Universidad de La Salle

Ciencia Unisalle

Especialización en Matemáticas y Física

Departamento de Ciencias Básicas

1-1-1978

Razones proporciones y regla de tres en el bachillerato

Alirio Castro Duque
Universidad de La Salle, Bogotá

Citación recomendada

Castro Duque, A. (1978). Razones proporciones y regla de tres en el bachillerato. Retrieved from https://ciencia.lasalle.edu.co/esp_matematicas_fisica/12

RAZONES PROPORCIONES Y REGLA DE TRES
EN EL BACHILLERATO

ALIRIO CASTRO DUQUE

UNIVERSIDAD SOCIAL CATOLICA DE LA SALLE
MATEMATICAS Y FISICA

BOGOTA, D.E. 1978

TABLA DE CONTENIDO

PROLOGO

Un verdadero deseo de cooperar en la preparación de la juventud colombiana, ha sido el motivo para realizar el trabajo sobre: Razones, Proporciones y Regla de Tres en el Bachillerato, teniendo presente el siguiente objetivo: Desarrollar en el alumno la capacidad de resolver problemas siguiendo un proceso de razonamiento lógico.

Se hace en este trabajo un estudio crítico de las dificultades que presenta el enfoque de estos conceptos en los textos usuales y se ha tratado de superarlas con una nueva presentación.

Este intento de ensayar un nuevo método para la enseñanza de estos temas ha sido puesto en práctica en el Colegio Mayor de San Bartolomé con resultados satisfactorios.

Agradezco al Padre Carlos Eduardo Vasco por las valiosas orientaciones y aportes que me ha proporcionado y quien muy gentilmente dirigió esta monografía.

Alirio Castro Duque

CAPITULO I

ESTUDIO DE LA PRESENTACION DE LAS RAZONES PROPORCIONES Y REGLA DE TRES EN LOS TEXTOS USUALES

DIFICULTADES

Para este estudio tuve especial interés en seleccionar tres textos guía de los que usualmente se utilizan para el desarrollo de los programas a nivel de segundo de Bachillerato.

El objetivo primordial de dicho estudio es hacer un análisis detallado del enfoque de cada uno de ellos, teniendo en cuenta las dificultades que generalmente se le presentan a los educandos.

Los textos en mención son los siguientes:

a. BALDOR, A. Aritmética teórico práctica.

b. WILLS, Darío y otros. Matemática Moderna Estructurada, tomo 2.

c. LOZADA, Ricardo. LOZADA, María de. MATEUS, Hernando. Matemática en Acción 2.

En el texto de A. Baldor se da antes que todo la siguiente definición: "Razón o relación de dos cantidades es el resultado de comparar dos cantidades". Acá hay una gran dificultad y consiste en que solo se mencionan las cantidades y no aparece algo más intuitivo que despierte en los alumnos el interés por situaciones de la vida real.

En la Serie de Matemática Moderna Estructurada, Tomo 2 de Darío Wills y otros se da la siguiente definición: "La razón de dos cantidades homogéneas es un número que multiplicado por la segunda, nos da la primera"; esto es ya un progreso pues sugiere la idea de <u>operador</u>, que es lo que necesitamos para nuestra presentación. El inconveniente fuerte que se presenta en estos dos textos anteriormente citados es la utilización de una metodología deductiva que hace poco partícipes a los alumnos en el aprendizaje; sería como si todo estuviera precisado y debiéramos someterlos a la memorización y mecanización.

En la "Serie Matemática en Acción 2", se da la siguiente definición: "La comparación que resulta de dividir dos medidas o cantidades se llama la razón de estas medidas. Análogamente para la sustracción de dos medidas". Surge una dificultad y es la de que se hace estudio exclusivamente con respecto a los números racionales; por lo menos así lo expresan los ejemplos expuestos.

Se logra acá algo muy importante y es la utilización de una <u>metodología inductiva</u> que consiste en la exposición de ejemplos prácticos y luego con una participación bastante activa de los alumnos, lleva a que estos deduzcan las definiciones de las razones y de las proporciones.

En mi propia experiencia los alumnos han llegado a deducir que una proporción geométrica es la igualdad de dos razones geométricas y que estas deben ser números racionales. Restringirse a los números racionales es una seria dificultad puesto que existen razones como $\pi = (\bar{C} : \bar{D})$ o $\pi = \frac{\bar{C}}{D}$ o $\sqrt{2}$, razón de la diagonal al lado de un cuadrado y esto es lo que no analiza ninguno de estos tres textos en estudio, pues estas razones no son números racionales.

Analicemos la presentación de la Regla de tres en estos mismos textos y veamos las dificultades que usualmente se manifiestan.

En el texto de A. Baldor se tiene la siguiente dedinición: "La Regla de tres es una operación que tiene por objeto hallar el cuarto término de una proporción cuando se conocen los otros tres ". Desde luego y mecánicamente el alumno pensará solamente en una proporción cuando se le presente cualquier problema sobre regla de tres.

Con esto se está restringiendo la creatividad del alumno.

Presenta tres métodos para resolver problemas acerca de regla de tres:

Método de Reducción a la Unidad.

-Regla de tres simple directa:

Si 4 libros cuestan $8,00, Cuánto costarán 15 libros?.

Supuesto..............4 libros...........$8,00

Pregunta..............15 libros...........$ X

Si 4 libros cuestan $8,00, 1 libro costará 4 veces menos: $8,00 ÷ 4 = $ 2,00 y 15 libros costarán 15 veces más, $2,00 X 15 = $ 30,00 R.

-Regla de tres simple inversa:

Cuatro hombres hacen una obra en 12 días. En cuántos días podrían hacer la misma obra 7 hombres?.

Supuesto.............. 4 hombres...........12 días

Pregunata............. 7 hombres........... X días.

Si cuatro hombres hacen la obra en 12 días, un hombre tardaría para hacerla 4 veces más: 4 X 12 = 48 días y 7 hombres tardarían 7 veces menos: $\frac{48}{7} = 6\frac{6}{7}$ ds. R.

Dificultades:

La desactualización en los enunciados de los problemas no se hacía esperar. No existen las bases suficientes para que los alumnos identifiquen de qué tipo de regla de tres se trata.

Necesariamente se mecanizan y este proceso se olvidará en muy poco tiempo. De dónde sale la fracción $\frac{48}{7}$?.

La regla de tres compuesta se resuelve por esta misma línea, con toda seguridad no pasará esto por la mente de los educandos.

Método de las proporciones.

Aplica este método a los mismos ejemplos anteriores:

- Regla de tres simple directa:

Si cuatro libros cuestan $8,00, cuánto cuestan 15 libros?.

Supuesto...........4 libros.........$8,00

Pregunta...........15 libros.........$ x

Como que a <u>más</u> libros, <u>más</u> pesos, estas unidades son directamente proporcionales y sabemos que la proporción se forma igualando las razones directas:

$$\frac{4}{15} = \frac{8}{x} \therefore x = \frac{8 \text{ X } 15}{4} = \$ \, 30,00 \quad \underline{R}.$$

-Regla de tres simple inversa:

Cuatro hombres hacen una obra en 12 días. Cuántos días gastarían siete hombres para hacer la misma obra?.

Supuesto...........4 hombres..........12 días

Pregunta...........7 hombres.......... x días

Como a <u>más</u> hombres, <u>menos</u> días, estas cantidades son inversamente proporcionales y sabemos que la proporción se forma igualando la razón directa de las dos primeras con la razón inversa de las dos últimas o viceversa:

$$\frac{7}{4} - \frac{12}{x} \therefore x = \frac{4 \text{ X } 12}{7} = 6\frac{6}{7} \text{ días} \quad \underline{R}.$$

<u>Dificultades:</u>

Los alumnos tienen el siguiente concepto:

Magnitudes directamente proporcionales son dos magnitudes tales que, multiplicando una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número, y dividiénla por un número, la otra queda dividida por el mismo número.

Magnitudes inversamente proporcionales, son dos magnitudes tales que, multiplicando una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número y dividiendo una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número.

Definiciones como las anteriores solo conducen a los alumnos hacia la mecanización y lo más seguro es que van a resolver todos los problemas como reglas de tres simples directas; hay una gran dificultad para construír la proporción y no se menciona siquiera la propiedad fundamental de las proporciones.

En la regla de tres compuesta se hace el mismo seguimiento y por supuesto acrecentarán las dificultades ya manifestadas.

Método práctico.

Regla práctica para resolver cualquier problema de regla de tres simple o compuesta:

" Se escriben el supuesto y la pregunta. Hecho esto, se compara cada una de las magnitudes con la incógnita (suponiendo que las demás no varían) para ver si son directa o inversamente proporcionales con la incógnita.

A las magnitudes que sean directamente proporcionales con la incógnita se les pone debajo un signo más y encima un signo menos, y a las magnitudes que sean inversamente proporcionales con la incógnita se les pone debajo un signo menos y encima un signo más. El valor de la incógnita será igual al valor conocido de su misma especie (al cual siempre se le pone más), multiplicando por todas las cantidades que llevan el signo más, partiendo ese producto por el producto de las cantidades que llevan el signo menos".

Dificultades:

El autor expone esta regla práctica antes de dar ejemplos que son los mismos expuestos en los dos métodos anteriores, afirmando que "este método es el más rápido de los tres".

En verdad es una receta forzada y seguramente es pero el método más rápido en olvidarse; no existe duda alguna sobre la memorización y mecanización del alumno con este método que nada positivo podrá crear en ellos, pues el alumno de hoy no aceptará este tipo de formulismos.

Analicemos ahora la presentación que hace la "Serie de Matemática Moderna Estructurada Tomo 2" de Darío Wills y otros y veamos algunas dificultades que se presentan:

"La razón de dos cantidades homogéneas es un número que multiplicado por la segunda nos da la primera".

Así, la razón de dos cantidades homogéneas 15 metros y 5 metros que se representa $\frac{15\ m}{15\ m}$, es 3 ya que 3 es [illegible] número que multiplicado por 5m da 15 m.

$$\frac{15m}{5\ m} = 3 \quad \text{porque} \quad 3 \times 5 = 15\ m$$

Si a y b son dos cantidades homogéneas, su razón se representa por el símbolo $\frac{a}{b}$.

a ⟵ antecedente

b ⟵ Consecuente

" Define una proporción como la igualdad de 2 razones y dice que en general una proporción entre cantidades se expresa en términos de los números racionales correspondientes. Obsérvese que acá generaliza solo para los números racionales, lo cual crea una dificultad.

En ningún momento se hace en este texto un estudio sobre las proporciones aritméticas.

<u>Magnitudes directamente proporcionales.</u>

Se dice que dos cantidades A y B son directamente proporcionales cuando la razón de sus medidas es constante.

Si m es la medida de la cantidad A, n es la medida de la cantidad B y A y B son directamente proporcionales, entonces se cumple:

$\frac{m}{n} = K$, en donde K es una constante denominada constante de proporcionalidad.

<u>Magnitudes inversamente proporcionales.</u>

Dos cantidades son inversamente proporcionales cuando el producto de sus medidas es constante.

Si m es la medida de una cantidad, n la medida de otra y ambas cantidades son inversamente proporcionales, se cumple:

$m.n = K$, en donde K es una constante denominada constante de proporcionalidad.

Existe acá una dificultad que consiste en llegar de una vez a la proporcionalidad sin haber tenido en cuenta algún tipo de relación que oriente al alumno para poder seguir un proceso lógico en el aprendizaje.

Regla de tres.

"La regla de tres simple directa es un método para resolver problemas en los que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales. Por tanto, es útil tener cierta facilidad para reconocer cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales. Si las magnitudes son inversamente proporcionales, se tiene el problema de regla de tres simple inversa".

Presenta la siguiente propiedad fundamental sobre la proporcionalidad compuesta:

" Si A es proporcional a B, C, D, la razón de dos cantidades cualesquiera de A es igual al producto de las razones correspondientes en B, C y D, escritas en forma directa o inversa de acuerdo con si proporcionalidad de A con ellas es directa o inversa".

Así, si para los valores a_1 y a_2 de A, corresponden los valores b_1, b_2 de B; c_1 , c_2 de C y d_1, d_2 de D, siendo B y C directamente proporcionales a A,y D inversamente proporcional con A, tenemos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} . \frac{c_1}{c_2} . \frac{d_2}{d_1}$$

Yo pienso que esto difícilmente lo entiende un alumno, no hay más remedio que memorizar y esto no es nada pedagógico.

Veamos la siguiente regla práctica que nos presenta este texto para la regla de tres compuesta:

"Se compara la magnitud de la incógnita con cada una de las otras (considerando constante las demás) . Se coloca un signo más encima de las que resultan directas y un signo menos encima de las inversas. Se aplica la propiedad fundamental de la proporcionalidad compuesta a la razón que tiene la incógnita y se despeja esta ".

La matemática no debe hacerse a base de reglas que se convierten en recetas y que nada aportan a la capacidad creativa de los alumnos.

La Serie de Matemática en Acción 2 dice: "La comparación que resulta de dividir dos cantidades o medidas se llama la razón de estas medidas".

Proporción:

" En un curso hay 12 niñas y 15 niños, mientras que otro curso tiene 16 niñas y 20 niños. Si comparáramos el número de niñas y el número de niños en el primer curso obtendremos:

$$\frac{12}{15} \quad (\text{ó } \frac{4}{5})$$

y en el segundo:

$$\frac{16}{20} \quad (\text{ó } \frac{4}{5})$$

Las dos razones son iguales, pues $\frac{12}{15} = \frac{16}{20}$. En este caso, decimos que las cuatro medidas (12 y 15, 16 y 20) son proporcionales. La igualdad:

$$\frac{12}{15} = \frac{16}{20}$$ se llama proporción" .

Este estudio tan sencillo no es suficiente para manejar claramente el concepto de proporción. Además no se habla sino de la proporción geométrica y no aparece la proporción aritmética que puede ser muy útil para estudios posteriores.

Uso de las proporciones.

Analiza los siguientes ejemplos donde se emplean proporciones.

Ejemplo 1 :

El almacén "TIO" ofrece $10,00 de mercancía gratis por cada compra de $250,00 y el almacén "ALFA" ofrece $40,00 de mercancía gratis por cada $1.000,00 en compras. Cuál de las ofertas es mejor?.

"TIO" da $\frac{10}{250}$ (ó $\frac{1}{25}$), y , "ALFA" da $\frac{40}{1.000}$ (ó $\frac{1}{25}$)

Estas razones son iguales, luego las ofertas son equivalentes (valen lo mismo).

Ejemplo 2 :

Si un banco paga intereses de $2,00 por cada $100,00 ahorrados cada mes, cuántos intereses pagará a Víctor este mes, si tiene $400,00 ahorrados?.

La razón de intereses a ahorros es $\frac{2}{100}$. Como la cantidad de intereses debe ser proporcional a la cantidad de ahorros, escribimos la proporción:

$\frac{2}{100} = \frac{x}{400}$. Hay que averiguar el valor de la incógnita.

Recordando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si a.d = b.c, la ecuación anterior se puede escribir :

$$2.400 = 100.$$

$$8 = x$$

Luego Víctor recibe $8,00 de intereses.

Los autores afirman : "En el ejemplo 2 usamos la regla de tres que proviene de la definición de igualdad entre números racionales ".

La presentación hecha en este texto ha mejorado bastante, pues se hace con una metodología inductiva que permite a los alumnos ver la aplicación de las proporciones y que los lleva a concluír que se ha hecho uso de la regla de tres.

Lo que no está claro es la afirmación que se hace de que la regla de tres proviene de la definición de igualdad entre números racionales. Esto hace pensar a los educandos en que acá solo se van a utilizar los racionales y veremos que este conjunto no es suficiente para muchas aplicaciones matemáticas.

CAPITULO 2

RAZONES Y PROPORCIONES

2.1 DIFERENCIAS Y COCIENTES ENTRE NUMEROS

Consideremos el conjunto $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$; en otros términos $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$

Establescamos las siguientes diferencias entre éstos números, así:

$$\begin{array}{cccc|c:cccc}
5-1 & 5-2 & 5-3 & 5-4 & 5-5 & 5-6 & 5-7 & 5-8 & 5-9\\
 & 4-1 & 4-2 & 4-3 & 4-4 & 4-5 & 4-6 & 4-7 & 4-8\\
\underbrace{\qquad} & \underbrace{\qquad} & \underbrace{3-1} & \underbrace{3-2} & \underbrace{3-3} & \underbrace{3-4} & \underbrace{3-5} & \underbrace{3-6} & \underbrace{3-7}\\
\ldots 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \ldots
\end{array}$$

Notemos que las cuatro primeras columnas tienen sentido dentro de la aritmética natural griega; después la quinta columna puede todavía tener una interpretación intuitiva considerando el cero como el cardinal de un conjunto vacío, lo cual es desconocido para la matemática griega y para la matemática europea hasta el siglo XIII.

Después las consideraciones de las demás columnas como representaciones de números, solo alcanzará plena aceptación a comienzos del siglo XVII.

Notemos que las diferencias de estas últimas columnas son los números enteros negativos, conjunto este denotado por $\mathbb{Z}^-$ y que unido al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ nos producen el conjunto de números enteros así:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, \ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Establezcamos ahora los siguientes cocientes entre los mismos números de $\mathbb{N}^*$ así:

$$\begin{array}{ccccccc} & 5 : 2 & 5 : 3 & 5 : 4 & 5 : 5 & 5 : 6 & \\ & 10 : 4 & 10 : 6 & 10 : 8 & 10 : 10 & 10 : 12 & \\ & \underbrace{20 : 8} & \underbrace{20 : 12} & \underbrace{20 : 16} & \underbrace{20 : 20} & \underbrace{20 : 24} & \\ \ldots & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \frac{5}{6} & \ldots \end{array}$$

Notemos que los cocientes respectivos de estos números fueron ya aceptados por Babilonios, egipcios y griegos como entidades aritméticas lógicas y útiles; propiamente no se les llama números. Los griegos llamaban a estos cocientes indicados "Logos" razones, en el sentido de que eran "razonables o racionales".

Todos estos cocientes producen el conjunto de números racionales estrictamente positivos que notamos y definimos así:

$$\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{p}{q} \Big/ \ p \in \mathbb{N}^*, \ q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

En verdad resulta más lógico si se hacen las diferencias en $\mathbb{Q}^+$ para llegar a $\mathbb{Q}$.

Al mismo resultado se llegaría tomando los cocientes entre los enteros:

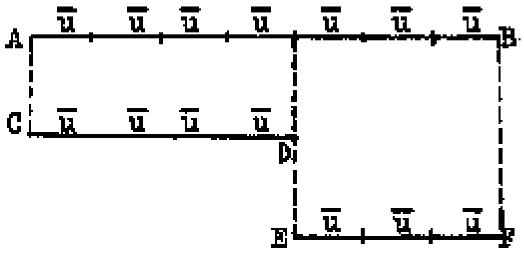
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \Big/ \ p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\},$$

pero en la práctica la restricción $q \neq 0$ y el problema de dividir un número negativo por otro ($\frac{-n}{-m}$), lleva a dificultades pedagógicas considerables.

Estas breves indicaciones nos permiten pasar directamente a la presentación de las razones aritméticas y geométricas. Omitimos las definiciones geométricas de recta, segmento y segmento unitario, así como de las operaciones de suma y resta de segmentos, y la multiplicación externa de un segmento por un número natural.

2.2 RAZONES ARITMETICAS O POR DIFERENCIA Y GEOMETRICAS O POR COCIENTE

Tomemos el segmento $\overline{AB}$ y sobre él un segmento unitario $\overline{u}$, tal que: $\overline{AB} = 7\overline{u}$ y consideremos el segmento $\overline{CD}$, paralelo a $\overline{AB}$, de manera que: $\overline{CD} = 4\overline{u}$



Cuál es la diferencia?

Se puede observar que:

$$\overline{AB} = 7\overline{u}$$

$$\overline{CD} = 4\overline{u}$$

$$\overline{CD} \oplus \overline{EF} = \overline{AB}$$

Como sabemos restar segmentos (por lo menos en este caso en el que $\overline{AB}$ es más largo que $\overline{CD}$), escribimos:

$$\overline{AB} \ominus \overline{CD} = \overline{EF}$$

$$7\overline{u} \ominus 4\overline{u} = (7 - 4)\,\overline{u} = 3\overline{u} = d\overline{u}$$

donde: $\overline{EF} = 3\overline{u}$, y d = (7 – 4) = 3

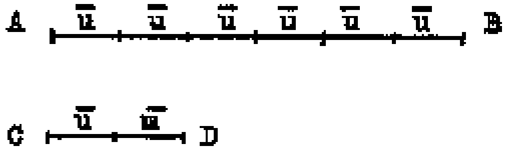
Llamemos a $\overline{EF}$ la razón aritmética entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Observemos que : $\overline{EF} - \overline{CD} = \overline{AB}$, ó sea que :

$$(\overline{AB} - \overline{CD}) - \overline{CD} = \overline{AB}$$

La razón aritmética entre el 1o. y el 2o., sumada con el 2o. nos vuelve a producir el 1o.

Tomemos el segmento $\overline{AB}$ y sobre él el segmento unitario $\overline{u}$, tal que: $\overline{AB} = 6\overline{u}$ y consideremos el segmento $\overline{CD}$ paralelo a $\overline{AB}$ de manera que: $\overline{CD} = 2\overline{u}$



Cuál es el cociente?

No sabemos dividir segmentos por segmentos, pero se puede observar que:

$$\overline{AB} = 6\overline{u}$$

$$\overline{CD} = 2\overline{u}$$

$$3.\overline{CD} = 3.(2\overline{u}) = (3.2)\,\overline{u} = 6\overline{u}$$

$$3.\overline{CD} = \overline{AB}$$

Parece claro que si pudiéramos dividir $\overline{AB}$ por $\overline{CD}$ nos daría 3; escribimos $\overline{AB} : \overline{CD} = 3$ y decimos que 3 es la razón geométrica entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

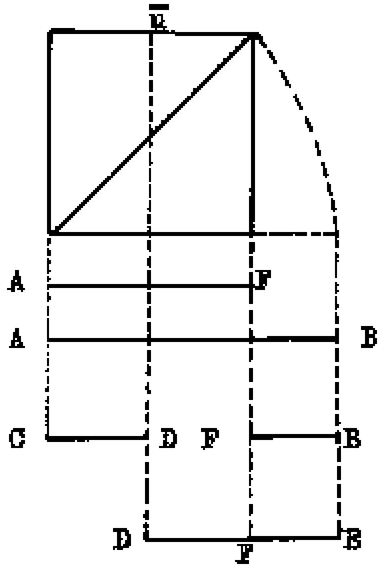
Observemos que:

$$3.\overline{CD} = \overline{AB}\text{ , o sea que :}$$

$$(\overline{AB} : \overline{CD}).\ \overline{CD} = \overline{AB}$$

La razón geométrica entre el 1o. y el 2o., multiplicada por el 2o. nos vuelve a producir el 1o.

Ahora analicemos otro caso similar en la siguiente gráfica:



El punto B corresponde a la diagonal del cuadrado construído sobre el segmento unidad $\overline{u}$. Podemos notar claramente que:

$$\overline{AF} = \overline{u}$$
$$2.\,\overline{CD} = \overline{AF}$$
$$\overline{CD} \oplus \overline{DE} = \overline{AB}$$
$$\overline{AF} \oplus \overline{FB} = \overline{AB}$$

Podemos formar la razón aritmética entre:

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$: $\overline{AB} \ominus \overline{CD}$,

que es igual a $\overline{DE}$, pues $\overline{DE} \oplus \overline{CD} = \overline{AB}$. También podemos formar la razón aritmética entre $\overline{AF}$ y $\overline{CD}$; $\overline{AF} \ominus \overline{CD}$. Cuál es?

Podemos formar la razón geométrica entre $\overline{AF}$ y $\overline{CD}$: $\overline{AF} : \overline{CD}$, que es igual a 2, pues $2.\overline{CD} = \overline{AF}$.

Cuál será la razón geométrica entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$? . Entre $\overline{AB}$ y $\overline{AF}$?

Sabemos que deben ser unos operadores tales que:

$$(\overline{AB} : \overline{CD}) . \overline{CD} = \overline{AB}$$
$$(\overline{AB} : \overline{AF}) . \overline{AF} = \overline{AB}$$

Hace unos 2.500 años los griegos descubrieron que no hay ningún operador racional (esto es, un fraccionario) r tal que:

$r.\ \overline{CD} = \overline{AB}$, ni ningún fraccionario s, tal que:

$$s.\ \overline{AF} = \overline{AB}.$$

Dejamos pues indicadas las razones geométricas y veamos si es posible calcular con ellas, aunque no sepamos si corresponden a un número fraccionario o no.

Adelantándonos a este estudio podemos decir que así aparecen unos nuevos "números" que llamaremos "números reales", que notaremos $\mathbb{R}$.

En general la razón aritmética entre a y b, donde a y b pueden ser dos segmentos ó dos números, será ; a − b y la razón geométrica será ; a:b. Se suele llamar el primer término <u>antecedente</u> y el segundo término <u>consecuente</u> .

Nótese que el antecedente y el consecuente de la razón aritmética, son respectivamente el minuendo y el sustraendo en la resta que aparece indicada en la razón aritmética, así:

Razón aritmética o por diferencia.	Resta o razón aritmética indicada.
$\underset{\text{Antecedente}}{7} - \underset{\text{Consecuente}}{4}$	$\underset{\text{Minuendo}}{7} - \underset{\text{Sustraendo}}{4}$

Las propiedades de una razón aritmética se derivan de las de la resta o diferencia.

Se insinúa deducirlas de las propiedades de la resta segmentaria para una razón aritmética de segmentos, y de las de la resta numérica para una razón aritmética de números.

Nótese igualmente que el antecedente y el consecuente de la razón geométrica, son respectivamente el dividendo y el divisor en la división que aparece indicada en la razón geométrica, así:

Razón geométrica o por Cociente.

7 : 4

Antecedente Consecuente

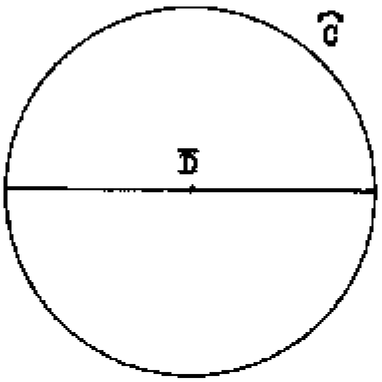
División o razón geométrica indicada.

7 : 4

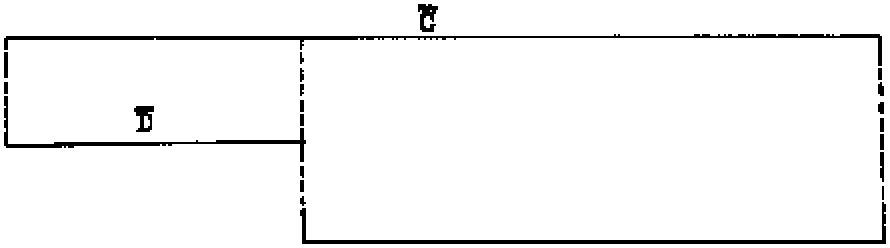
Dividendo Divisor

Las propiedades de la razón geométrica se establecen por analogía con las de la división en los casos en los que ésta pueda efectuarse.

Veamos un nuevo ejemplo:



Consideremos la circunferencia $\widehat{C}$ y el diámetro $\overline{D}$; si "desenrollamos" la circunferencia $\widehat{C}$, dicha línea curva $\widehat{C}$ queda convertida en un segmento $\overline{C}$ que se llama:
<u>circunferencia rectificada</u>. (1)



Habrá un operador de amplificación π , tal que :
$\pi \overline{D} = \overline{C}$?

Si se quiere expresar la circunferencia $\overline{C}$ en términos

---

(1) Nota. En griego: "Perí-metrón" significa medida alrededor que empieza precisamente con la p griega o letra π y que expresa el perímetro del disco o círculo. "Diámetrón" significa medida al través; por eso el operador π, aplicado al diá-metrón, nos da el perí-metrón.

del diámetro $\overline{D}$, es necesario establecer una razón o cociente indicado entre $\overline{C}$ y $\overline{D}$; $\overline{C} : \overline{D}$, de tal manera que:

$$(\overline{C} : \overline{D}) . \overline{D} = \overline{C}$$

Comparando con $\pi\overline{D} = \overline{C}$, observamos que el operador de amplificación π es precisamente la razón entre la circunferencia y el diámetro.

Tampoco hay ningún número fraccionario o racional r, tal que $r. \overline{D} = \overline{C}$. Por lo tanto π es uno de los "nuevos números" o números reales $\mathbb{R}$. Se puede comprobar que $\pi\overline{D}$ es un poco mayor que $3\overline{D}$, y bastante menor que $4\overline{D}$. El número π es pues una razón geométrica entre segmentos. Como $\overline{C} = 1\overline{C}$, podemos escribir : $\pi\overline{D} = 1. \overline{C}$ y establecer una razón o cociente indicado entre números : $(\pi : 1)$ ó $(1 : \pi)$ de tal manera que:

$$\overline{C} = (\pi : 1) . \overline{D} \text{ y } \overline{D} = (1 : \pi) . \overline{C}$$

Obsérvese que : $1 : \pi$ y $\pi : 1$ son operadores que actúan sobre segmentos alargándolos o acortándolos. Estos operadores o cocientes simbólicos son "números reales" y se les denomina razones geométricas o por cociente, o simplemente razones.

En general la razón geométrica entre a y b es el cociente indicado a:b, donde a y b pueden ser segmentos o números, con $b \neq 0$. (1)

Obsérvese de nuevo que a:b es una división indicada, donde a es el dividendo y b es el divisor. La razón geométrica o por cociente se puede escribir en forma de fracción o de cociente indicado, así: $\frac{7}{4}$ o 7:4, y se lee:

: la razón de siete a cuatro.

---

(1). La restricción $b \neq 0$ no presenta ningún problema conceptual, pues en el pensamiento griego no existe ni el número cero ni el segmento nulo.

En este caso siete es el antecedente y cuatro es el consecuente. De la misma manera, ($\overline{C}$: $\overline{D}$) se lee: la razón de la circunferencia $\overline{C}$ al diámetro $\overline{D}$.

2.3 DIFERENCIA ENTRE FRACCIONARIOS Y RAZONES

Los ejemplos de razones como $\overline{AF} : \overline{CD} = 2$, $6 : 3 = 2$ y la notación a:b o $\frac{a}{b}$ para la razón entre a y b, pueden llevar a preguntarse si hay alguna diferencia entre las razones y los fraccionarios.

Recuérdese que los fraccionarios eran operadores sobre segmentos conmensurables con un mismo segmento unidad, o sobre números enteros.

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AF} = \overline{CD} \qquad \frac{2}{1} \cdot \overline{CD} = \overline{AF}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \qquad \frac{2}{1} \cdot 2 = 4$$

Ahora hemos generalizado estos operadores a razones entre cualquier pareja de segmentos o de números, aunque los segmentos no sean conmensurables, como la diagonal del cuadrado y su lado, o, aunque los números no sean enteros o ni siquiera fraccionarios.

Esto precisamente introduce nuevos operadores o números reales como:

$\sqrt{2} = (\overline{AB} : \overline{AF})$, razón de la diagonal $\overline{AB}$ al lado $\overline{AF}$.

$\pi = (\overline{C} : \overline{D})$, razón de la circunferencia $\overline{C}$ al diámetro $\overline{D}$, etc, y

cualquiera de esos nuevos números puede figurar como antecedente o consecuente en una razón: $\pi : \sqrt{2}$ o $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ no son fraccionarios, pero sí son razones y por lo tanto son números reales. Estas razones (π y $\sqrt{2}$) siempre son constantes en todos los cuadrados y en todos los círculos.

2.4 PROPIEDADES DE UNA RAZON GEOMETRICA

Las propiedades de una razón geométrica son análogas a las que se analizaron en las fracciones. Sin embargo no está por demás recordarles: (1)

<u>Primera propiedad</u>.

Equivalencia por domplificación o simplificación.

Ejemplos:

Complificación   Simplificación

$$\frac{6}{8} \longmapsto \frac{6X2}{8X2} = \frac{12}{16} \; ; \; \frac{6}{8} = \frac{12}{16} \qquad \frac{6}{8} = \frac{3X2}{4X2} \longmapsto \frac{3}{4} \; ; \; \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{6}{8} \longmapsto \frac{6X3}{8X3} = \frac{18}{24} \; ; \; \frac{6}{8} = \frac{18}{24} \qquad \frac{6}{9} = \frac{2X3}{3X3} \longmapsto \frac{2}{3} \; ; \; \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \longmapsto \frac{2X2}{3X2} = \frac{4}{6} \; ; \; \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \qquad \frac{8}{12} = \frac{2X4}{3X4} \longmapsto \frac{2}{3} \; ; \; \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Fracciones como $\frac{12}{16}$; $\frac{18}{24}$ que representan el mismo fraccionario $\frac{6}{8}$, se dice que son equivalentes. Las razones (12:16), (18:24) y (6:8) se dice que son iguales.

Así mismo (4:6) y (2:3) son iguales; (6:8) y (3:4) son iguales; (6:9) y (2:3) son iguales y (8:12) con (2:3) son iguales.

Nota: Tal vez sería más exacto decir que las razones

---

(1). Usualmente se habla de amplificador en fraccionarios, sin embargo amplificar significa agrandar; nosotros usaremos consistentemente operadores de amplificación o de aumento para los operadores que agrandan los números o alargan los segmentos; como opuestos a los operadores de acortamiento, disminución o achicamiento; en cambio al transformar la fracción $\frac{6}{8}$ en la fracción $\frac{12}{16}$, no se agranda ni se achica. Así como lo contrario de "simple" (en latín Simplex) es "complejo" o "complicado" (en latín complex), el opuesto de <u>simplificar</u> debe ser lógica y filológicamente <u>complificar</u>.

son equivalentes cuando representan el mismo número real. Pero utilizaremos la terminología clásica de que dos razones son iguales cuando representan el mismo número real, así como decimos que dos fraccionarios son iguales cuando representan el mismo número fraccionario.

Si r es un conjunto de razones iguales a (2:3), se puede hacer la siguiente representación:

$$r \longleftrightarrow \left\{(2:3),\ (2X2:3X2),\ (2X3:3X3),\ldots,(2X\tfrac{1}{5} :3X\tfrac{1}{5}),\ldots,\ (2X\,\pi :\ 3\ X\,\pi),\ldots\right\}$$

$$ó\quad r \longleftrightarrow \left\{\frac{2}{3},\ \frac{2X2}{3X2},\ \frac{2X3}{3X3},\ \frac{2X4}{3X4},\ldots,\ \frac{2XK}{3XK},\ldots,\right\}$$

Nota: Usaremos esta doble flecha en el sentido de que todas las razones iguales representan el mismo número real r.

Téngase en cuenta que el multiplicador K no tiene que ser necesariamente un entero.

En general, si K es un número real diferente de cero y (a:b) representa una razón geométrica, la razón (a.K):(b.K) es igual a la razón (a:b); por eso notamos:

$$(a : b) = \frac{a}{b} = \frac{a.\ K}{b.\ K} = \frac{aK}{bK} = (ak : bK)$$

Simbólicamente se tiene:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R}\ (b \neq 0, \wedge, k \neq 0)\ (a:b)=(ak:bk)$$

Luego se puede decir:

Si multiplicamos los dos términos de una razón por un número real diferente de cero, el resultado es una razón igual a la original.

Definición de orden entre razones.

A semejanza del orden entre fraccionarios podemos definir el orden entre razones.

Recordemos que si se tienen varias fracciones indicadas con el mismo denominador, la mayor es la que tiene mayor numerador. Aplicando lo anterior a las razones geométricas, se puede decir:

De varias razones indicadas que tengan diferente antecedente e igual consecuente, la razón mayor es la que tiene mayor antecedente; por lo tanto, estableciendo la relación de orden entre $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{3}$ y $\frac{8}{3}$ se tiene:

Fracciones indicadas	Fracciones geométricas
$\frac{4}{3} > \frac{2}{3}$ o $\frac{2}{3} < \frac{4}{3}$	$(4 : 3) > (2:3)$ o $(2:3) < (4:3)$
$\frac{6}{3} > \frac{2}{3}$ o $\frac{2}{3} < \frac{6}{3}$	$(6 : 3) > (2:3)$ o $(2:3) < (6:3)$
$\frac{6}{8} > \frac{2}{3}$ o $\frac{2}{3} < \frac{6}{8}$	$(6 : 8) > (2:3)$ o $(2:3) < (6:8)$

Obsérvese que utilizaremos la misma notación $>$, $<$ para las relaciones deorden estricto entre fraccionarios y razones.

Para comparar dos fracciones con diferentes denominadores se transformaban en otras dos que tuvieran el mismo denominador.

Por ejemplo, será $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$?

Transformándolas: $\frac{a.d}{b.d} < \frac{c.b}{d.b}$?

Comparando numeradores:

$$a.d < c.b \quad ?$$

Si esto último se cumple, entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ también se cumple.

Ejemplos:

1. $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$? $\frac{1 \times 3}{2 \times 3} < \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$? ... $\frac{3}{6} < \frac{4}{6}$?

Como $3 < 4$, efectivamente se cumple que $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

2. $\frac{3}{4} < \frac{2}{3}$? Veamos: $\frac{3 \times 3}{4 \times 3} < \frac{2 \times 4}{3 \times 4}$?... $\frac{9}{12} < \frac{8}{12}$?

Como $9 \not< 8$, no se cumple que $\frac{3}{4} < \frac{2}{3}$.

Algo parecido diremos en el caso de razones con consecuentes diferentes; primero las transformamos en razones con el mismo consecuente y luego comparamos los antecedentes.

Será $(2 : 9) < (1 : \pi)$?

Transformándolas: $\frac{2}{9} = \frac{2\pi}{9\pi} < \frac{1}{\pi} = \frac{9}{9\pi}$?

Comparamos los antecedentes de $(2\pi : 9\pi)$ y $(9 : 9\pi)$. Como $\pi < 4$, entonces $2\pi < 8$ y por supuesto $2\pi < 9$.

Por lo tanto $(2\pi : 9\pi) < (9 : 9\pi)$ y así $(2:9) < (1 : \pi)$.

Segunda propiedad.

Por lo visto anteriormente, es claro que:

$(2 :3) < (2 \times 2 :3) < (2 \times 3 :3) < (2 \times \pi :3) < \ldots < (2k:3)$ con $k > 1$

En general:

Si K es un número real positivo mayor que 1 y $(a: b)$ representa una razón, la razón $(ak :b)$ representa una razón mayor que la razón $(a :b)$. Consecuentemente se puede notar:

Si $K > 1$, $\frac{aK}{b} > \frac{a}{b}$ ó $(aK : b) > (a : b)$.

Tercera propiedad.

Qué pasa si en vez de multiplicar el antecedente por un k 1, multiplicamos el consecuente?. Veámoslo.

Sea:

$K = 2 : \frac{2}{3} \longmapsto \frac{2}{3X2} = \frac{2}{6}$, Como $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, vemos que

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{3X2}$$

Sea:

$K=3 ; \frac{2}{3} \longmapsto \frac{2}{3X3} = \frac{2}{9}$.Como $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, vemos que $\frac{2}{3} > \frac{2}{3X3}$

Sea:

$K = \pi : \frac{2}{3} \longmapsto \frac{2}{3X\pi} = \frac{2}{3\pi}$ .Como $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, vemos que $\frac{2}{3} > \frac{2}{3}$.

Estableciendo la relación de orden "mayor que" se tiene:

$\frac{2}{3} > \frac{2}{6}$ o $(2:3) > (2;6)$

$\frac{2}{3} > \frac{2}{9}$ o $(2:3) > (2:9)$

$\frac{2}{3} > \frac{2}{3\pi}$ o $(2:3) > (2 : 3\pi)$

En términos generales se puede enunciar lo siguiente:

Si K es un número real positivo mayor que uno y (a;b) representa una razón, la razón (a;bk) representa una razón menor que la razón (a:b). Por consiguiente:

Si $K > 1$, $\frac{a}{bK} < \frac{a}{b}$ ó $(a:bK) < (a:b)$

Ejercicios:

1. En la razón (7:4) o $\frac{7}{4}$ intente conmutar los dos términos. Qué sucede?. Explique.

Habrá algún caso en que (a:b) o $\frac{a}{b}$ sea igual a (b:a) o $\frac{b}{a}$?

2. Qué sucede si:

a. El antecedente y el consecuente de una razón se dividen por un mismo número real, diferente de cero?. Explique. Dé ejemplos. Qué conclusión se puede sacar?.

b. El antecedente de una razón se divide por un número real mayor que uno. Explique. De ejemplos. Concluya.

c. El consecuente de una razón se divide por un número real mayor que uno. De ejemplos. Explique. Concluya.

d. El antecedente y el consecuente de una razón se multiplican por un mismo número real K entre cero y uno $(0 < K < 1)$. Explique. De ejemplos. Qué conclusión se puede dar?.

e. El antecedente de una razón se multiplica por un número real K entre cero y uno $(0 < K < 1)$. Explique. De ejemplos.

Qué conclusión se puede dar?.

f. El consecuente de una razón se multiplica por un número real K entre cero y uno $(0 < K < 1)$. Explique. De ejemplos. Concluya.

3. Hay similitud entre las tres propiedades explicadas antes de los ejercicios 2 ?. Explique. Qué conclusión se puede dar?.

4. Hallar la razón aritmética y la razón geométrica a cada una de las siguientes parejas de números:

a. 24 y 12

b. 48 y 8

c. 481 y 13

d. $\frac{11}{12}$ y $\frac{5}{6}$

e. $\frac{112}{18}$ y $\frac{14}{6}$

5. Hallar la razón aritmética y geométrica entre las edades de dos jóvenes de 15 y 21 años.

6. Halle tres pares de números cuya razón geométrica sea $\frac{2}{5}$ en cada caso.

7. Dos números entre sí son como 2 es a 17. Si el número menor es 14. Cuál es el mayor?.

8. La razón de la edad de Eduardo a la de Carlos es (5:6). Si Eduardo tiene 40 años siendo ésta la edad menor, qué edad tiene Carlos?.

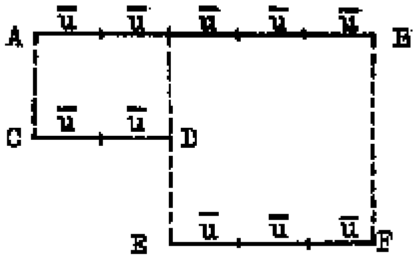
9. Cuál es la razón que existe entre el número de alumnos y de profesores en el colegio?.

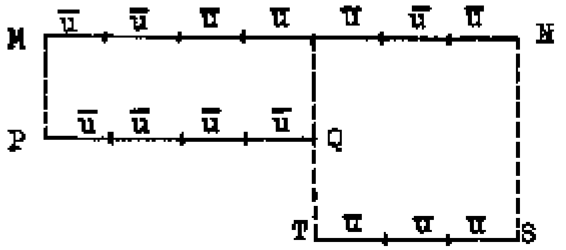
10. Cuál es la razón que existe entre el número de alumnos de su curso y sus correspondientes profesores?.

2.5 PROPORCIONES ARITMETICAS Y EQUIDIFERENCIA

Consideremos los pares de segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ y sobre ellos el segmento unidad $\overline{u}$, tal que:

$\overline{AB} = 5\,\overline{u}$, $\overline{CD} = 2\,\overline{u}$ y $\overline{MN} = 7\,\overline{u}$, $\overline{PQ} = 4\,\overline{u}$





¿Cuál será la diferencia entre estos pares de segmentos?.

Se puede observar que la razón aritmética entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es:

$$\overline{AB} \ominus \overline{CD} = \overline{EF} \quad \text{o sea}$$

$$5\overline{u} \ominus 2\overline{u} = (5 - 2)\,\overline{u} = 3\overline{u}$$

$$\text{donde} \quad \overline{EF} = 3\overline{u}$$

y la razón aritmética entre $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ es:

$$\overline{MN} \ominus \overline{PQ} = \overline{TS} \quad \text{o sea}$$

$$7\overline{u} \ominus 4\overline{u} = (7 - 4)\,\overline{u} = 3\overline{u}$$

$$\text{donde} \quad \overline{TS} = 3\overline{u}$$

Como $\overline{EF}$ y $\overline{TS}$ son iguales a $3\overline{u}$ y además $\overline{EF}$ y $\overline{TS}$ son las razones entre $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ respectivamente, entonces:

$$\overline{AB} \ominus \overline{CD} = \overline{MN} \ominus \overline{PQ}$$

La igualdad de estas dos razones aritméticas indicadas se llama proporción aritmética.

Una proporción aritmética es pues la igualdad de dos razones aritméticas. Dos razones aritméticas iguales se llaman equidiferentes y por eso podemos decir también que una proporción aritmética expresa una equidiferencia o que las parejas $(\overline{AB}, \overline{CD})$ y $(\overline{MN}, \overline{PQ})$ son equidiferentes.

Los elementos de una proporción aritmética se llaman así:

El primero y el cuarto se denominan extremos y el segundo y el tercero se denominan medios.

En las parejas equidiferentes:

$$(\overline{AB}\ ,\ \overline{CD}) \ \text{y}\ (\overline{MN}\ ,\ \overline{PQ})\ ,$$

$$\overline{AB} \ominus \overline{CD} = \overline{MN} \ominus \overline{PQ}$$

medios

extremos

$\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$ son los extremos, $\overline{CD}$ y $\overline{MN}$ son los medios.

Nótese que $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ son los antecedentes, $\overline{CD}$ y $\overline{PQ}$ son los consecuentes.

Cuando una proporción aritmética tiene sus medios diferentes es llamada discreta y si son iguales, continua.

Ejemplos:

Si $b \neq 0$, (a,b) y (c,d) es una proporción aritmética discreta.

En cambio, (e,m) y (m, e') es una proporción aritmética continua pues los medios son iguales. La proporción aritmética continua lleva a la progresión aritmética:

$$(e,m,e')$$

Recapitulemos:

Establecer una proporción aritmética como:

$$\overline{AB} \ominus \overline{CD} = \overline{MN} \ominus \overline{PQ} \quad \text{(entre segmentos)}$$

$$\text{ó } 5 - 2 = 7 - 4 \quad \text{(entre números)}$$

es lo mismo que afirmar que las parejas de segmentos : $(\overline{AB}, \overline{CD})$ y $(\overline{MN}, \overline{PQ})$ son equidiferentes o que las parejas de números $(5,2)$ y $(7,4)$ son equidiferentes. (1).

Esto tiene la ventaja de que aunque no se puede efectuar la resta segmentaria o numérica, sí se puede expresar la equidiferencia por medio de la proporción aritmética.

Como $\overline{CD} < \overline{AB}$; $\overline{CD} \ominus \overline{AB}$ no puede efectuarse, pero sí sabemos que $\overline{CD} \ominus \overline{AB} = \overline{PQ} \ominus \overline{MN}$, o sea que las parejas $(\overline{CD}, \overline{AB})$ y $(\overline{PQ}, \overline{MN})$ son equidiferentes.

Tampoco sabemos efectuar $\sqrt{2} - \pi$, pero sí sabemos que : $(\pi + \sqrt{2}) - 2\pi = \sqrt{2} - \pi$, o sea que las parejas

---

(1). "Equidiferentes": Tienen la misma diferencia.

$(\pi + \sqrt{2}\ ;\ 2\pi)$ y $(\sqrt{2}, \pi)$ son equidiferentes.

A través de la equidiferencia se construyen "naturalmente" los enteros, fraccionarios y reales negativos.

Propiedad fundamental de las proporciones aritméticas.

Sin necesidad de efectuar restas se puede verificar la equidiferencia de dos parejas (e,m) y (m',e') sumando los dos elementos extremos y los dos medios;
(e,m) es equidiferente con (m',e') sí y solo sí :

$$e + e' = m + m'$$

En los ejemplos dados:

$(\overline{CD}, \overline{AB})$ y $(\overline{PQ}, \overline{MN})$ son equidiferentes pues

$$\overline{CD} \oplus \overline{MN} = \overline{AB} \oplus \overline{PQ} = 9\overline{u}.$$

$(\pi - \sqrt{2},\ 2\pi)$ y $(\sqrt{2}, \pi)$ son equidiferentes pues $\pi + \sqrt{2} + \pi = 2\pi + \sqrt{2}$.

Ejercicios:

1. Si (a,m) y (m,b) es una equidiferencia, m es la media diferencial o media aritmética entre a y b. Investigue qué es una media diferencial o media aritmética. Explique. Concluya.

2. Investigue cómo se halla el término desconocido en una equidiferencia. De ejemplos. Explique. Qué conclusión puede sacar?.

3. Hallar el término desconocido en ;

   a. $X - 2 = 7 - 6$
   b. $7 - X = 4 - 9$
   c. $15 - X = X - 8$
   d. $7 - 15 = 6 - X$
   e. $8 - m = 2 - 9$
   f. $Y - 5 = 4 - 7$

g. $r - 8 = 8 - 11$

h. $k - 9 = 1 - 3$

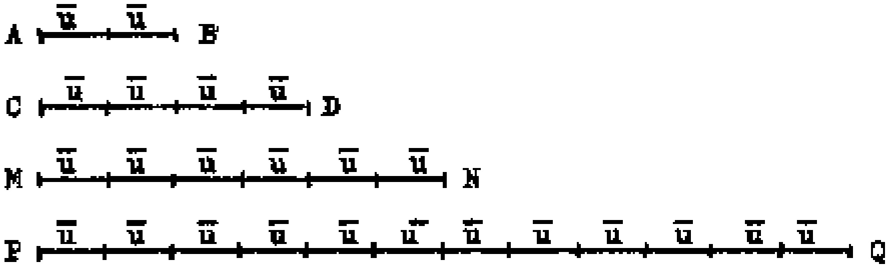
i. $12 - \ell = 3 - 1$

j. $13,5 - \frac{3}{2} = x - \frac{1}{5}$

2.6 PROPORCIONES GEOMETRICAS Y EQUICOCIENCIA

Ahora consideremos los siguientes segmentos paralelos entre sí, y en ellos el segmento unitario $\overline{u}$, tal que:

$\overline{AB} = 2\overline{u}$; $\overline{CD} = 4\overline{u}$; $\overline{MN} = 6\overline{u}$; $\overline{PQ} = 12\overline{u}$



La razón geométrica entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es $(\overline{AB} : \overline{CD}) = (2\overline{u} : 4\overline{u}) = (2 : 4)$.

Considerando solamente los números reales:

$(2 : 4) = (1 \text{ X } 2 : 2 \text{ X } 2) = (1 : 2)$

Observemos que: $(\overline{AB} : \overline{CD}) = (1 : 2)$

Ahora, la razón entre los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ es: $(\overline{MN} : \overline{PQ}) = (6\overline{u} : 12\overline{u}) = (6:12) = (1 \text{ X}6:2\text{X}6) =$

$(1 : 2)$.

Obsérvese que:

$(\overline{MN} : \overline{PQ}) = (1 : 2)$

Como $(\overline{AB} : \overline{CD}) = (1:2)$ y $(\overline{MN} : \overline{PQ}) = (1 : 2)$, entonces: $(\overline{AB} : \overline{CD}) = (\overline{MN} : \overline{PQ})$ por ser ambas razones iguales a la razón:

$(1 : 2)$.

La igualdad de dos razones geométricas indicadas, como las anteriores se llama <u>proporción geométrica</u>.

Luego en general podemos decir que proporción geométrica es la igualdad de dos razones geométricas.

Dos razones geométricas iguales se llaman *equicocientes*, y por eso podemos decir también que una proporción geométrica expresa una equicociencia, o que las parejas $(\overline{AB}, \overline{CD})$ y $(\overline{MN}, \overline{PQ})$ son equicocientes.

Las proporciones geométricas se pueden notar en forma de fracciones. Por ejemplo:

$(a : b) = (c : d)$ se puede escribir como:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Considerando las parejas de números o segmentos $(a:b)$ y $(c : d)$, se puede escribir también :

$a:b :: c:d$ lo que se lee: "*a* es a *b* como *c* es a *d*"

Sea $(a : b) = (c : d)$ una proporción geomética indicada; los términos como a y d se llaman *externos* y los términos como b y c se llaman *medios*. Así,

en.......... $(a : b) = (c : d)$

o en................ $\underbrace{a : \underbrace{b :: c}_{\text{medios}} : d}_{\text{extremos}}$

a y d son los extremos; b y c son los medios.

Si una proporción geométrica tiene todos sus elementos diferentes, se llama *discreta*, y si sus medios son iguales recibe el nombre de *continua*.

Ejemplos:

1. $9 : 3 :: 3 : 1$ es una proporción geométrica *continua*.

La proporción geométrica continua lleva a la <u>progresión</u> geométrica (e,m,e').

2. 5 : 2 :: 10 : 4 es una proporción geométrica discreta.

Recapitulemos:

Establecer una proporción geométrica como:

$(\overline{AB} : \overline{CD}) = (\overline{MN} : \overline{PQ})$

o $\overline{AB} : \overline{CD} :: \overline{MN} : \overline{PQ}$ entre segmentos,

o 2 : 4 = 1 : 2

2 : 4 :: 1 : 2 entre números,

Es lo mismo que afirmar que las parejas de segmentos $(\overline{AB}, \overline{CD})$ y $(\overline{MN}, \overline{PQ})$ son <u>equicocientes</u> o que las parejas de números (2 , 4) y (1, 2) son <u>equicocientes</u>.(1)

Esto tiene la ventaja de que aunque no se pueda efectuar la división, sí se puede expresar la equicociencia por medio de la proporción geométrica.

No sabemos qué es $(\overline{AB} \div \overline{CD})$ pero sí sabemos que $(\overline{AB} : \overline{CD}) = (1 : 2)$, o sea que las parejas: $(\overline{AB}, \overline{CD})$ y (1 , 2) son equicocientes.

Tampoco sabemos efectuar la división $2 \div \pi$, pero sí sabemos que $(2 : \pi) = (4 : 2\pi)$, o sea que las parejas $(2, \pi)$ y $(4, 2\pi)$ son equicocientes.

A través de la equicociencia de números naturales se construyen "naturalmente" los fraccionarios.

<u>Propiedad fundamental de las proporciones geométricas.</u>

Sin necesidad de efectuar divisiones, se puede verifi-

---

(1). "Equicocientes" : Tienen el mismo cociente o razón.

car la equicociencia de dos parejas (e,m) y (m',e') multiplicando los dos elementos extremos y los dos medios.

(e,m) es equicociente con (m', e') sí y solo sí $e \times e' = m \times m'$.

Esta propiedad se llama <u>propiedad de los extremos o propiedad fundamental</u> .

En los ejemplos dados:

(1 , 2) y ($\overline{AB}$, $\overline{CD}$) son equicocientes, pues:

$1 \times \overline{CD} = 2 \times \overline{AB}$ y (2, π) y (4,2π) son equicocientes, pues $2 \times 2\pi = \pi \times 4 = 4\pi$.

Media Proporcional.

Es una proporción continua como 1 : 3 :: 3 : 9, el término medio repetido se llama <u>media proporcional</u> entre los extremos. También se llama <u>media geométrica.</u>

Ejemplos: En las proporciones contínuas:

1. 1 : 5 :: 5 : 25, 5 es la media proporcional.
2. 1 : 4 :: 4 : 16, 4 es la media proporcional.
3. 1 : 6 :: 6 : 36, 6 es la media proporcional.
4. 1 : 7 :: 7 : 49, 7 es la media proporcional.
5. 1 : 8 :: 8 : 64, 8 es la media proporcional.

Si el primer término es uno, la media proporcional o geométrica es precisamente la raíz cuadrada del último término de la proporción geométrica.

Tercera Proporcional.

Es una proporción continua como 1 : 6 :: 6 : 36, el último extremo o sea el tercer número diferente, como el 36, se llama <u>tercera proporcional</u> con respecto al primer extremo y al medio repetido.

Ejemplos:

En las proporciones continuas:

1. 1 : 9 :: 9 : 81, 81 es la tercera proporcional.

2. 1 : 10 :: 10 : 100, 100 es la tercera proporcional.

3. 1 : 11 :: 11 : 121, 121 es la tercera proporcional.

4. 9 : 3 :: 3 : 1, 1 es la tercera proporcional.

5. 16 : 4 :: 4 : 1, 4 es la tercera proporcional.

<u>Cuarta proporcional</u>.

En una proporción discreta indicada, el último extremo o sea el cuarto elemento, es llamado <u>cuarta proporcional</u> con respecto a los otros tres.

Ejemplos:

En las proporciones discretas:

1. 3:2::6:4, 4 es la cuarta proporcional con respecto a 3, 2 y 6.

2. 10 : 4 :: 5 : 2, 2 es la cuarta proporcional con respecto a 10, 4 y 5.

3. 2 : 3 :: 8 : 12, 12 es la cuarta proporcional con respecto a 2, 3 y 8.

4. 12 : 15 :: 4 : 5, 5 es la cuarta proporcional con respecto a 12, 15 y 4.

5. 6 : 2 :: 18 : 6 , 6 es la cuarta proporcional con respecto a 6, 2 y 18.

2.7 UTILIZACION DE LAS PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

La propiedad de los extremos o propiedad fundamental es la base de los cálculos en los que aparecen proporciones geométricas.

Recordemos el enunciado de esta propiedad:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0, \forall c \in \mathbb{R}, \quad \forall d \in \mathbb{R}, \quad d \neq 0,$$

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción geométrica, entonces:

$$a . d = b . c$$

Basta recordar que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

2.7.1 Primera aplicación.

Cómo se halla el valor de un extremo o de un medio?

Utilicemos la propiedad de los extremos para encontrar el término buscado.

Ejemplo 1.

Sea $\frac{a}{2} = \frac{9}{6}$ una proporción geométrica, entonces:

$a \times 6 = 2 \times 9$ (Por propiedad de los extremos).

por consiguiente: $a = \frac{2 \times 9}{6}$ (dividiendo miembro a miembro por 6 y simplificando).

Luego : $a = 3$

Por tanto el término desconocido en la proporción es 3 y la proporción queda así :

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$$

Ejemplo 2.

Hallar el término desconocido en las siguientes proporciones:

a. $\frac{4}{5} = \frac{60}{m}$

b. $\frac{x}{4} = \frac{6}{8}$

c. $\frac{10^2}{y} = \frac{10^3}{10}$

d. $\frac{7}{15} = \frac{x}{30}$

Solución:

a. $\frac{4}{5} = \frac{60}{m} \Longrightarrow 4.m = 5.60 \Longrightarrow m = \frac{5.60}{4} \Longrightarrow m = 75$

b. $\frac{x}{4} = \frac{6}{8} \Longrightarrow x = \frac{4.6}{8} \Longrightarrow x = 3$

c. $\frac{10^2}{y} = \frac{10^3}{10} \Longrightarrow y = \frac{10^2.10}{10^3} \Longrightarrow y = \frac{100 \times 10}{1.000} \Longrightarrow$

$$y = 1$$

d. $\frac{7}{15} = \frac{x}{30} \Longrightarrow x = \frac{7.30}{15} \Longrightarrow x = 14$

En otras palabras:

En toda proporción geométrica, un extremo desconocido es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo, y un medio desconocido es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.

Generalización:

$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ b \neq 0\ ,\ \forall c \in \mathbb{R},\ \forall d \in \mathbb{R},\ d \neq 0$; si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción geométrica, entonces:

$$a = \frac{b.c}{d};\ d = \frac{b.c}{a}\ ;\ b = \frac{a.d}{c}\ ;\ c = \frac{a.d}{b}\ .$$

Ejemplo 3.

Determinar:

a. La cuarta proporcional de 5, 8 y 12

b. La tercera proporcional de 5 y 8

c. La media proporcional de 2 y 8

d. La media proporcional de 5 y 80

Solución:

a. $\frac{5}{8} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{8.12}{5} \Longrightarrow x = \frac{96}{5} \Rightarrow x = 19\frac{1}{5}$

b. $\frac{5}{8} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8.8}{5} \Longrightarrow x = \frac{64}{5} \Longrightarrow x = 12\ \frac{4}{5}$

c. $\frac{2}{x} = \frac{x}{8} \Rightarrow x.x = 2.8 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{16} \Longrightarrow x = 4.$

d. $\frac{5}{x} = \frac{x}{80} \Rightarrow x.x = 5.80 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{400} \Longrightarrow$

$$x = 2\sqrt{100} = 20$$

2.7.2 Segunda Aplicación.

2.7.2.1 Permutación de los extremos.

Ejemplo:

La proporción $3 : 2 :: 6 : 4$ puede notarse de las siguietes maneras:

1. $3: 2 :: 6 : 4 \ldots\ldots\ \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \Longrightarrow 3.4 = 2.6$

2. $4 : 2 :: 6 : 3 \ldots\ldots \frac{4}{2} = \frac{6}{3} \Longrightarrow 4.3 = 2.6$

Intuitivamente basta recordar que en una proporción pueden permutarse los extremos.

Generalissación:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \forall c \in \mathbb{R}, \forall d \in \mathbb{R}, d \neq 0$$

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

2.7.2.2 Permutación de los medios.

Ejemplo:

La proporción $4 : 8 :: 6 : 12$ puede notarse de las siguientes maneras:

1. $4 : 8 :: 6 : 12 \ldots\ldots \frac{4}{8} = \frac{6}{12} \Longrightarrow 4.12 = 8.6$

2. $4 : 6 :: 8 : 12 \ldots\ldots \frac{4}{6} = \frac{8}{12} \Longrightarrow 4.12 = 6.8$

Intuitivamente basta recordar que en una proporción pueden permutarse los medios.

Generalización:

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\quad b \neq 0,\ \forall c \in \mathbb{R}\ \forall d \in \mathbb{R},\quad d \neq 0$$

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

2.7.2.3 Permutación de medios y extremos.

Ejemplo 1.

- $3 : 6 :: 9 : 18 \ldots\ldots \frac{3}{6} = \frac{9}{18} \Longrightarrow 3.18 = 6.9$
- $18 : 9 :: 6 : 3 \ldots\ldots \frac{18}{9} = \frac{6}{3} \Longrightarrow 18.3 = 9.6$

Ejemplo 2.

La proporción $2 : 4 :: 8 : 16$ puede expresarse de las siguientes maneras:

- $2 : 4 :: 8 : 16 \ldots\ldots \frac{2}{4} = \frac{8}{16} \Longrightarrow 2.16 = 4.8$
- $16 : 8 :: 4 : 2 \ldots\ldots \frac{16}{8} = \frac{4}{2} \Longrightarrow 16.2 = 8.4$

Intuitivamente basta recordar que en una proporción pueden permutarse a la vez los medios y los extremos.

Generalizando:

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\quad b \neq 0,\ \forall c \in \mathbb{R},\ \forall d \in \mathbb{R},\quad d \neq 0$$

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

Ejercicios.

1. Hallar el término desconocido en las siguientes proporciones:

a. $\frac{1}{4} = \frac{4}{X}$ b. $\frac{3}{2} = \frac{6}{X}$

c. $\frac{2}{y} = \frac{8}{12}$ d $\frac{x}{4} = \frac{5}{2}$

e. $\frac{x}{15} = \frac{4}{5}$ f. $\frac{6}{2} = \frac{x}{6}$

g. $\frac{5}{4} = \frac{K}{60}$ h. $\frac{Y}{15} = \frac{14}{30}$

i. $\frac{3}{2} = \frac{9}{Y}$ j. $\frac{10}{5} = \frac{6}{Y}$

k. $\frac{14}{7} = \frac{m}{2}$ l. $\frac{k}{3} = \frac{8}{4}$

m. $\frac{8}{21} = \frac{2}{6}$ n. $\frac{6}{\ell} = \frac{5}{15}$

o. $\frac{2}{6} = \frac{Y}{24}$

CAPITULO 3

REGLA DE TRES

3.1 COMPARACION DE MAGNITUDES Y PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

El objetivo de esta unidad es desarrollar en los alumnos la capacidad de investigación y percepción crítica de los procesos en la naturaleza y la sociedad.

Para comparar magnitudes, lo primero que debe aprender el alumno es a establecer correspondencias o correlaciones entre magnitudes.

3.1.1 Correlación directa.

Establezcamos las siguientes correlaciones entre magnitudes.

1. El número de metros de una tela y su valor.

Figura 1

No podemos afirmar que sea esta una proporcionalidad directa, hasta que sepamos que las piezas de tela que se comparan son del mismo ancho.

2. El número de baldosas para enchapar el piso de un cuarto de forma cuadrada depende de la longitud de las paredes, pero estas dos magnitudes no están en proporcio-

nalidad directa, puesto que el área que se debe enchapar aumenta como el cuadrado de la longitud de las paredes.

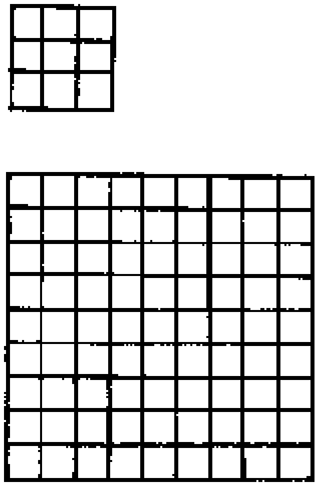


Figura 2

3. La cantidad de agua que hay en un frasco depende de la altura del frasco, pero no podemos afirmar que exista acá una proporcionalidad directa, pues la sección del frasco puede ser diferente a distintas alturas, como lo ilustra la siguiente figura:

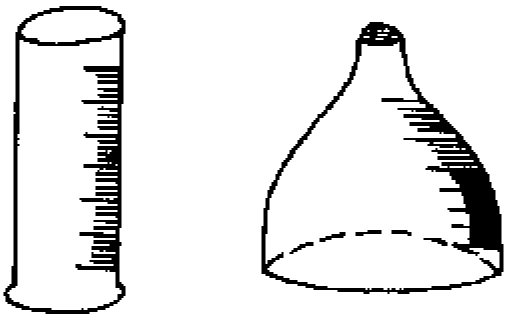
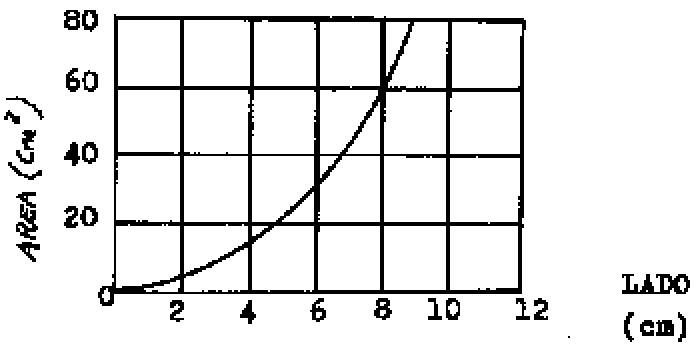


Figura 3

4. El volumen depende de la cantidad de materia de los cuerpos, pero no podemos afirmar que exista acá una proporcionalidad directa pues no es esta una propiedad común que permanece constante; pues sabemos que al variar la temperatura de un cuerpo su volumen cambia y sin embargo la cantidad de materia que lo constituye permanece aproximadamente constante.

5. El área de un cuadrado depende de la longitud del lado pero no hay una proporcionalidad directa entre estas dos magnitudes. Veámoslo mediante una gráfica:



Gráfica 1

6. Como $\pi = \frac{\overline{C}}{\overline{D}}$, $\Rightarrow$ $\overline{C} = \pi \overline{D}$, y como $\overline{D} = 2r$, podemos calcular la longitud $\overline{C}$ de una circunferencia rectificada de radio r, mediante la relación : $\overline{C} = 2\pi r$ donde $\pi = 3.14$ aproximadamente.

Calculemos la longitud $\overline{C}$ de la circunferencia para diferentes valores del radio mediante una table así;

r (cm)	$\overline{C}$ (cm)	$\overline{C}/_r$
1,0	6,28	6,28
2,0	12,56	6,28
3,0	18,8	6,28
4,0	25,1	6,28
5,0	31,4	6,28
6,0	37,7	6,28
7,0	44,0	6,28
8,0	50,2	6,28
9,0	56,5	6,28
10,0	62,8	6,28

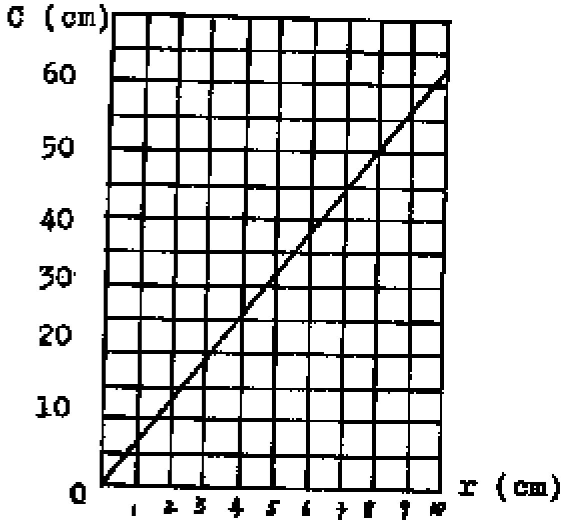
Tabla 1

Observamos que la razón $\frac{\overline{C}}{r}$ para cualquier circunferencia es constante. (1)

Veámoslo gráficamente;

---

(1). Decimos que la longitud de la circunferencia es directamente proporcional al radio y lo notamos así: $\overline{C} \propto r$. El símbolo $\propto$ indica "es proporcional".



Gráfica 2

$\overline{C}$ en función de r

$$\overline{C} = f(r)$$

Una cosa es la correlación directa y otra la proporcionalidad directa.

La correlación directa. Es una función creciente, es decir a medida que una magnitud aumenta la otra también aumenta.

La proporcionalidad directa. Es una función creciente que aumenta linealmente, es decir dos magnitudes son directamente proporcionales cuando la razón de sus medidas es constante.

Aunque en algunos ejemplos vistos no podemos afirmar que se dé una proporcionalidad directa; sí es posible afirmar que se da una correlación directa. A medida que una magnitud aumenta, la otra también aumenta.

Es importante anotar que en los procesos naturales y artificiales en los que se da una correlación directa, solo en casos especiales se da una proporcionalidad directa.

En el ejemplo 1 si el ancho de la tela es constante, entre la longitud y el valor se da la correlación directa y también la proporcionalidad directa.

En el ejemplo 2 se da solamente una correlación directa.

En el ejemplo 3 si la sección del frasco es constante, se da tanto la correlación directa como la proporcionalidad directa.

En el ejemplo 4 se da solamente la correlación directa.

En el ejemplo 5 se da solamente la correlación directa.

En el ejemplo 6 se dan ambas propiedades.

Podemos concluír que la proporcionalidad directa es un caso particular de la correlación directa.

Ejemplo:

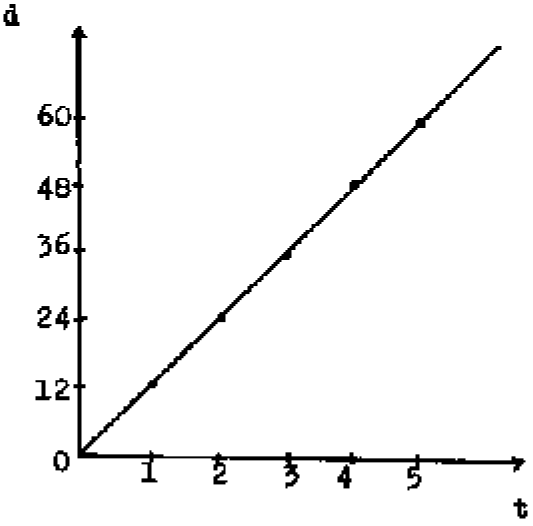
Una persona avanza a una velocidad de 12 kilómetros por hora. Existe una correlación entre el tiempo transcurrido desde el momento de la partida y la distancia recorrida. Esta correlación puede establecerse mediante la siguiente tabla:

t (Hora)	d(Kilómetros)
1	12
2	24
3	36
4	48
5	60
⋮	⋮

Tabla 2

Observamos que hay una correlación directa entre estas dos magnitudes. Se trata de una relación funcional, puesto que a cada valor del tiempo le corresponde un único valor de la distancia; como a medida que aumenta el tiempo, aumenta también la distancia, decimos que se trata de una relación funcional creciente.

Veámoslo en la siguiente gráfica cartesiana:



Gráfica 3

Notemos que $d = f(t)$ y que su gráfica cartesiana es una línea recta. Esta función es una función lineal, que como ya hemos dicho es creciente: Si $t_2 > t_1$, entonces $d_2 > d_1$.

Queda pues claro que sí hay una correlación directa entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida.

Establezcamos si hay también proporcionalidad directa.

Comparemos las razones entre las magnitudes respectivas

$$(d : t \text{ ó } \frac{d}{t}) ;$$

$$\frac{12}{1} = \frac{24}{2} = \frac{36}{3} = \frac{48}{4} = \frac{60}{5}$$

Observamos que la razón de estas magnitudes siempre es constante, o sea, si llamamos K a esa constante:

$$\frac{12}{1} = K \Longrightarrow 12 = K.\ 1$$

$$\frac{24}{2} = K \Longrightarrow 24 = K.\ 2$$

$$\frac{36}{3} = K \Longrightarrow 36 = K.\ 3$$

$$\frac{48}{4} = K \Longrightarrow 48 = K.\ 4$$

$$\frac{60}{5} = K \Longrightarrow 60 = K.\ 5$$

En general $\frac{d}{t}$ es una constante llamada constante de proporcionalidad, directa.

Existen pues varios tipos de relaciones funcionales, algunas de ellas crecientes y otras no. Las relaciones funcionales crecientes corresponden a la correlación directa.

La relación funcional creciente más sencilla es la proporcionalidad directa, que corresponde a la ecuación lineal :

$$d = K.\ t$$

En el ejemplo anterior, K es precisamente la velocidad, y en general podemos escribir:

$$v = \frac{d}{t} \quad , \text{ constante.}$$

Este tipo de igualdad entre magnitudes puede interpretarse también como una proporción; en el caso anterior, como la velocidad es constante:

$$\text{(Distancia recorrida en kilómetros)} =$$

$$\overbrace{\text{(Kilómetros por hora)}}^{\text{Constante}} \; \overbrace{\text{(horas de viaje)}}^{\text{variable}}$$

la ecuación $d = v \cdot t$, puede interpretarse así:

$$\frac{d_1}{t_1} = \frac{d_2}{t_2} = \frac{d_3}{t_3} = v \quad \text{(Constante).}$$

De donde:

$$\frac{d_1}{t_1} = \frac{d_2}{t_2} \quad \text{o también} \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{t_1}{t_2} \; .$$

3.1.2 Correlación inversa.

Establezcamos las siguientes correlaciones entre magnitudes:

1. Si de un recipiente vaciamos líquido a otro recipiente que está más abajo, observamos que a medida que aumenta el nivel del líquido en el recipiente de abajo, este disminuye en el recipiente de arriba. Podemos afirmar que esta es una correlación inversa entre magnitudes,

aunque no sea una proporcionalidad inversa.

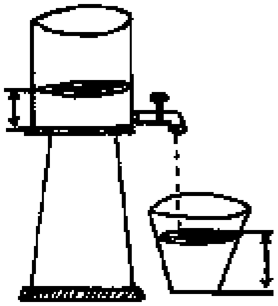


Figura 4

2. A medida que nos alejamos de una fogata, disminuye la intensidad de calor que sentimos en la cara o las manos, pero estas dos magnitudes: intensidad de la radiación calórica y distancia no son inversamente proporcionales. Sin embargo, sí hay una correlación inversa.

Hay una serie de correlaciones que no son ni directas ni inversas, y entre las que son inversas, hay muchas que no son proporcionalidades inversas.

Aunque en estos ejemplos no podemos afirmar que se de una proporcionalidad inversa, sí es posible afirmar que se da una correlación inversa: A medida que una magnitud aumenta, la otra disminuye. Es importante anotar que en los procesos naturales y artificiales en los que se da la correlación inversa, solo en casos especiales se da la proporcionalidad inversa, como lo veremos más adelante.

Podemos concluír que la proporcionalidad inversa es un caso particular de la correlación inversa.

3. Coloquemos un punto P en el interior de una

circunferencia y tracemos varias cuerdas que pasan por dicho punto. Vamos a buscar una relación entre los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ de las cuerdas.

Sea $a=\overline{AP}$ y $b = \overline{BP}$

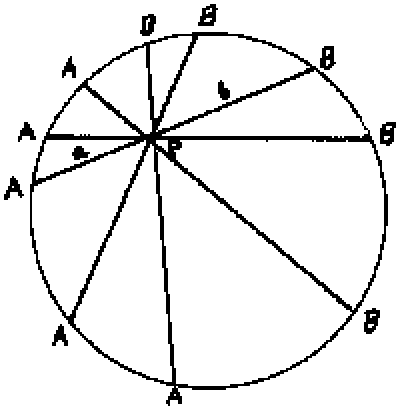
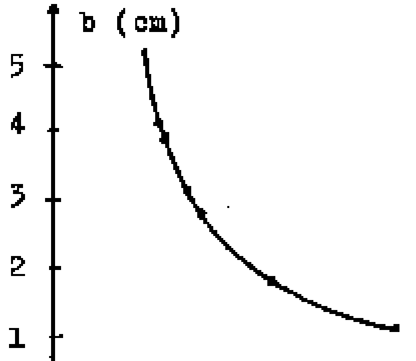


Figura 4

b (cm)	a (cm)
4.2	1.5
4.0	1.6
3.2	1.9
2.8	2.1
1.8	3.2

Tabla 3

Representemos gráficamente b en función de a según la tabla 3 y figura 4:

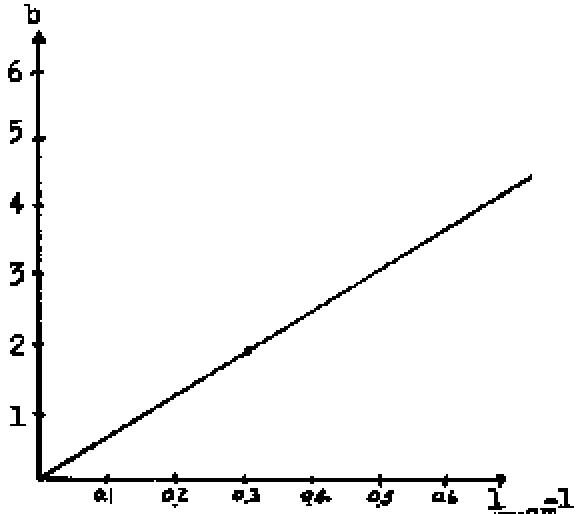


Gráfica 4

Puesto que "a" aumenta cuando "b" disminuye, veamos qué tipo de proporcionalidad obtenemos al relacionar b con el inverso de a.

b(cm)	$\frac{1}{a}$ (cm^{-1})	$b/(\frac{1}{a})$
4.2	0.66	6.3
4.0	0.62	6.3
3.2	0.52	6.3
2.8	0.47	6.3
1.8	0.31	6.3

Tabla 4



Gráfica 5

b en función de $\frac{1}{a}$

$$b = f\left(\frac{1}{a}\right).$$

La gráfica 5 nos indica que b es <u>directamente proporcional</u> a $\frac{1}{a}$, lo cual se puede expresar así:

$b \propto \frac{1}{a}$, lo que equivale a decir que las dos cantidades a y b, son inversamente proporcionales entre sí.

Lo anterior también puede escribirse: $b = k\left(\frac{1}{a}\right)$, en donde K es la constante de proporcionalidad.

Las necesidades de la producción y de la técnica han llevado al hombre a tener métodos más refinados de medir las variaciones y se han descubierto muchas leyes de variación.

4. Un móvil a una velocidad de 40 kilómetros por hora emplea 24 horas para hacer un recorrido de una distancia fija d. Qué sucede si se aumenta la velocidad?

Podemos establecer una correspondencia o correlación entre la velocidad y el tiempo transcurrido para recorrer la distancia d, mediante la siguiente tabla:

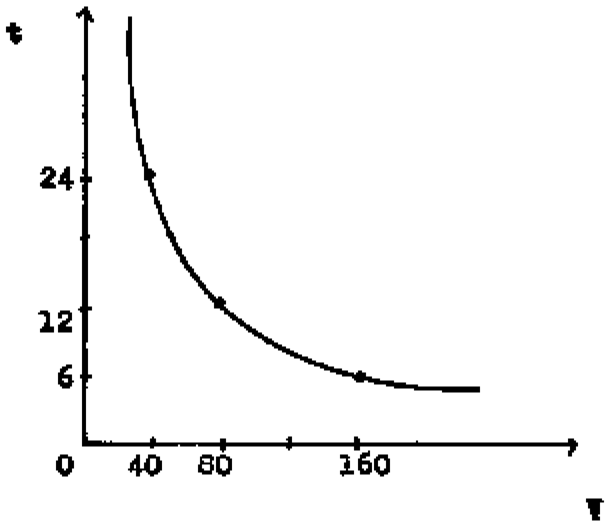
V (Km/hora)	t (horas)
40	24
80	12
160	6
⋮	⋮
V_n	t_n

Tabla 5

Observamos que hay una <u>correlación inversa</u>, entre estas dos magnitudes. Se trata de una <u>relación funcional</u> puesto que a cada valor de la velocidad le corresponde un único valor del tiempo.

Como a medida que aumenta la velocidad, disminuye el tiempo necesario para recorrer la misma distancia d, se trata de una relación funcional <u>decreciente</u>.

Veámoslo en la siguiente gráfica cartesiana:



Gráfica 6

Notemos que $t = f(V)$; esta función no es lineal, pero sí es una función decreciente. Si $V_2 > V_1$, entonces $t_2 < t_1$.

Queda pues claro que sí hay una correlación inversa entre la velocidad y el tiempo.

Establescamos si hay proporcionalidad inversa.

Comparemos los productos de las magnitudes respectivas, $(V.\ t)$, así :

$$40 \times 24 = 80 \times 12 = 160 \times 6 = 960$$

Observamos que el producto de estas magnitudes siempre es constante, o sea:

$$40 \times 24 = K \Longrightarrow 24 = \frac{K}{40}$$

$$80 \times 12 = K \Longrightarrow 12 = \frac{K}{80}$$

$$160 \times 6 = K \Longrightarrow 6 = \frac{K}{160}$$

En general $V.\ t$ es una constante llamada *constante proporcionalidad*. A este tipo de proporcionalidad se le llama *proporcionalidad inversa*.

Existen pues varios tipos de relaciones funcionales, algunas de ellas *decrecientes* y otras no. Las relaciones funcionales *decrecientes* corresponden a la *correlación inversa*.

La relación funcional decreciente más sencilla es la proporcionalidad inversa, que corresponde a la ecuación:

$$V = \frac{k}{t}$$

En el ejemplo anterior, k es precisamente la distancia d, y en general podemos escribir:

$$V.\ t = d, \text{ Constante.}$$

Este tipo de igualdad entre magnitudes puede interpretarse también como una proporción; en el caso anterior, como la distancia es constante,

$$t = \frac{\overbrace{k \text{ (Distancia en Kilómetros)}}^{\text{Constante}}}{\underbrace{V \text{ (Kilómetros por hora)}}_{\text{Variable}}},$$

Puede interpretarse así:

$$V_1 \ t_1 = V_2 \ t_2 = V_3 \ t_3 = d \text{ (Constante)}$$

De donde:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{t_2}{t_1} \quad \text{o también} \ : \ \frac{V_1}{t_2} = \frac{V_2}{t_1}$$

3.2 PRESENTACION FORMAL DE LA REGLA DE TRES

3.2.1 Regla de tres simple.

Ejemplo 1.

Si 6 hombres pavimentan 80 metros de una carretera del mismo ancho, en un día; ¿Cuántos metros de carretera pavimentarán 15 hombres en el mismo día?

Analicemos el problema de la siguiente manera:

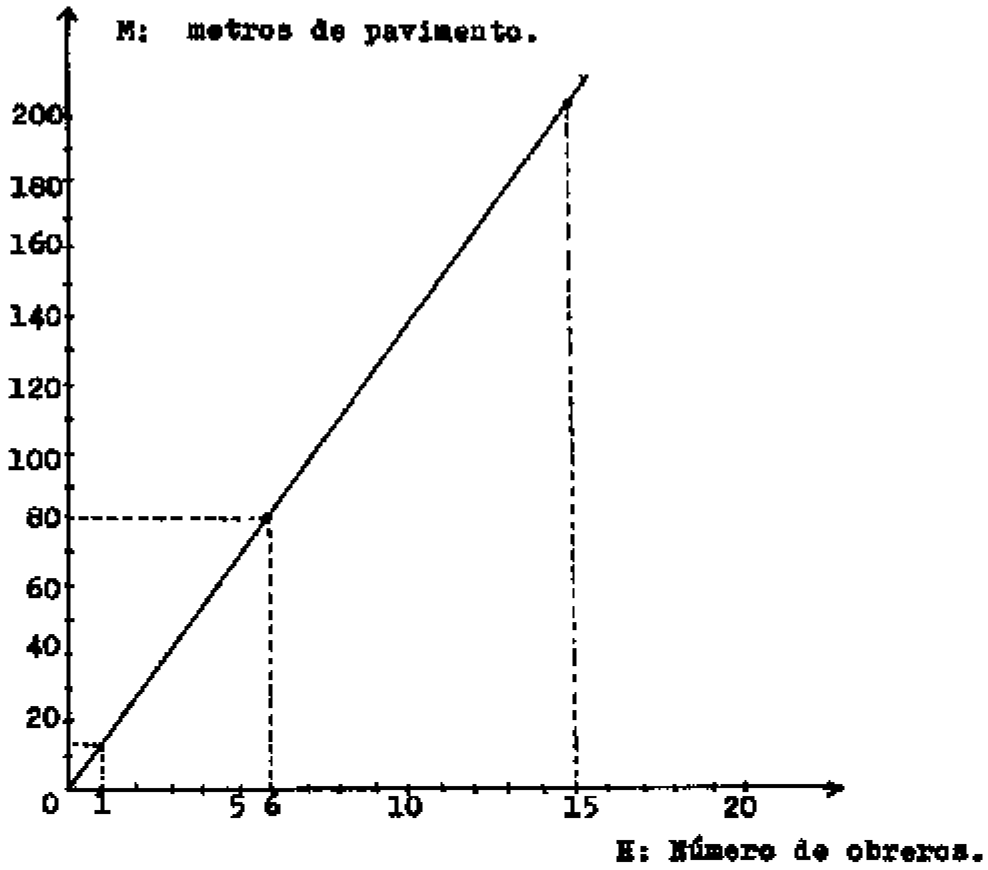
H (Hombres)	M (Metros de pavimento)
6	80
15	?

La anterior es una correlación directa, puesto que a medida que aumenta el número de obreros, aumenta también el número de metros de pavimento. Como esto sucede, se tiene una relación funcional creciente. ¿Aumenta linealmente?. En primer lugar, se supone que el ancho de carretera es constante. Si 6 hombres pavimentan 80 metros en un día, podemos predecir aproximadamente que 15 hombres pavimentarán un poco más del doble de 80 metros y menos del triple de 80 metros. En cualquier caso, la longitud de carretera pavimentada (80 metros) va a aumentarse.

Podemos suponer que los obreros adicionales no estorban a los demás ni se estorban mutuamente, o sea que simplemente la capacidad de trabajo de la cuadrilla aumenta proporcionalmente al número de obreros por lo menos al aumentar de 6 a 15.

Se da pues la proporcionalidad directa dentro de los límites del problema.

Esto es equivalente a suponer que el número de metros de pavimento aumenta linealmente con el número de obreros:



Gráfica 7

Obsérvese que esta descripción de la situación real es apenas aproximada, y está limitada a situaciones muy simples. Pero estas simplificaciones son muy útiles para la predicción, la planificación y el control de actividades técnicas.

Según lo visto en la sección 3.1 basta conocer la constante de proporcionalidad para encontrar $M = K. \; 15$ o también basta utilizar directamente la proporción:

$$\frac{M_1}{H_1} = \frac{M_2}{H_2} \quad ó \quad \frac{M_1}{M_2} = \frac{H_1}{H_2}$$ que encontramos

en 3.1.1 .

3.2.1.1 Solucionemos este problema por el método de las proporciones así:

$$\frac{M_1}{H_1} = \frac{M_2}{H_2} \text{ que equivale a } \frac{80}{6} = \frac{M_2}{15}$$

Apliquemos la propiedad fundamental de las proporciones para hallar M_2 así:

$$6 \times M_2 = 15 \times 80 \Longrightarrow M_2 = \frac{15 \times 80}{6} = \frac{1.200}{6} = 200$$

3.2.1.2 Solucionemos ahora el mismo problema por el método de encontrar la constante de proporcionalidad, llamado método de "reducción a la unidad".

Conozcamos la constante de proporcionalidad K para encontrar $M_2 = K. H_2$, así:

$$\frac{M_1}{H_1} = \frac{M_2}{H_2} \longrightarrow M_2 = \boxed{\frac{M_1}{H_1}} x H_2$$, en donde $\frac{M_1}{H_1}$ es la

constante de proporcionalidad dimensional $\frac{80}{6}$ metros por obrero, que nos da la constante K.

Luego: $$M_2 = \boxed{\frac{80}{6}} x 15 = \frac{80 X 15}{6} = \frac{1.200}{6} = 200$$

Nótese que la constante $K = \frac{M_1}{H_1}$ metros por obrero nos indica el rendimiento por unidad, y por esto el método seguido se llama de "reducción a la unidad" .

3.2.1.3 Notemos que exactamente la misma disposición de los datos y el mismo análisis empleados en 3.2.1.1 y 3.2.1.2, que son dos métodos tradicionales, nos permiten desarrollar otro método para solucionar el mismo problema, así:

como $M_2 > M_1 = 80$, sabemos que el operador que debemos obtener tiene que ser un amplificador, para agrandar la longitud de carretera pavimentada, es decir los 80 metros; este operador es otra constante de proporcionalidad que sin dimensión $\frac{H_2}{H_1}$ que equivale a $\frac{15}{6}$; esta es precisamente una fracción impropia que agranda o amplía una magnitud; veámoslo de la siguiente manera:

$$\frac{M_1}{H_1} = \frac{M_2}{H_2} \longrightarrow M_2 = \boxed{\frac{H_2}{H_1}} x \quad M_1$$

$$M_2 = q \cdot M_1 \Longrightarrow M_2 = \boxed{\frac{15}{6}} \times 80 = \frac{15 \times 80}{6} = \frac{1.200}{6} = 200.$$

Luego 15 obreros pavimentarán 200 metros de carretera en un día.

Estudiemos la diferencia entre el último método (método de los operadores fraccionarios) y el segundo método (método de reducción a la unidad).

En el segundo método tenemos una relación funcional expresada por la ecuación :

$M_2 = K \cdot H_2$, en donde M_2 es desconocida y H_2 es conocida.

Para encontrar K utilisamos:

$$M_1 = K \cdot H_1$$

$$K = \frac{M_1}{H_1}$$

A la isquierda de la ecuación

$M = K \cdot H$, encontramos una magnitud M de diferente especie de la de la derecha, H. Por lo tanto la constante debe transformar no solo los números sino las magnitudes (constante dimensional).

En el tercer método tenemos una relación funcional expresada por la ecuación $M_2 = q \cdot M_1$. A la isquierda y a la derecha encontramos magnitudes de la misma especie, y el operador q es un fraccionario que simplemente achica o agranda el número M_1 de unidades de esa magnitud, para obtener M_2. Es pues un operador sin dimensión, un número fraccionario.

Ejemplo 2.

Si 5 metros de tela cuestan $300,00; ¿ Cuánto costarán 24 metros de la misma tela?

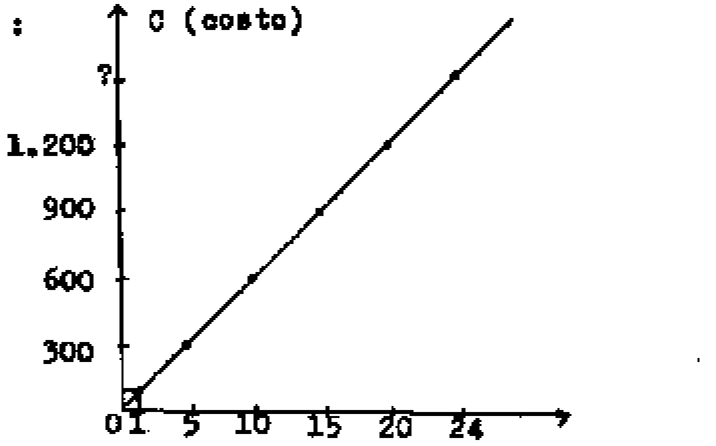
Analicemos el problema de la siguiente manera:

N (metros de tela)	C (costo)
5	$300,oo
24	?

La anterior es una correlación directa, puesto que a medida que aumenta el número de metros de tela, aumenta también el costo. Como esto sucede, se tiene una relación funcional creciente. ¿ Aumenta linealmente?

En primer lugar suponemos de nuevo que la tela está cortada de la misma pieza de tela, que tiene ancho uniforme. Si 5 metros de tela cuestan $300,oo, podemos predecir aproximadamente que 24 metros costarán mucho más que el cuádruplo de $300.oo y un poco menos del quíntuplo de $300,oo. En cualquier caso, el costo de la tela (24 metros) va a aumentarse.

Se da pues la proporcionalidad directa dentro de los límites del problema. Esto es equivalente a suponer que el costo de la tela aumenta linealmente con el número de metros :



Gráfica 8

Obsérvese que esta descripción de la situación real es apenas aproximada, y está limitada a situaciones muy simples.

Según lo visto en la sección 3.1; basta conocer la constante de proporcionalidad para encontrar $C = K. 24$ o también basta utilizar directamente la proporción:

$$\frac{C_1}{M_1} = \frac{C_2}{M_2} \quad \text{ó} \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{M_1}{M_2}$$ que encontramos en 3.1.1 .

3.2.1.4 Solucionemos este problema por el método de las proporciones así:

$$\frac{C_1}{M_1} = \frac{C_2}{M_2} \text{ que equivale a } \frac{300}{5} = \frac{C_2}{24}$$

Apliquemos la propiedad fundamental de las proporciones para hallar C_2 así :

$$5 \times C_2 = 24 \times 300 \Longrightarrow C_2 = \frac{24 \times 300}{5} = \frac{7.200}{5} = 1.440$$

3.2.1.5 Solucionemos ahora el mismo problema por el método de encontrar la constante de proporcionalidad, llamado método de "<u>reducción a la unidad</u>".

Conozcamos la constante de proporcionalidad K para encontrar:

$$C_2 = K. \ M_2 \ , \text{ así:}$$

$$\frac{C_1}{M_1} = \frac{C_2}{M_2} \qquad C_2 = \boxed{\frac{C_1}{M_1}} \times M_2$$, en donde $\frac{C_1}{M_1}$ es la constante de proporcionalidad dimensional $\frac{300}{5}$ costo

por metro, que nos da la constante K.

Luego : $C_2 = \enclose{circle}{\frac{300}{5}} \mathrm{x}\ 24 = \frac{300 \mathrm{\ x\ } 24}{5} = \frac{7.200}{5} = 1.440$

Nótese que la constante $K = \frac{C_1}{M_1}$ costo por metro nos indica el rendimiento por unidad, y por esto el método seguido se llama de "reducción a la unidad".

3.2.1.6 Notemos que exactamente la misma disposición de los datos y el mismo análisis empleados en 3.2.1.4 y 3.2.1.5 que son dos métodos tradicionales, nos permiten desarrollar otro método para solucionar el mismo problema, así:

Como $C_2 > C_1 = 300$, sabemos que el operador que debemos obtener tiene que ser un amplificador, para agrandar la magnitud $300,oo; este operador es otra constante de proporcionalidad q sin dimensión $\frac{M_2}{M_1}$ que equivale a $\frac{24}{5}$; esta es precisamente una fracción impropia que agranda o amplía una magnitud; veámoslo de la siguiente manera:

$$\frac{C_1}{M_1} = \frac{C_2}{M_2} \Longrightarrow C_2 = \enclose{circle}{\frac{M_2}{M_1}} \mathrm{x} \quad C_1$$

$$C_2 = q \cdot C_1 \longrightarrow C_2 \quad = \enclose{circle}{\frac{24}{5}} \mathrm{x}\ 300 = \frac{24 \mathrm{\ X\ } 300}{5} \quad \frac{7.200}{5} =$$

1.440

Luego 24 metros de la misma tela costarán $ 1.440.

Ejemplo 3.

Si 8 obreros hacen una obra en 30 días, ¿En cuántos días harán 15 obreros la misma obra?

Analicemos el problema de la siguiente manera:

H (Hombres)	T (Tiempo en días)
8	30
15	?

La anterior es una correlación inversa, puesto que a medida que aumenta el número de hombres, disminuye el número de días en los cuales es posible hacer la obra.

Como esto sucede se tiene una relación funcional decreciente:

Si $H_2 > H_1$, entonces $T_2 < T_1$.

Si 8 obreros hacen la obra en 30 días, 15 obreros harán la misma obra en menos de los 30 días, luego el número de días va a disminuírse.

Podemos suponer que el número de obreros no se estorba o sea que simplemente la capacidad de trabajo de la cuadrilla aumenta. ¿ Se da también la proporcionalidad inversa dentro de los límites del problema?

Según lo visto en la sección 3.1, basta saber si el producto de estas dos magnitudes es constante para saber que se da la proporcionalidad inversa y poder encontrar

$T = \frac{K}{15}$. También basta utilizar directamente la proporción :

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{o} \quad \frac{H_1}{T_2} = \frac{H_2}{T_1}$$

que encontramos en 3.1.2 .

Es conveniente hacer primero una estimación aproximada de lo que puede ser el resultado. En este caso podemos decir que como el número de obreros aumenta casi el doble, el tiempo se reducirá casi a la mitad.

3.2.1.7 Solucionemos este problema por el método de las proporciones, así:

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{T_2}{T_1}, \text{ que equivale a } \frac{8}{15} = \frac{T_2}{30}$$

Apliquemos la propiedad fundamental de las proporciones para hallar T_2 así:

$$15 \times T_2 = 30 \times 8 \Longrightarrow T_2 = \frac{30 \times 8}{15} = \frac{240}{15} = 16$$

3.2.1.8 Solucionemos ahora el mismo problema por el método de encontrar el producto constante K llamada constante de proporcionalidad, método este denominado de "<u>reducción a la unidad</u>" .

Conozcamos la constante de proporcionalidad K para encontrar :

$$T_2 = \frac{K}{H_2} \text{ , así:}$$

$$8 \times 30 = 12 \times 20 = 15 \times T = 240 = K \text{ (constante)}$$

De donde:

$$T_2 = \frac{240}{15} = 16$$

La constante K representa en este caso el número de obreros-día que requiere la obra. Por eso se llama este método de "reducción a la unidad".

3.2.1.9 Notemos que exactamente la misma disposición de los datos y el mismo análisis empleados en 3.2.1.7 y 3.2.1.8 que son los dos métodos tradicionales ya conocidos, nos permiten desarrollar otro método para solucionar el mismo problema así:

Como $T_2 < T_1 = 30$, notemos que el operador que debemos obtener, tiene que ser un reducidor o achicador para acortar el tiempo de trabajo, es decir los 30 días; este operador es la constante de proporcionalidad sin dimensión $\frac{H_1}{H_2}$ que podemos llamar q, y que equivale a $\frac{8}{15}$; esta es precisamente una *fracción propia* que reduce o acorta una magnitud; veámoslo de la siguiente manera:

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{T_2}{T_1} \Longrightarrow T_2 = \boxed{\frac{H_1}{H_2}} \times \ T_1$$

$$T_2 = q \cdot T_1 \Longrightarrow T_2 = \boxed{\frac{8}{15}} \times 30 = \frac{8 \times 30}{15} = \frac{240}{15} = 16$$

Luego 15 obreros harán la misma obra en 16 días.

Notemos de nuevo que: En el segundo método tenemos una relación funcional expresada por la ecuación;

$$T_2 = \frac{K}{H_2}$$

en donde T_2 es desconocida y H_2 es conocida.

Para encontrar K utilizamos :

$$T_1 = \frac{K}{H_1}$$

$$K = T_1 \cdot H_1$$

A la izquierda de la ecuación

$$T = \frac{K}{H}$$

encontramos una magnitud T de diferente especie de la de la derecha H. Por lo tanto la constante debe transformar no solo los números sino las magnitudes (constante dimensional).

En el tercer método tenemos una relación funcional expresada por la ecuación:

$$T_2 = q \cdot T_1$$

A la izquierda y a la derecha encontramos magnitudes de la misma especie, y el operador q es un fraccionario que simplemente achica o agranda el número T_1 de unidades de esa magnitud para obtener T_2. Es pues un operador sin dimensión, un número fraccionario.

Ejemplo 4.

Un motociclista emplea 7 horas en hacer un recorrido a una velocidad de 60 kilómetros por hora. ¿Cuántas horas empleará el motociclista en hacer el mismo recorrido a una velocidad de 70 Km, por hora?

Analicemos el problema de la siguiente manera:

T (Horas)	V (Km / Hora)
7	60
?	70

La anterior es una correlación inversa, puesto que a medida que aumenta la velocidad, disminuye el tiempo en el cual es posible hacer el recorrido. Como esto sucede se tiene una relación funcional decreciente:

$$\text{Si} \quad V_2 > V_1 \text{ , entonces } T_2 < T_1 \text{ .}$$

Si el motociclista a una velocidad de 60 Km/hora emplea 7 horas en hacer el recorrido, lógicamente al ser aumentada la velocidad a 70/Km hora, deberá hacer el recorrido en menos tiempo. Como el producto 7 x 60 = 420 Km. es la distancia total, que es constante, se da también la proporcionalidad inversa. Así podemos encontrar $T = \frac{K}{70}$. También basta utilizar directamente la proporción:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_2}{T_1} \text{ ó } \frac{V_1}{T_2} = \frac{V_2}{T_1}$$ que encontramos en 3.1.2

3.2.1.10 Solucionamos este problema por el método de las proporciones así:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_2}{T_1} \text{ , que equivale a } \frac{60}{70} = \frac{T_2}{7}$$

Apliquemos la propiedad fundamental de las proporciones para hallar T_2 así:

$$70 \times T_2 = 7 \times 60 \qquad T_2 = \frac{7 \times 60}{70} = \frac{420}{70} = 6$$

3.2.1.11 Solucionemos ahora el mismo problema por el método de encontrar el producto constante K llamada constante de proporcionalidad, método este denominado de "reducción a la unidad".

Como ya conocemos la constante de proporcionalidad K que es igual a 420 Km, podemos encontrar :

$$T_2 = \frac{K}{V_2} \longrightarrow T_2 = \frac{420}{70} = 6$$

3.2.1.12 Notemos que exactamente la misma disposición de los datos y el mismo análisis empleados en 3.2.1.10 y 3.2.1.11 que son los dos métodos tradicionales ya conocidos, nos permiten desarrollar otro método para solucionar el mismo problema así;

como $T_2 < T_1 = 7$, notemos que el operador que debemos obtener, tiene que ser un reducidor o achicador para acortar el tiempo de recorrido, es decir las 7 horas; este operador es la constante de proporcionalidad sin dimensión $\frac{V_1}{V_2}$ que podemos llamar q, y que equivale a $\frac{60}{70}$; esta es precisamente una fracción propia que reduce o acorta una magnitud; veámoslo de la siguiente manera:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_2}{T_1} \Longrightarrow T_2 = \boxed{\frac{V_1}{V_2}} \times T_1$$

$$T_2 = q \cdot T_1 \longrightarrow T_2 = \boxed{\frac{60}{70}} \times 7 = \frac{60 \times 7}{70} = \frac{420}{70} = 6$$

Luego a una velocidad de 70 Km / hora, el motociclista emplea 6 horas para hacer el mismo recorrido.

En General :

Para solucionar problemas sobre regla de tres simple, debemos tener en cuenta los siguientes aspectos;

1. Verificar si existe una correlación directa o inversa.

2. En el primer caso o sea de correlación directa, establecer si también existe una proporcionalidad directa, lo que se puede lograr con un análisis del problema por tablas o gráficas, o encontrando la respectiva constante de proporcionalidad.

A veces solamente se supone que dentro de los límites del problema, se puede usar la proporcionalidad directa para encontrar una solución aproximada. Este método ha resultado muy fecundo en las aplicaciones de la matemática y aún en la investigación de la matemática abstracta; se llama método de aproximación lineal. En cierto sentido la derivada de una función en un punto X_0, es simplemente la mejor aproximación lineal a la función en la vecindad del punto X_0 .

3. En el segundo caso o sea de correlación inversa, establecer si también existe una proporcionalidad inversa, lo que se puede lograr con un análisis del problema por tablas o gráficas, o encontrando la respectiva constante de proporcionalidad.

4. Hacer primero una estimación aproximada de lo que puede ser la solución o resultado del problema.

5. En los problemas acerca de la regla de tres simple, para los que debemos obtener un operador que reduzca o acorte una magnitud, utilizamos las fracciones propias que son de la forma $\frac{a}{b}$, donde $a < b$, $b \neq 0$. Este operador es una constante de proporcionalidad sin dimensión.

6. En los problemas acerca de la regla de tres simple, para los que debemos obtener un operador que alargue

o amplíe una magnitud, utilizamos las fracciones impropias que son dela forma $\frac{a}{b}$, donde $a > b$, $b \neq 0$. Este operador es una constante de proporcionalidad sin dimensión.

7. En los problemas acerca de la regla de tres simple, para los que utilizamos método de "reducción a la unidad", o sea la búsqueda de la constante de proporcionalidad K, dado $y = K.\ X$, en general la constante K sí tiene dimensiones físicas, pues transforma la magnitud correspondiente a la X en la magnitud desconocida correspondiente a la y . La constante K es una fracción que amplía o achica pero con dimensión.

3.2.2 Regla de tres compuesta.

Ejemplo 1.

Cuatro hombres han construído 40 metros de una pared en 24 días. ¿ Cuántos metros de la misma obra harán 6 hombres en 18 días, con la misma rapidez y habilidad?

Analicemos el problema de la siguiente manera:

Obreros	metros	días
4	40	24
6	?	18

1. Si 4 obreros hacen 40 metros de la obra, 6 obreros harán más metros de la misma obra, luego debemos conserguirnos un operador que agrande la magnitud 40 metros; este operador es la fracción impropia $\frac{6}{4}$, así:

$$\frac{6}{4}\ (40)$$

2. Si se hacen 40 metros de la obra en 24 días, lógicamente en 18 días se harán menos metros, luego debemos conseguirnos un operador que achique o acorte la magnitud 40 metros; este operador es la fracción propia $\frac{18}{24}$, así:

$$\frac{18}{24} \quad (40)$$

En uno y dos podemos observar que $\frac{6}{4}$ y $\frac{18}{24}$ son operadores que están aplicados a la misma magnitud 40 metros, luego ahora basta con aplicar sucesivamente los dos operadores a dicha magnitud de la siguiente manera:

$$\frac{6}{4} \left(\frac{18}{24} (40) \right) = \frac{6}{4} \times \frac{18}{24} \times 40 = \frac{6 \times 18 \times 40}{4 \times 24} = \frac{4.320}{96} = 45$$

Luego 6 hombres en 18 días harán 45 metros de la misma obra.

Ejemplo 2.

Una convivencia de 60 alumnos dispone de provisiones para alimentarse durante 8 días tomando 4 comidas diarias, ¿ Cuántos días alcanzarán dichas provisiones si se aumenta en 20 el número de alumnos y se reducen a 2 las comidas diarias?

Analicemos el problema de la siguiente manera:

Alumnos	días	comidas por día
60	8	4
80	?	2

a. Si 60 alumnos disponen de provisiones para 8 días, 80 alumnos dispondrán de provisiones para menos días, luego debemos conseguirnos un operador que achique o acorte la magnitud 8 días, este operador es la fracción porpia $\frac{60}{80}$, así:

$$\frac{60}{80}\ (8)$$

b. Si tomando 4 comidas por día se tienen provisiones para 8 días, tomando dos comidas por día se tendrán provisiones para más de 8 días, luego debemos conseguirnos un operador que agrnade la magnitud 8 días; este operador es la fracción impropia $\frac{4}{2}$, así:

$$\frac{4}{2}\quad (8)$$

En a y b podemos observar que $\frac{60}{80}$ y $\frac{4}{2}$ son operadores que están aplicados a la misma magnitud 8 días, luego ahora basta con aplicar sucesivamente los dos operadores a dicha magnitud de la siguiente manera:

$$\frac{60}{80}\left(\frac{4}{2}\ (8)\right) = \frac{60}{80} \times \frac{4}{2} \times 8 = \frac{60 \times 4 \times 8}{80 \times 2} = \frac{1.920}{160} = 12$$

Luego las provisiones en las condiciones propuestas alcanzarán para 12 días.

Ejemplo 3 .

Doce hombres trabajando 8 horas diarias construyen 24 metros de una obra en 10 días. ¿ Cuántos hombres serán necesarios si se quieren construír 20 metros de dicha obra en 5 días trabajando 10 horas diarias?.

Analicemos el problema de la siguiente manera:

Obreros	horas x día	metros	días
12	8	24	10
?	10	20	5

a. Si 12 obreros trabajan 8 horas por día, trabajando 10 horas diarias habrá menos obreros, luego debemos conseguirnos un operador que acorte la magnitud 12 obreros, este operador es la fracción propia $\frac{8}{10}$, así:

$$\frac{8}{10}\quad(12)$$

b. Si 12 obreros construyen 24 metros de la obra, menos obreros serán necesarios para construír 20 metros, luego debemos conseguirnos un operador que acorte la magnitud 12 obreros, este operador es la fracción propia: $\frac{20}{24}$ así:

$$\frac{20}{24}\quad(12)$$

c. Si 12 obreros hacen determinado trabajo en 10 días, para hacer ese mismo trabajo en 5 días se necesitan más de 12 obreros, luego debemos conseguirnos un operador que agrande la magnitud 12 obreros, este operador es la fracción impropia: $\frac{10}{5}$, así:

$$\frac{10}{5}\quad(12)$$

Observamos que en a.b.c. ; $\frac{8}{10}$; $\frac{20}{24}$ y $\frac{10}{5}$ son operadores que están aplicados a la misma magnitud 12 obreros, luego ahora basta con aplicar sucesivamente los tres operadores sobre la magnitud 12 obreros de la siguiente manera:

$$\frac{8}{10}\left(\frac{20}{40}\left(\frac{10}{5}\ (12)\right)\right)=\frac{8}{10}\ x\ \frac{20}{24}\ x\ \frac{10}{5}\ x\ 12=\frac{8x20x10x12}{10\ x\ 24x5}$$

$$=\ \frac{19.200}{1.200}=\ 16$$

Luego para construír 20 metros de dicha obra en 5 días trabajando 10 horas diarias, se necesitan 16 obreros.

En General.

Podemos observar que en los problemas sobre regla de tres compuesta, en los que intervienen 3 o más magnitudes distintas, las soluciones se pueden establecer mediante la descomposición del problema en reglas de tres simples. Basta con tomar la magnitud donde aparece la incógnita e irla comparando con cada una de las magnitudes restantes para obtener los operadores que se aplicarán sucesivamente al número de unidades ya conocido para encontrar el desconocido:

$$q_3\ \left(q_2\ \left(q_1\ \left(M_1\right)\right)\right)\ =\ M_2$$

$$q_3\ x\ q_2\ x\ q_1\ x\ M_1\ =\ M_2$$

Es de anotar que se ha empleado el tercer método, puesto que siempre vamos a encontrar un operador que transforme cierto número de unidades de una magnitud en otro número de unidades de la misma magnitud y por lo tanto basta aplicarle un operador fraccionario sin dimensión.

Luego para el caso de la regla de tres compuesta es conveniente el terser método, pues solo hay que tener en cuenta la aplicación sucesiva de operadores fraccionarios.

BIBLIOGRAFIA

Camuqui. *Física*. Una reunión de profesores. Libro 1, Bogotá, 1972.

Dolciani, Mary P. y otros. *Algebra Moderna, Estructura y Método*. Traducido del Inglés al Español por José A. Guevara Alfaro. (Libro 1), V Edición. Publicaciones Cultural S.A. Bogotá, 1973.

Johnsen, Richard y otros. *Serie de Matemática Moderna.* Algebra. Traducido por Mariano García. (Libro III) Editorial Norma. 1976.

Solórzano, Máximo de la Cruz. *Matemática Moderna II*. Educación Media, Editorial Didáctica, 1976.

Trejo, César A. *El Concepto de Número.* Monografía de la OEA, Segunda Edición, Washington.

Vasco, Carlos Eduardo. *Relatores y Operadores.* Conferencias del Departamento de Matemáticas de la Universidad Javeriana, Bogotá, 1974.

Vasco, Carlos Eduardo y otros. *Matemáticas I*. Departamento de Matemáticas Colegio Mayor de San Bartolomé, Bogotá, 1975.