veríamos imposibilitados para dar una respuesta acertada, o sea lo mismo que nos sucedió en los números naturales y tendríamos que emplear los conceptos de el orden aditivo e imponer la condición que se puede restar siempre y cuando el fraccionario minuendo sea mayor que el fraccionario sustraendo. Que en otras palabras diríamos: para restar fraccionarios de igual denominador se restan los numeradores y al resultado se le coloca el denominador común, siempre y cuando cumpla con la condición de ser menor o igual el sustraendo del minuendo.

$\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$ Se puede efectuar si y solo si $A > B$ o $A = B$

Las preguntas serían las mismas de la adición y la respuesta también, siempre recomendando la amplificación y la simplificación y además la condición de que el minuendo sea mayor que el sustraendo. Para mayor claridad efectuamos un ejemplo: de $\frac{7}{4}$ restar $\frac{3}{13}$; entonces $\frac{7}{4} - \frac{3}{13}$ al amplificar el primero por el denominador del segundo nos da $\frac{7.13}{4.13} = \frac{91}{52}$ y al amplificar el segundo por el denominador del primero nos da $\frac{3.4}{13.4} = \frac{12}{52}$ entonces de 91 y 12 es mayor 91 por consiguiente se puede efectuar la resta quedándonos $\frac{91-12}{52} = \frac{79}{52}$.

De lo anterior se deduce que para restar dos fraccionarios se reducen a un común denominador y se efectua la resta entre numeradores, colocándole como denominador el producto de denominadores, siempre y cuando el minuendo sea mayor que el sustraendo o igual.

$\frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{A.D - B.C}{C.D}$ siempre y cuando $A.D > B.C$ o $A.D = B.C$

PROPIEDADES DE LA DISMINUCION

1) a) Sea $\frac{5}{3} - \frac{2}{7} = \frac{5.7}{3.7} - \frac{3.2}{7.3} = \frac{35}{21} - \frac{6}{21}$ Como $35 > 6 \longrightarrow$

Se puede hacer $\frac{35 - 6}{21} = \frac{29}{21}$

b) Sea $\frac{9}{5} - \frac{7}{6} = \frac{9.6}{5.6} = \frac{5.7}{6.5} = \frac{54}{30} - \frac{35}{30}$ como $54 > 35 \Longrightarrow$

se puede hacer $\frac{54 - 35}{30} = \frac{19}{30}$.

2) Ejercicios: Efectuar las siguientes restas:

a) $\frac{7}{4} - \frac{2}{4} \Longrightarrow \quad > \quad \Longrightarrow$ ____ - ____ R ____

b) $\frac{8}{3} - \frac{5}{9} \Longrightarrow \quad > \quad \Longrightarrow$ ____ - ____ R ____

c) $\frac{5}{4} - \frac{1}{8} \Longrightarrow \quad > \quad \Longrightarrow$ ____ - ____ R ____

d) $\frac{9}{4} - \frac{7}{8} \Longrightarrow \quad > \quad \Longrightarrow$ ____ - ____ R ____

e) $\frac{5}{2} - \frac{3}{5} \Longrightarrow \quad > \quad \Longrightarrow$ ____ - ____ R ____

f) Efectuar las restas que se encuentran en la tabla y colocar su resultado.

3) La disminución entre fraccionarios nos da otro fraccionario siempre y cuando el minuendo sea mayor que el sustraendo. Es la llamada propiedad <u>Clausurativa condicionada</u>.

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{A.D - B.C}{C.D} \quad \text{siempre y cuando} \quad A.D > B.C$$

Ejercicio:

	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{100}{13}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{35}{1000}$
$\frac{3}{4}$									
$\frac{7}{5}$									
$\frac{9}{2}$									

D. <u>Asociativas condicionadas.</u>

En este caso la propiedad que vamos a estudiar tiene tres variantes nosotros las indicaremos y ejecutamos una para comprobarla y mostrar el procedimiento a seguir para que las otras dos queden como ejercicios de comprobación.

a) Son tres fraccionarios que pueden agruparse de las dos maneras siguientes:

$\frac{1}{2} + \left(\frac{7}{3} - \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{3}\right) - \frac{5}{3}$ efectuamos la primera parte y comprobamos con la segunda, siempre resolviendo el paréntesis primero.

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{7}{3} - \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{7.4 - 3.5}{3.4}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{28 - 15}{12}\right)$$ y como

$28 > 15 \longrightarrow \frac{1}{2} + \left(\frac{13}{12}\right) = \frac{1.12 + 2.13}{2.12} = \frac{12 + 26}{24} =$

$\frac{38}{24}$ simplificando nos daría como respuesta $\frac{19}{12}$.

La segunda resolviéndola sería: $\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{3}\right) - \frac{5}{4} = \left(\frac{1.3 + 2.7}{2.3}\right) - \frac{5}{4} = \left(\frac{3 + 14}{6}\right) - \frac{5}{4} = \left(\frac{17}{6}\right) - \frac{5}{4} = \frac{17.4 - 6.5}{6.4} = \frac{68 - 30}{24}$ y

como $68 > 30 \longrightarrow$

Se puede efectuar la resta que da como respuesta $\frac{38}{24}$ que simplificando nos da exactamente $\frac{19}{12}$.

Este segundo resultado comprueba la primera parte y entonces podemos afirmar que un fraccionario sumado con una diferencia de fraccionarios se puede efectuar también sin que se altere el resultado como la suma del fraccionario y el minuendo y despues restarle el sustraendo, teniendo en cuenta que la diferencia se puede efectuar porque cumple la condición de la disminución.

Es una propiedad <u>Asociativa condicionada.</u>

$$\frac{A}{B} + \left(\frac{C}{D} - \frac{E}{F}\right) = \left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) - \frac{E}{F} \text{ siempre y cuando}$$

$$C.F > D.E$$

b) Segunda Asociativa condicionada cuyo enunciado es: que la diferencia de un fraccionario con una suma de fraccionarios se puede efectuar como diferencias continuadas siempre y cuando cumpla las condiciones de la disminución y nos da origen a la ley <u>segunda asociativa condicionada.</u>

$$\frac{A}{B} - \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F}\right) = \left(\frac{A}{B} - \frac{C}{D}\right) - \frac{E}{F} \text{ siempre y cuando } A.D.F \quad B.C.F$$

c) La tercera forma afirma que: la diferencia entre un fraccionario y una diferencia de fraccionarios se puede efectuar también como la diferencia del fraccionario y el minuendo más el sustraendo, siempre y cuando cumpla con las condiciones de la disminución, dando origen a la propiedad tercera asociativa condicionada.

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} - \frac{E}{F} = \frac{A}{B} - \frac{C}{D} + \frac{E}{F} \longrightarrow A.D > C.B \text{ y } C.F > E.D$$

<u>Nota al Profesor:</u> Estas dos últimas, por el cambio de signo que ocasiona el paréntesis, deben comprobarse y explicarse varias veces.

Ejercicios: De qué otra forma se pueden colocar los fraccionarios para efectuar las operaciones siguientes ?

Compruebe si se cumple las condiciones.

a) $\left(\frac{5}{7} + \frac{4}{3}\right) - \frac{2}{5} = \frac{5}{3} + \left(\qquad \right) = R$ ______

b) $\frac{4}{6} + \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{1}\right) = \left(\qquad \right) = R$ ______

c) $\left(\frac{4}{1} + \frac{1}{5}\right) - \frac{2}{3} = \frac{4}{1} - \left(\qquad \right) = R$ ______

d) $\left(\frac{4}{1} - \frac{1}{5}\right) - \frac{2}{3} = \frac{4}{1} - \left(\qquad \right) = R$ ______

e) $\left(\frac{7}{1} - \frac{6}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{7}{1} + \left(\qquad \right) = R$ ______

E. Modulativa.

1) Sean los fraccionarios para efectuar la resta de $\frac{5}{3} - \frac{0}{4}$ al efectuarla se tiene $\frac{5.4}{3.4} - \frac{3.0}{3.4} = \frac{20 - 0}{12} = \frac{20}{12}$ que simplificando nos da $\frac{5}{3}$.

Sea $\frac{7}{5} - \frac{0}{8} = \frac{7.8}{5.8} - \frac{5.0}{5.8} = \frac{56 - 0}{40} = \frac{56}{40} = \frac{7}{5}$

2) Ejercicios: Efectuar

a) $\frac{3}{5} - \frac{0}{3}$ = ______ - ______ = ______ = ______ = R ______

b) $\frac{5}{4} - \frac{0}{4}$ = ______ - ______ = ______ = ______ = R ______

c) $\frac{3}{7} - \frac{0}{3}$ = ______ - ______ = ______ = ______ = R ______

d) $\frac{6}{7} - \frac{0}{5}$ = ______ - ______ = ______ = ______ = R ______

e) $\frac{3}{8} - \frac{0}{P}$ = ______ - ______ = ______ = ______ = R ______

3) De estos ejemplos y otros más se puede llegar a la conclusión de que si a un fraccionario cualquiera se le resta un fraccionario con numerador cero sea el denominador cualquier número se obtiene como respuesta el mismo fraccionario. Propiedad modulativa.

$$\frac{A}{B} - \frac{0}{D} = \frac{D.A - 0}{B.D} = \frac{A.D}{B.D} = \frac{A}{B}$$

F. <u>Cancelativa</u>.

1) Lo mismo que en la suma esta propiedad que vamos a enunciar se puede justificar por medio de la balanza, pues si tenemos la balanza equilibrada por ejemplo con $\frac{5}{4}$ en uno de los platillos y en el otro los $\frac{5}{4}$ pero dividido en dos objetos, si en el primer platillo le quitamos los $\frac{3}{7}$ y en el segundo un objeto y la balanza sigue en equilibrio entonces se puede afirmar que lo quitado es exactamente igual y por consiguiente $\frac{3}{7} = \frac{P}{Q}$ donde $\frac{P}{Q}$ viene a ser el peso de el objeto quitado.

2) Ejercicios: Hallar la incógnita en cada caso:

a) $\frac{5}{9} - \frac{x}{y} = \frac{5}{9} - \frac{1}{12} \longrightarrow \frac{x}{y} = R$ ________

b) $\frac{3}{4} - \frac{3}{11} = \frac{3}{4} - \frac{a}{n} \longrightarrow \frac{a}{n} = R$ ________

c) $\frac{12}{13} - \frac{1}{15} = \frac{x}{z} - \frac{1}{15} \longrightarrow \frac{x}{z} = R$ ________

3) Esta propiedad es la llamada <u>cancelativa</u> de la disminución que afirma que si a un fraccionario se le resta otro fraccionario y el resultado es igual a la diferencia del primer fraccionario con uno desconocido entonces se puede afirmar que el segundo fraccionario es igual al desconocido.

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} - \frac{E}{F} \longrightarrow \frac{C}{D} = \frac{E}{F}$$

G. <u>Reintegrativa.</u>

1) Sea $\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}=\frac{5}{4}$ efectuamos la suma $\frac{5.2}{4.2}+\frac{4.3}{4.2}-\frac{3}{2}=\frac{10+12}{8}-\frac{3}{2}=\frac{22}{8}-\frac{3}{2}=\frac{22.2}{8.2}-\frac{3.8}{2.8}=\frac{44-24}{16}=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$

Comprobemos que $\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{7}\right)+\frac{4}{7}=\frac{3}{2}$ desarrollamos la disminución si nos la permite la condición de la disminución, 3.7 = 21 y 4.2 = 8; 21 es mayor que 8 por consiguiente efectuamos la disminución de $\frac{3}{2}-\frac{4}{7}=\frac{21-8}{14}=\frac{13}{14}$; entonces $\frac{13}{14}+\frac{4}{7}=\frac{13.7+14.4}{14.7}=\frac{91+56}{98}=\frac{57}{98}=\frac{3}{4}$.

2) Ejercicios: Desarrollar:

a) $\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}=R$ ______ b) $\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}=R$ ______

c) $\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}=R$ ______ d) $\left(\frac{8}{7}-\frac{7}{3}\right)+\frac{7}{3}=R$ ______

3) De donde se deduce que si a un fraccionario se le adiciona y al mismo tiempo se le resta un mismo fraccionario el fraccionario no se altera y es la propiedad <u>reintegrativa</u>.

$$\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}$$

<u>Miscelanea:</u>

1. De cuántas partes consta una fracción ?

2. Cuándo dos fraccionarios son iguales entre sí ?

3. Cuál de estos fraccionarios es mayor y cuál menor :

a) $\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$

b) $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$.

4. Al amplificar el fraccionario $\frac{4}{6}$ primero por 2 luego por 3 y por último por 5, diga que sucede.

5. Simplificar $\frac{12}{18}$ primero por 2 luego por 3.

6. Cuál será mayor $\frac{3}{5}$ o $\frac{5}{4}$?

7. Amplifique el fraccionario $\frac{1}{2}$ tres veces por 2.

8. Transformar $\frac{2}{16}$ $\frac{24}{18}$ y $\frac{65}{60}$ en fracciones con denominador 24.

9. Reducir mentalmente a común denominador :

$\frac{3}{2}, \frac{5}{12}$; $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$; $\frac{5}{2}, \frac{7}{6}$; $\frac{3}{2}, \frac{5}{12}$.

10. Efectuar las sumas siguientes y comprobar por la Asociativa:

a) $\left(\frac{3}{5} + \frac{5}{6}\right) + \frac{4}{9} = \frac{3}{5} + \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{9}\right) = \frac{169}{90}$

b) $\left(\frac{3}{5} + \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{5}\right) + \frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$

11. Efectuar las restas:

a) $\frac{7}{9} - \frac{2}{5}$

b) $\frac{11}{12} - \frac{3}{7}$

c) $\frac{17}{18} - \frac{9}{15}$

12. Efectuar:

a) $\left(\frac{7}{9} - \frac{3}{7}\right) + \frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{4} + \left(\frac{11}{12} - \frac{2}{7}\right)$

c) $\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{9}\right) - \frac{3}{10}$

MULTIPLICACION DE FRACCIONARIOS

A. Abstracción del concepto.

B. Propiedad clausurativa.

C. Propiedad asociativa.

D. Propiedad idéntica o modulativa.

E. Propiedad invertiva.

F. Propiedad conmutativa.

G. Propiedad distributiva recolectiva, con respecto a la adición y a la diminución.

MULTIPLICACION

A. Abstracción del Concepto.

Empleamos segmentos para llegar a la noción de fraccionarios por medio de relaciones, y empleamos segmentos para adquirir el concepto de suma de fraccionarios por consiguiente vamos tambien a emplear segmentos para la multiplicación de fraccionarios, teniendo en cuenta que esta es una relación compuesta de las longitudes de segmentos.

Para saber que es una relación compuesta damos unos ejemplos:

Juan es un hermano de Pedro y Pedro es el padre de Luis, entonces Juna es el hermano del padre de Luis en otras palabras, Juan es el tío de Luis. Se ha sustituído hermano del padre por tío, por esta razón se dice que la relación tío es la compuesta de hermano y padre.

A es una línea recta y B es una línea curva si colocamos una continuación de otra nos da una línea recta-curva que denominaremos Mixta. Donde la denominación de mixta es la resultante de la línea recta más la línea curva. También se puede hablar de colores primarios y secundarios los primarios existen por si solos y los secundarios existen por la combinación de los primarios y se los denominan compuestos. Entonces en la naturaleza existen relaciones compuestas y los fraccionarios por ser relaciones entre segmentos pertenecen a ella, por consiguiente también tienen relaciones compuestas que son en este caso la multiplicación y su operación inversa la división.

Sea entonces los segmentos A, B y C   A 5 

B 3    C 4    relacionados A con B y B con C $\frac{A}{B} = \frac{5}{3}$ y $\frac{B}{C} = \frac{3}{4}$ por ser magnitudes A, B y C se verifica A. B y B. C son iguales 5.3 y 3.4 respectivamente, que relacionadas nos daría $\frac{5.3}{3.4}$ que simplificando nos da el fraccionario $\frac{5}{4}$ que viene a ser propiamente la relación compuesta de $\frac{A}{B}$ y $\frac{B}{C}$ igual a la relación de los segmentos $\frac{A}{C} = \frac{5}{4}$.

Todas las veces que se tienen tres segmentos relacionados el primero con el segundo y el segundo con el tercero se encuentra la relación compuesta de estas como la relación del primero con el tercero que es precisamente la multiplicación de los dos fraccionarios dados.

Este proceso se verifica para todos los trios de segmentos que estan medidos con diferences unidades pero que dan la misma cantidad representativa del ejemplo anterior o sea $M = 5$ $N = 3$ y $P = 4$ de donde M relacionado con N es igual a $\frac{5}{3}$ y que proviene de hacer el producto de M.N y N.P o iguales a 5.3 y 3.4 que relacionados sería igual a $\frac{5.3}{3.4}$ que simplificando nos daría $\frac{5}{4}$ que era la relación pedida.

Este procedimiento se sigue para todos los segmentos que tengan una relación fraccional de manera que el denominador del primero sea el mismo numerador del segundo o que el numerador del primero sea el denominador del segundo.

Prescindiendo de los segmentos y hablando solamente de fraccionarios entonces tendríamos que para multiplicar fraccionarios se multiplicarían aquellos donde el denominador del primero sea igual al numerador del segundo o vice versa. para llegar facilmente a la simplificación y hallar el resultado.

$$\frac{A}{C} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A}{D} \quad o \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{A} = \frac{C}{B}$$

La pregunta sería de inmediato, entonces se pueden multiplicar fraccionarios que no tengan la anterior propiedad ? Sí se puede. Pues si colocamos un ejemplo que no cumpla esta propiedad como $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$ donde no hay un número igual se puede hacer cumplir esta propiedad por la tan famosa amplificación convirtiendo $\frac{2}{3}$ en $\frac{4}{6}$ y quedándonos entonces la multiplicación de $\frac{4}{6} \cdot \frac{5}{4}$ que simplificando nos da como respuesta $\frac{5}{6}$.

Así mismo para los fraccionarios que encontremos con más complicaciones como por ejemplo $\frac{5}{13} \cdot \frac{2}{7}$. Igualamos un denominador y un numerador escogiendo aquel que se nos facilite más, en este caso el numerador del primero con el denominador del segundo amplificando a $\frac{5}{13}$ por 7 y a $\frac{2}{7}$ por 5 del tal suerte que nos quedan los mismos valores con distintos números e iguales a $\frac{35}{91}$ y $\frac{10}{35}$ que multiplicados como en el caso anterior $\frac{35}{91} \cdot \frac{10}{35} = \frac{10}{91}$ como respuesta.

Al llegar a este ejemplo vemos más claro que la multiplicación de fraccionarios se simplifica un tanto ya que el fraccionario resultante se encuentra por la multiplicación de los numeradores entre sí y denominadores entre sí llegando a la conclusión general de que para multiplicar dos fraccionarios se multiplican los numeradores y denominadores entre sí, quedando como numerador y denominador respectivamente.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \longrightarrow \frac{A}{B} = \frac{A.C}{B.C} \;\; y \;\; \frac{C}{D} = \frac{C.B}{D.B} \longrightarrow \frac{A.C}{B.C} \cdot \frac{B.C}{D.B} = \frac{A.C}{B.D}$$

Que es un resumen : $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION

B. <u>Propiedad clausurativa.</u>

1) Sean $\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{5.7}{3.4} = \frac{35}{12}$

Multiplique $\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{5} = \frac{7.9}{2.5} = \frac{63}{10}$

2) Ejercicios. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

a) $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{7}$ = ________ = ________ = R ________

b) $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}$ = ________ = ________ = R ________

c) $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{1}$ = ________ = ________ = R ________

d) $\frac{4}{10} \cdot \frac{10}{3}$ = ________ = ________ = R ________

e) $\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7}$ = ________ = ________ = R ________

f) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{3}$ = ________ = ________ = R ________

g) $\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{11}$ = ________ = ________ = & ________

h) $\frac{5}{6} \cdot \frac{12}{13}$ = ________ = ________ = & ________

i) $\frac{5}{7} \cdot \frac{9}{8}$ = ________ = ________ = & ________

3) De estos y muchos ejemplos se deduce el enunciado general de que el producto de dos fraccionarios es otro fraccionario y es la <u>propiedad clausurativa.</u>

$$\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D} = \frac{A.B}{C.D}$$

Ejercicios. Desarrollar los ejercicios y colocar la respuesta donde corresponda:

	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{23}{13}$	$\frac{45}{17}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{3}{2}$							
$\frac{4}{11}$							
$\frac{13}{5}$							

C. <u>Propiedad asociativa.</u>

1) Al multiplicar $\left(\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{7}\right) \cdot \frac{8}{9}$ debe ser igual a $\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9}\right)$

Efectuamos la primera parte y comprobamos con la segunda.

$\left(\frac{5.6}{3.7}\right) \cdot \frac{8}{9} = \left(\frac{30}{21}\right) \cdot \frac{8}{9} = \frac{30.8}{21.9} = \frac{240}{189}$ como respuesta.

La segunda parte efectuandola sería: $\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9}\right) = \frac{5}{3} \cdot$

$\frac{6 \, . \, 8}{7 \, . \, 9} = \frac{5}{3} \cdot \frac{48}{63} = \frac{5.48}{3.63} = \frac{240}{189}$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{7}$ se puede resolver también por $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}\right)$

Efectuemos la primera parte resolviendo primero el paréntesis.

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{7} = \left(\frac{1.3}{2.5}\right) \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3.4}{10.7} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35}$

como resultado.

Y $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3.4}{5.7}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{35} = \frac{1.12}{2.35} = \frac{12}{70} =$

$\frac{6}{35}$ como resultado que es igual al resultado anterior.

2) Comprobar que: i) $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{6}{7}\right)$

ii) $\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}\right)$

iii) $\left(\frac{1}{11} \cdot \frac{13}{24}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{13}{14} \cdot \frac{1}{3}\right)$

3) De los ejemplos comprobamos que al efectuar la multiplicación de tres fraccionarios se puede efectuar los dos primeros y el resultado multiplicarlo por el tercero o efectuar los dos últimos y multiplicarlo por el primero y el resultado es el mismo dando origen a la propiedad Asociativa.

$$\left(\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\right)\cdot\frac{E}{F}=\frac{A}{B}\cdot\left(\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}\right)$$

Ejercicios: De que otra manera se pueden efectuar las operaciones siguientes sin que se altere el resultado.

a) $\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}\right)=$ R __________

b) $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{3}{5}=$ R __________

c) $\left(\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{6}=$ R __________

d) $\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\right)=$ R __________

e) $\left(\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot\frac{3}{11}=$ R __________

D. <u>Propiedad idéntica o modulativa.</u>

1) Si multiplicamos $\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{7}=\frac{5.7}{3.7}=\frac{35}{21}=\frac{5}{3}$

y efectuamos $\frac{9}{7}\cdot\frac{4}{4}=\frac{9.4}{7.4}=\frac{36}{28}=\frac{9}{7}$

2) Ejercicios. Desarrollar:

a) $\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{3}=$ ________ $=$ ________ $=$ R __________

b) $\frac{6}{9}\cdot\frac{7}{7}=$ ________ $=$ ________ $=$ R __________

c) $\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{4}=$ ________ $=$ ________ $=$ R __________

d) $\frac{5}{9} \cdot \frac{9}{8}$ = ________ = ________ = 9 ________

e) $\frac{12}{23} \cdot \frac{15}{15}$ = ________ = ________ = R ________

3) Nos damos cuenta que un fraccionario cualquiera multiplicado por un fraccionario que tiene como numerador el mismo denominador nos da exactamente el mismo fraccionario, esta propiedad se denomina <u>idéntica</u>.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \longrightarrow \quad C = D \text{ y } D = [illegible]$$

E. <u>Propiedad invertiva</u>.

1) Tomemos $\frac{4}{5}$ y lo multiplicamos por su inverso que sería $\frac{5}{4}$ y efectuamos $\frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{20}{20}$ que simplificando nos da $\frac{1}{1} = 1$

Hagamos lo mismo con $\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{21}{21} = \frac{1}{1} = 1$

de donde encontramos que el producto de un fraccionario por el inverso es igual a la unidad y se denomina la <u>propiedad invertiva</u>.

Esta propiedad tiene una condición que vamos a explicar: de los ejemplos anteriores se deduce que todos los fraccionarios tienen inversos y que por ser fraccionarios la forma $\frac{A}{B}$ entonces también tendría su inverso que sería $\frac{B}{A}$ y efectuando la propiedad invertiva tendríamos $\frac{0}{B} \cdot \frac{B}{0} = \frac{0}{0} = 1$; recordando los números naturales en la división y sabiendo que todo cociente multiplicado por el divisor nos da el dividendo aquí también lo aplicamos y nos daría $0/0 = 5$ ya que $5.0 = 0$ o $=$ a 27 ya que $27.0 = 0$ de donde se deduce que $5 = 7$, lo mismo podríamos afirmar de los fraccionarios diciendo que $\frac{0}{0} = \frac{5}{7}$ o $\frac{3}{4}$ de donde se concluiría que $\frac{5}{7} = \frac{3}{4}$ lo que contradice toda nuestra teoría por consiguiente debemos excluir los fraccionarios con denominador cero en nuestro estudio.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{A} = 1 \iff A, B \neq 0$$

Esta propiedad invertiva es una de las propiedades que nos facilita resolver y desarrollar problemas que tienen mucha importancia en las matemáticas.

Ejercicios:

a) Por qué número multiplicamos a $\frac{6}{5}$ para que nos dé 1 R _____

b) Cuál es el inverso del inverso de $\frac{7}{3}$ ____ _____ R _____

c) Si multiplicamos $\frac{5}{2} \cdot x$ y da como resultado $\frac{10}{10} = 1$ cuál es el valor de x ? R ______

d) Si multiplicamos a $\frac{3}{5}$ por su inverso nos da R _____

Será lo mismo multiplicar $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{7}$ que $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}$? efectuamos y comprobamos.

F. <u>Propiedad conmutativa.</u>

1) $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5.3}{4.7} = \frac{15}{28}$ y $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3.5}{7.4} = \frac{15}{28}$ nos da lo mismo.

$\frac{9}{2} \cdot \frac{6}{7}$ se puede efectuar como $\frac{6}{7} \cdot \frac{9}{2}$

$\frac{9}{2} \cdot \frac{6}{7} = \frac{9.6}{2.7} = \frac{54}{14} = \frac{27}{7}$ y $\frac{6}{7} \cdot \frac{9}{2} = \frac{6.9}{7.2} = \frac{54}{14} = \frac{27}{7}$

que es el mismo resultado.

2) Ejercicios. De que otra manera se pueden efectuar las multiplicaciones siguientes sin variar el resultado.

		Respuesta	Respuesta	
a)	$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} =$			$\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4}$
b)	$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{1} =$			$\frac{2}{1} \cdot \frac{5}{7}$
c)	$\frac{8}{7} \cdot \frac{4}{9} =$			$\frac{4}{9} \cdot \frac{8}{7}$
d)	$\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} =$			$\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{7}$
e)	$\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{7} =$			$\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{5}$

3) Por consiguiente podemos afirmar que el orden de los factores de una multiplicación de fraccionarios no altera el producto, y es la <u>propiedad conmutativa.</u>

$$\frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D} = \frac{B}{D} \cdot \frac{A}{C}$$

G. <u>Propiedad distributiva recolectiva, con respecto a la adición y a la disminución.</u>

Después de ver las anteriores propiedades de la multiplicación se presentan otras que son debidas a la multiplicación y a la suma o al multiplicación y la resta o la multiplicación y el orden aditivo.

1) La multiplicación de $\frac{4}{7}\cdot\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{2}\right)$ es igual a la multiplicación y suma de $\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{2}$. Efectuando la primera parte se tiene: $\frac{4}{7}\left(\frac{5.2}{6.2}+\frac{6.3}{6.2}\right)=\frac{4}{7}\cdot\left(\frac{10+18}{12}\right)=\frac{4}{7}\cdot\frac{28}{12}=$

$\frac{4.28}{7.12}=\frac{112}{84}=\frac{28}{21}$ como resultado; la segunda parte $\frac{4.5}{7.6}+$

$\frac{4.3}{7.2}=\frac{20}{42}+\frac{20}{42}+\frac{12}{14}=\frac{280}{588}+\frac{504}{588}=\frac{280+504}{588}=$

$\frac{784}{588}=\frac{28}{21}$ como comprobación.

$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$ La primera parte la efectuamos.

$\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}\ \frac{5}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{6+5}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{10}=\frac{2.11}{3.10}=\frac{22}{30}=\frac{11}{15}$

como primer resultado.

$\frac{2.3}{3.5}+\frac{2.1}{3.2}=\frac{6}{15}+\frac{2}{6}=\frac{6.6}{15.6}+\frac{2.15}{15.6}=\frac{36+30}{90}=\frac{66}{90}=\frac{11}{15}$ como segundo resultado, que es igual a la primera parte.

2) Ejercicios. Desarrollar y comprobar:

a) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{6}{5}\right) =$ R ________

Comprobar: ________

b) $\frac{2}{\text{[illegible]}} \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{6}{9}\right) =$ R ________

Comprobar: ________

c) $\frac{3}{6} \cdot \left(\frac{12}{17} + \frac{13}{11}\right) =$ R ________

Comprobación: ________

d) $\frac{10}{9} \cdot \left(\frac{4}{7} + \frac{5}{3}\right) =$ R ________

Comprobar: ________

e) $\frac{16}{7} \cdot \left(\frac{13}{4} + \frac{4}{9}\right) =$ R ________

Comprobar: ________

f) $\frac{16}{29} \cdot \left(\frac{83}{52} + \frac{43}{19}\right) =$ R ________

Comprobar: ________

3) De donde nos damos cuenta que para la multiplicación de un fraccionario por una suma de fraccionarios se puede también efectuar la multiplicación del fraccionario por cada uno de los sumandos y después adicionarlos y es la propiedad distributiva recolectiva respecto a la adición.

$$\frac{A}{B}\left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F}\right) = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} + \frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F}$$

Sea los fraccionarios y las operaciones indicadas:

$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{7} - \frac{2}{9}\right)$ y es igual a $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9}$ la primera parte sería: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5.9}{9.7} - \frac{7.2}{9.7}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{45 - 14}{63}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{31}{63} = \frac{31}{126}$ como resultado.

La segunda parte sería $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1.5}{2.7} - \frac{1.2}{2.9} = \frac{5}{14} - \frac{2}{18} = \frac{90}{252} - \frac{28}{252} = \frac{90 - 28}{252} = \frac{62}{252} = \frac{31}{126}$, como respuesta siendo el resultado el mismo.

Ejercicios. Desarrollar y comprobar:

a) $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{23}{25} - \frac{11}{25}\right) =$ R ______

Comprobar: ______

b) $\frac{6}{8} \cdot \left(\frac{7}{4} - \frac{4}{24}\right) =$ R ______

Comprobar: ______

c) $\frac{2}{8} \cdot \left(\frac{7}{6} - \frac{7}{12}\right) =$ R ______

Comprobar: ______

d) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{8}\right) =$ R ______

Comprobar: ______

e) $\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{15}{12} - \frac{3}{18}\right) =$ R ______

Comprobar ______

Por consiguiente se puede afirmar: que el producto de un fraccionario multiplicado por la diferencia de otros dos fraccionarios se puede realizar como el producto de fraccionario por el minuendo menos el producto del fraccionario por el sustraendo y es la propiedad denominada <u>Distributiva recolectiva de la multiplicación con respecto a la disminución</u>.

$$\frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} - \frac{E}{F} \right) = \frac{A.C}{B.D} - \frac{A.E}{B.F} \longrightarrow C.F > D.E$$

Tenemos los fraccionarios $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{9}$ siendo 3.9 = 27. y 7.2 = 14 deducimos que $\frac{3}{7}, \frac{2}{9}$ podemos multiplicarlos por $\frac{4}{5}$ y nos da $\frac{3.4}{7.5}$ y $\frac{2.4}{9.5}$ en donde la desigualdad se conserva y podemos decir que

$\frac{12}{35} > \frac{8}{45}$

Tenemos $\frac{5}{3}$ y $\frac{6}{7}$ que multiplicando 5.7 = 35 y 6.3 = 18 por consiguiente el fraccionario $\frac{5}{3}, \frac{6}{7}$ que si los multiplicamos por $\frac{3}{2}$ nos da $\frac{15}{6}$ que es mayor que $\frac{18}{14}$. Entonces podemos darnos cuenta que en el orden aditivo la multiplicación si se cumple y es la denominada <u>propiedad monotónica con respecto a la multiplicación</u>.

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D} \longrightarrow \frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F} > \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}$$

Ejercicios. Cuál de los fraccionarios es mayor y averiguando cual es mayor qué sucede con la desigualdad si se multiplican por el fraccionario indicado ?

a) de $\frac{6}{7}$ y $\frac{2}{7}$; _____ _____ por $\frac{3}{5}$ $\longrightarrow$ R _____

b) de $\underline{3}$ y $\underline{5}$; _____ _____ por $\underline{7}$ $\longrightarrow$ R _____

c) de $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{3}$; _____ _____ por 9 $\longrightarrow$ R _____

d) de $\frac{7}{8}$ y $\frac{16}{16}$, _____ _____ por $\frac{11}{12}$ $\longrightarrow$ R _____

e) de $\frac{5}{8}$ y $\frac{12}{25}$, _____ _____ por $\frac{4}{7}$ $\longrightarrow$ R _____

DIVISION DE FRACCIONARIOS

A. División como caso particular de la multiplicación.

B. Propiedad clausurativa.

C. Propiedad asociativa en sus tres formas.

D. Propiedad idéntica.

E. Propiedad cancelativa.

F. Propiedades reintegrativas e invertivas.

A. División como caso particular de la multiplicación.

Una manera fácil y comprensiva para estudiar la división es por medio de la multiplicación, aceptando como un caso particular la división.

Si en la multiplicación se tomaron dos relaciones simples y nos dió la compuesta aquí tenemos la compuesta y deducimos una simple conociendo la otra que es dada. Ejemplo: sea $\frac{5}{4}$ una relación compuesta $\frac{3}{4}$ una simple. Para hallar la compuesta en la multiplicación hicimos el producto de $\frac{3}{4}$ por otra relación que en este caso vamos a llamar $\frac{m}{n}$ de tal manera que nos queda la igualdad $\frac{3}{4} \cdot \frac{m}{n} = \frac{5}{4}$ y como necesitamos saber cuanto vale $\frac{m}{n}$ entonces aplicamos la propiedad invertiva o sea multiplicar por el inverso de $\frac{3}{4}$ que es $\frac{4}{3}$ ambos miembros de la igualdad para esta no se altere.

$\frac{3}{4} \cdot \frac{m}{n} = \frac{5}{4}$ multiplicamos ambos miembros por $\frac{4}{3}$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{n} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}$$

$\frac{12}{12} \cdot \frac{m}{n} = \frac{20}{12}$ $\quad$ $\frac{m}{n} = \frac{20}{12}$ que simplificándolos es $\frac{5}{3}$.

Aclarando un poco más; en la multiplicación se tomaron los segmentos $A = 5, B = 3$ y $C = 4$ se hicieron las relaciones de $\frac{A}{B}$ y $\frac{B}{C}$ y se multiplicaron dándonos $\frac{A}{C}$, numéricamente sería $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{12}$ que simplificando es igual a $\frac{5}{4}$, en la división tomamos $\frac{A}{C}$, y $\frac{B}{C}$ invertido o sea $\frac{C}{B}$, y los multiplicamos dándonos $\frac{A}{B}$ que numéricamente se hace $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$. En resumen $\frac{5}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5.3}{3.4} = \frac{5}{3}$.

En conclusión la división es un caso particular de la multiplicación y se efectua multiplicando el dividendo por el divisor invertido o para efectuar la división de un fraccionario por otro se multiplica por el inverso.

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Ejercicios resueltos.

a) $\frac{7}{9} \div \frac{1}{12} = \frac{7.12}{9.1} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3}$

b) $\frac{14}{15} \div \frac{7}{10} = \frac{14.10}{15.7} = \frac{140}{105} = \frac{4}{3}$

c) $\frac{9}{14} \div \frac{3}{5} = \frac{9.5}{14.3} = \frac{45}{42} = \frac{15}{14}$

B. <u>Propiedad clausurativa</u>.

1) De los anteriores ejemplos que se resolvieron nos dimos cuenta de una propiedad que es que si se dividen dos fraccionarios el resultado es otro fraccionario y es la <u>propiedad clausurativa</u> en la división.

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A.D}{B.D} \longrightarrow \frac{C}{D} \neq 0$$

Ejercicios. Efectuar las siguientes divisiones:

a) $\frac{5}{3} \div \frac{3}{7}$ = ______ . ______ = ______ = R ______

b) $\frac{5}{4} \div \frac{4}{9}$ = ______ . ______ = ______ = R ______

c) $\frac{1}{9} \div \frac{9}{1}$ = ______ . ______ = ______ = R ______

d) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ = ______ . ______ = ______ = R ______

e) Efectuar las divisiones que indica la tabla y colocar el resultado

	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{25}{13}$	$\frac{14}{100}$	2[illegible]/33
$\frac{3}{4}$								
$\frac{6}{11}$								
$\frac{73}{15}$								

C. **Propiedad asociativa en sus tres formas.**

De la siguiente propiedad encontramos variantes estudiamos una y las otras dos las enunciamos para que se comprueben como ejercicios.

1) Se tienen los siguientes fraccionarios $\left(\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{1}{4}$ que puede efectuar como $\frac{1}{3} \div \left(\frac{5}{5} \div \frac{1}{4}\right)$ efectuando la primera parte nos da: $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{14}{15}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$ y la segunda parte efectuándola es igual a:

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{5}{7} \div \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{1}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{20}{7}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{20} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$$

es el el mismo resultado.

Comprobar que $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) \div \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{7} \div \frac{1}{4}\right)$

Comprobar que $\left(\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}\right) \div \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \div \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4}\right)$

2) Ejercicios. Efectuar los siguientes ejercicios dando la respuesta comprobada por las leyes asociativas de al división:

a) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{6}{7} \div \frac{3}{5}\right) =$ ______ ______ ______ = R ______

b) $\frac{9}{14} \div \left(\frac{1}{8} \quad \frac{2}{3}\right) =$ ______ ______ ______ = R ______

c) $\frac{7}{8} \div \left(\frac{15}{16} \quad \frac{5}{6}\right) =$ ______ ______ ______ = R ______

d) $\left(\frac{12}{15} \cdot \frac{9}{7}\right) \div \frac{1}{8} =$ ______ ______ ______ = R ______

e) $\frac{6}{9} \div \left(\frac{2}{4} \div \frac{7}{9}\right) =$ ______ ______ ______ = R ______

3) De lo anterior notamos que: a) una división de 2 fraccionarios multiplicada por otro fraccionario se puede efectuar como 3 divisiones, b) Una división de fraccionarios dividida en otro fraccionario es igual al primer dividendo por el producto del divisor y el fraccionario. c) El producto de dos fraccionarios dividido en otro fraccionario es igual al producto del primer factor efectuando la división del segundo factor en el fraccionario. Estos tres apartes forma las tres propiedades asociativas de la multiplicación.

$$\left(\frac{A}{B} \div \frac{C}{D}\right) \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \div \left(\frac{C}{D} \div \frac{E}{F}\right); \left(\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}\right) \div \frac{E}{F} =$$

$$\frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} \div \frac{E}{F}\right) ; \left(\frac{A}{B} \div \frac{C}{D}\right) \div \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \div \left(\frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}\right)$$

Nota al profesor: En las anteriores tres propiedades asociativas se debe tener mucho cuidado al explicarlas, y al hacerlo resolver muchos ejercicios.

D, <u>Propiedad idéntica.</u>

1) Sea el fraccionario o $\frac{5}{4} \quad \frac{7}{7} = \frac{5.7}{4.7} = \frac{35}{28} = \frac{5}{4}$ y

$\frac{23}{15} \quad \frac{4}{4} = \frac{23.4}{60} = \frac{92}{60} = \frac{23}{60}$.

2) Ejercicios. Efectuar los siguientes ejercicios y aplicar la propiedad de identidad.

a) $\frac{8}{7} \quad \frac{3}{3}$ = ______ . ______ = ______ = R ______

b) $\frac{5}{3} \quad \frac{12}{12}$ = ______ . ______ = ______ = R ______

c) $\frac{23}{45} \quad \frac{7}{7}$ = ______ . ______ = ______ = R ______

d) $\frac{37}{9} \quad \frac{30}{30}$ = ______ . ______ = ______ = R ______

e) $\frac{47}{9} \quad \frac{13}{13}$ = ______ . ______ = ______ = 2 ______

3) Se concluye que un fraccionario cualquiera multiplicado por el fraccionario unitario de la forma $\frac{n}{n}$ nos da el mismo fracciona-

Dio. **Propiedad idéntica.**

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{C} = \frac{A}{B} \longrightarrow \frac{C}{C} \neq 0$$

E. **Propiedad cancelativa.**

$\frac{3}{4} \quad \frac{27}{7}$ desarrollando se tendría $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{27} = \frac{21}{108} = \frac{7}{36}$ y $\frac{3}{4} \div \frac{54}{14}$ desarrollando se tendría $\frac{3 \cdot 14}{4 \cdot 54} = \frac{42}{216} = \frac{7}{36}$ esto significa que $\frac{27}{7}$ es igual a $\frac{54}{14}$. $\frac{5}{4} \div \frac{3}{7}$ Probar que es igual $\frac{10}{8} \div \frac{3}{7}$ se efectuan y dan $\frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 3} = \frac{35}{12}$ y $\frac{10 \cdot 7}{3 \cdot 8} = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}$ estos dos ejemplos nos dice claramente que hay que fijarnos al hacer una división porque se puede emplear la igualdad de dos miembros para abreviar la división ya que los otros dos pueden ser iguales con diferentes símbolos y es la **propiedad cancelativa de la división.**

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \div \frac{E}{F} \longrightarrow \frac{C}{D} = \frac{E}{F} \neq 0$$

Ejercicios. Aplicar la ley cancelativa:

a) $\frac{5}{7} \div \frac{6}{11} = \frac{5}{7} \div \frac{18}{33} \longrightarrow$ R __________

b) $\frac{7}{9} \div \frac{3}{11} = \frac{21}{27} \div \frac{3}{11} \longrightarrow$ S __________

c) $\frac{12}{5} \div \frac{13}{87} = \frac{60}{25} \div \frac{13}{87} \longrightarrow$ N __________

d) $\frac{45}{5} \div \frac{1}{7} = \frac{9}{1} \div \frac{1}{2} \longrightarrow$ R ____________

e) $\frac{14}{8} \div \frac{77}{84} = \frac{14}{8} \div \frac{47}{8} \longrightarrow$ R ____________

F. <u>Propiedades reintegrativas e invariativas.</u>

1) a) Sea $\left(\frac{5}{4} \div \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$ desarrollandolas da $\frac{5.2}{4.3} \cdot$

$\frac{3}{2} = \frac{10}{12} \cdot \frac{3}{2} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}.$

b) Sea $\left(\frac{3}{4} \div \frac{6}{5}\right) \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{4}$ desarrollando sería $\frac{3.4}{4.6} \cdot$

$\frac{6}{5} = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}.$

2) Ejercicios. Comprobar la ley Reintegrativa en los siguientes ejercicios:

a) $\left(\frac{20}{7} \div \frac{8}{9}\right) \cdot \frac{8}{9} =$ R ____________

b) $\left(\frac{3}{3} \cdot \frac{6}{87}\right) \div \frac{6}{87} =$ R ____________

c) $\left(\frac{13}{9} \cdot \frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{2} =$ R ____________

d) $\left(\frac{20}{31} \div \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} =$ R ____________

e) $\left(\frac{6}{7} \div \frac{4}{9}\right) \cdot \frac{4}{9} =$ R ____________

3) De donde se concluye que si a un fraccionario se multiplica y al mismo tiempo se divide por el mismo fraccionario se tiene:

que nos de el fraccionario dado y es la <u>propiedad reintegrativa</u>.

Si se tiene $\frac{5}{6} \div \frac{3}{7}$ y si se multiplican ambos términos por un mismo fraccionario por ejemplo $\frac{2}{9}$ nos quedaría: $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{9} \div \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{10}{54} \div \frac{6}{63} = \frac{10.63}{6.54} = \frac{630}{324}$. Simplificando es igual a $\frac{35}{18}$ que es lo mismo que: $\frac{5.7}{6\ 3} = \frac{35}{18}$. De donde se concluye: que si a una división de fraccionarios se multiplican ambos miembros por otro fraccionario la división no se altera y es la <u>propiedad invariativa</u>.

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \left(\frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F}\right) \div \left(\frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}\right)$$

Ejercicios. Efectua y comprueba con la propiedad invariativa los siguientes ejercicios.

a) $\frac{13}{9}$ $\frac{4}{3}$ multiplicados por $\frac{9}{7}$ R __________

b) $\frac{6}{15}$ $\frac{4}{7}$ multiplicados por $\frac{6}{15}$ R __________

c) $\frac{4}{5}$ $\frac{13}{15}$ multiplicados por $\frac{1}{2}$ R __________

d) $\frac{6}{11}$ $\frac{83}{20}$ multiplicados por $\frac{11}{3}$ R __________

e) $\frac{26}{9}$ $\frac{7}{9}$ multiplicados por $\frac{15}{22}$ R __________

<u>Miscelanea</u>:

1. Cómo define el producto entre dos fraccionarios? y cómo la división ?

2. ¿Cuándo dos números se llaman recíprocos ?

3. Multiplicar: a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{1}$, b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{11}$ c) $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{7}$

d) $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}$ e) $\frac{8}{41} \cdot \frac{11}{7}$ f) $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{4}$.

4. Efectuar las operaciones siguientes: a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{3}$,

b) $\frac{2}{4} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{4}{3}$, c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$, d) $\frac{13}{11} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{17}$,

e) $\frac{5}{4} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{5}$.

5. Desarrollar: a) $\left(\frac{3}{7} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{6}\right)$; b) $\left(\frac{2}{4} - \frac{2}{6}\right) \cdot$

$\frac{3}{4}$; c) $\frac{3}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1} + \frac{1}{3} - \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{6} + \frac{9}{1}$,

d) $\left(\frac{8}{3} - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{2}{3}$.

6. Desarrollar: a) $\frac{2}{4} \div \frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{5} \div \frac{2}{7}$ c) $\frac{4}{7} \div \frac{3}{7}$

d) $\frac{4}{3} \div \frac{5}{6}$

7. Efectuar : a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \div \frac{3}{5}$ b) $\left(\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{3}{2}$

c) $\left(\frac{7}{11} \div \frac{1}{25}\right) \div \frac{6}{9}$ d) $\left(\frac{13}{8} \quad \frac{3}{5}\right) \div \frac{1}{2}$

8 Resolver: a) $\frac{3}{5} \left(\frac{2}{3} \quad \frac{5}{6}\right) \div \frac{5}{6}$ b) $\left(\frac{8}{7} \div \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{4}{9}$

POTENCIACION DE FRACCIONARIOS

Concepto; como caso particular de la Multiplicación.

Propiedades.

Radiación como operación inversa de la potenciación.

POTENCIACION

Consideramos los siguientes productos del mismo fraccionario:

$$\frac{5}{3} \times \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3}$$

En lugar de escribir estos productos así, podemos usar una nueva notación :

$$\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \text{ se escribirá } \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \text{ se escribirá } \left(\frac{5}{3}\right)^3$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \text{ se escribirá } \left(\frac{5}{3}\right)^4$$

$$\underbrace{\frac{5}{3} \times \cdot \cdot \cdot \times \frac{5}{3}}_{n\ -\ \text{veces}}, \text{ se escribirá } \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

Esta notación tiene la ventaja de ser mucho más corta. Veamos algunos ejemplos más :

$$\frac{2}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \left(\frac{2}{9}\right)^4$$

$$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \left(\frac{3}{7}\right)^2$$

Ejercicio. Completar la siguiente tabla:

Producto		Potencia
$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$	=	
	=	$\left(\frac{3}{3}\right)^4$
$\frac{5}{5} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{5}$	=	
	=	$\left(\frac{4}{11}\right)^5$
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	=	

Es una simbolización de un caso particular de la multiplicación que se llama Potenciación.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Si se efectua $\quad \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{9} = \frac{5^2}{3^2}$

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{125}{27} = \frac{5^3}{3^3}$$

Se puede afirmar que $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$ que se convierte en potenciación de números naturales y deduciendo que: para elevar un fraccionario a un exponente dado se eleva el numerador y el denominador a dicho exponente ocupando su respectivo sitio en el fraccionario.

PROPIEDADES DE LA POTENCIACION

1) a) Sea $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ como se sabe que es igual a $\frac{2^4}{3^4}$ es igual a $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$. y la multiplicación de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. y $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. nos dan números naturales entonces la relación de sus productos es también un fraccionario igual $\frac{16}{81}$

b) Lo mismo se puede decir de $\left(\frac{5}{9}\right)^2$ que es igual $\frac{5^2}{9^2}$ y que $5 \cdot 5 = 25$ y $9 \cdot 9 = 81$ que relacionados sería $\frac{25}{81}$ que sería el resultado de la potenciación. De donde se concluye que un fraccionario elevado a una potencia es igual a un fraccionario, y es la ley clausurativa $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{P}{Q}$; $P = A \cdot A \cdot A \cdot \ldots A$, $Q = \underbrace{B \cdot B \cdot \ldots \cdot B}_{n \text{ veces}}$

Ejercicios. Desarrollar:

a) $\left(\frac{5}{9}\right)^3 =$ R ________

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^4 =$ R ________

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{9}$ = R ______________

d) $\left(\frac{26}{7}\right)^{3}$ = R ______________

e) $\left(\frac{6}{7}\right)^{5}$ = R ______________

2) Siguiendo el orden de las leyes le corresponde a la Asociativa y vamos a comprobar que no se cumple. Pues no es lo mismo $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}$ que $\left(\frac{2}{3}\right)^{(2^{3})}$ La primera parte es igual a $\frac{64}{729}$ y la segunda $\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$ que es igual a $\frac{256}{6561}$ donde son diferentes sus resultados por consiguiente.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right]^{m} \neq \left(\frac{a}{b}\right)^{(n^{m})}$$

3) La modulativa o idéntica sería la siguiente y tendríamos a

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{1} = \frac{3^{1}}{5^{1}} = \frac{3}{5} \quad \text{también} \quad \left(\frac{20}{7}\right)^{1} = \frac{20^{1}}{7^{1}} = \frac{20}{7}$$

de donde se concluye que todo fraccionario elevado a la potencia 1 es igual al fraccionario.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1} = \frac{a^{1}}{b^{1}} = \frac{a}{b}$$

4) Es muy fácil probar que la conmutativa no se cumple pues si se tiene $\left(\frac{5}{3}\right)^{2}$, es diferente a $(2)^{\frac{5}{3}}$. El primer resultado es igual $\frac{25}{9}$ en cambio no podremos saber el segundo resultado con nuestros conocimientos por consiguiente afirmamos :

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{n} \neq \left(n\right)^{\frac{A}{B}}$$

5) Si se tiene y afirmamos que:

$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$ estamos en un error por que la primera parte efectuandola es igual a: $\left(\frac{1.4}{2.4} + \frac{2.3}{2.4}\right)^2 = \left(\frac{4+6}{8}\right)^2 = \left(\frac{10}{8}\right)^2 = \frac{100}{64} = \frac{25}{16}$ y la segunda: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{4}{16} + \frac{9}{16} = \frac{13}{16}$ que son diferentes los resultados. Entonces no se cumple la Distributiva respecto a la suma.

$$\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right)^{n} \neq \left(\frac{A}{B}\right)^{n} + \left(\frac{C}{D}\right)^{n}$$

6) La misma propiedad distributiva de la potenciación pero aplicada a la multiplicación si se cumple.

$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{9}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{9}\right)^2$ efectuamos la primera parte: $\left(\frac{3.\ 5.\ 3.}{4.\ 7\ \ 9}\right)^2 = \left(\frac{5}{28}\right)^2 = \frac{25}{784}$

y la segunda: $\frac{9\ .\ 25\ .\ 9}{16\ .\ 49\ .81} = \frac{25}{784}$. el mismo resultado.

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ Efectuamos la primera parte $\left(\frac{1\ \ .\ \ 3}{2\ \ \ \ \ 4}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$ y la segunda $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\ \frac{9}{16} = \frac{1.9}{4.16} =$

$\frac{9}{64}$ como respuesta. De tal manera que se cumple y se llama propiedad de potencia que dice que la multiplicación de fraccionarios elevada a una potencia es igual a la multiplicación de los fraccionarios a la potencia individualmente.

$$\left(\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}\right)^n = \left(\frac{A}{B}\right)^n \cdot \left(\frac{C}{D}\right)^n \cdot \left(\frac{E}{F}\right)^n$$

Ejercicios. Efectuar y comprobar la propiedad de potencia:

a) $\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{2}\right)^2 =$ ____ ____ ____ ____ = R ____

b) $\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{11}{4}\right)^3 =$ ____ · ____ = R ____

c) $\left(\frac{11}{32}\cdot\frac{4}{7}\right)^3 =$ ____ · ____ = R ____

d) $\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{9}\right)^3 =$ ____ · ____ = R ____

e) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right)^2 =$ _ R ____

P A R A L E L O S

Semejanzas y diferencias entre las operaciones.

Aprovechamiento de estas semejanzas y diferencias para la transferencia en el aprendizaje de los fraccionarios.

Semejanzas entre las leyes.

En este paralelo que vamos a hacer no se va a tener en cuenta tanto el contenido de lo expuesto, sino la forma como vamos a entregarselo al alumno para que adquiera un concepto de los fraccionarios y en especial la forma de estudiarlos practicamente sin que se presentan con vacios ni lagunas a estudios superiores.

Se va a hacer el paralelo entre las operaciones en sus semejanzas y sus derivaciones de unas a otras, lo mismo que sus diferencias y por último lo hacemos en sus leyes, de tal manera que presentemos un resumen en forma de contenido total.

La primera parte sería entre suma y resta.

a) Si una indica aumentó la otra indica disminución por consiguiente una es operación inversa de la otra.

b) La primera presenta las propiedades clausurativa, asociativa, idéntica, conmutativa y cancelativa cumpliéndose para todo número fraccionario.

En cambio la segunda se presenta con una condición debido en especial al orden aditivo alegando que se cumple siempre y cuando el minuendo sea mayor que el sustraendo.

c) Los signos en una son + y en la otra − y efectuándose cuando se hayan convertido a un común denominador como prerequisito para efectuar la una o la otra.

La suma con la multiplicación.

a) Las formas de efectuarlas son diferentes mientras que una se multiplican los numeradores y denominadores entre sí ocupando el mismo puesto en la otra toca a los fraccionarios elevados a un común denominador.

b) Las propiedades no tienen diferencias en la clausurativa, asociativa, conmutativa y cancelativa solamente varía el signo en uno es + en el otro es x.

c) Cambia en la modulativa ya que en la suma es 0 en la multiplicación es 1 .

d) En la multiplicación aparece el cero 0 dando como consecuencia de su producto por otro fraccionario la anulativa y además aparece la invariativa evitando la multiplicación por fraccionarios que tengan como denominador cero.

e) Una combinación de estas dos operaciones dan como resultado las distribuitivas recolectivas con respecto a la adición.

f) Para dar paso a la Disminución tuvo emplear el orden aditivo en cambio para dar paso a la división no se emplea el orden multiplicativo.

La multiplicación con la División.

a) La división viene a hacer un caso particular al multiplicar por el inverso.

b) La forma de efectuarse dos de la misma manera pues ambas son multiplicaciones de numerador con denominadores teniendo en cuenta que en la división se hace por el inverso.

La resta con la división.

a) Son operaciones inversas.

b) Se cumplen las mismas leyes y donde se encuentra un - en la división es el signo y un + es un signo X teniendo en cuenta las operaciones.

c) Aparecen otras propiedades como la invariativa reintegrativa, y la preinvertiva en las dos anteriores.

De todo lo anterior se puede concluir:

Que son semejantes las operaciones directas suma y multiplicación en sus leyes teniendo la multiplicación dos propiedades más y una combinada.

Son semejantes las operaciones de suma y resta en el proceso de hacerlas ya que juntas van a desembocar al común denominador y diferenciándose en el orden aditivo.

La multiplicación y la división se efectúan de igual manera teniendo en la división el concepto de inverso.

Que la resta y la división se parecen en las leyes ya que tienen las mismas variantes siempre y cuando se tengan en cuenta las operaciones que se efectúan.

Con la potenciación, la multiplicación. Las semejanzas son que de una proviene de la otra.

B I B L I O G R A F I A

En la elaboración de esta Tesis fueron consultadas las siguientes obras:

Aprendamos Matemática Moderna. Gonzalo Uribe Gomo Carvajalino.

Aritmética Teórico Práctica. Aureliano Baldor.

Aritmética y Nociones de Geometría. Por las Licenciadas Julia Contreras de Delgado y Leonor Alarcón de Garzón.

Hagamos Matemáticas. Por Fernando Alfonso y Rafael Delgado.

Metodología de la Aritmética para nivel Primario. Por Julia Contreras de Delgado y Gilma Rodríguez de Villamarín.

Aritmética y geometría. 4o. de Primaria y 1o. año de Bachillerato. por Samuel Londoño.