

1-1-2014

Efecto de los límites en la inversión y la falta de diversificación desde la perspectiva de los portafolios eficientes, un estudio para las carteras colectivas en Colombia

Deivy Stiven Hernández Castañeda

Follow this and additional works at: https://ciencia.lasalle.edu.co/finanzas_comercio

Citación recomendada

Hernández Castañeda, D. S. (2014). Efecto de los límites en la inversión y la falta de diversificación desde la perspectiva de los portafolios eficientes, un estudio para las carteras colectivas en Colombia. Retrieved from https://ciencia.lasalle.edu.co/finanzas_comercio/25

This Trabajo de grado - Pregrado is brought to you for free and open access by the Facultad de Ciencias Económicas y Sociales at Ciencia Unisalle. It has been accepted for inclusion in Finanzas y Comercio Internacional by an authorized administrator of Ciencia Unisalle. For more information, please contact ciencia@lasalle.edu.co.

UNIVERSIDAD DE LA SALLE
Facultad de ciencias económicas y sociales
Programa de finanzas y comercio internacional



Efecto de los límites en la inversión y la falta de diversificación desde la perspectiva de los portafolios eficientes, un estudio para las carteras colectivas en Colombia

Presentado por:

Deivy Stiven Hernandez Castañeda
63111950

Bogota D.C.
Julio, 2014

UNIVERSIDAD DE LA SALLE
Facultad de ciencias económicas y sociales
Programa de finanzas y comercio internacional



Efecto de los límites en la inversión y la falta de diversificación desde la perspectiva de los portafolios eficientes, un estudio para las carteras colectivas en Colombia

Presentado por:

Deivy Stiven Hernandez Castañeda
63111950

Dirigido por:

Jose Armando Hernández Bernal
Magister en ciencias económicas

Bogotá D.C.
Julio, 2014

Nota de aceptación

Firma de Jurado

Firma de Jurado

Bogotá D.C., Julio 10 de 2014

DEDICATORIA

Le dedico este trabajo investigativo a todas esas personas que tienen un lugar muy especial en mi corazón, a esas personas que tanto me han enseñado, a ellos dedico estas palabras, esos esfuerzos y esas noches sin dormir, a esas personas que ya no volverán y por las cuales he luchado tanto.

Para ustedes

Anita

Luis Carlos

María

AGRADECIMIENTOS

Es de especial importancia para mí poder expresar, lo agradecido que me encuentro con la Universidad de La Salle, por haberme dado la gran oportunidad de tener la experiencia de acercarme al conocimiento a través de la academia, de conocer a tantos profesores que contribuyeron no solamente con mi formación profesional si no humana, de igual manera le agradezco a esos compañeros con los cuales pase tantas tardes y noches desafiando al tiempo.

TABLA DE CONTENIDO

Introducción	8
1. Eficiencia en los mercados de capitales	16
2. Los portafolios eficientes	18
3. Las preferencias de los inversionistas	18
4. Principales extensiones del modelo de Markowitz	19
5. Conformación de portafolios eficientes	21
5.1 Parámetros de optimización	22
5.2 Cálculo del valor en riesgo de los portafolios	24
5.3 Consecución y manejo de datos	25
5.4 Estimación de la frontera eficiente	27
5.5 Estimación de la línea de mercado de capitales	28
6. Efectos sobre la frontera eficiente	30
6.1 Efectos sobre la rentabilidad esperada y el var	32
Conclusiones y recomendaciones	39
Bibliografía	41

ÍNDICE DE TABLAS, GRÁFICAS Y FIGURAS

TABLAS

Tabla 1. Resumen tipos de eficiencia	17
Tabla 2. Restricciones de optimización	23
Tabla 3. Límites de composición de carteras colectivas.	24
Tabla 4. Participación de acciones sobre el índice COL20	25
Tabla 5. Coeficientes de variación para los índices	26
Tabla 6. Resumen de criterios para selección	27
Tabla 7. Impacto sobre portafolio tangente con modificación sobre límites a la inversión	34

GRÁFICAS

Gráfica 1. Frontera eficiente -1 y línea de mercado de capitales - 1, para una cartera de activos nacionales	30
Gráfica 2. Frontera eficiente -1,2 y línea de mercado de capitales -1,2, para una cartera de activos nacionales incluyendo TES	31
Gráfica 3. Frontera eficiente -1,3 y línea de mercado de capitales -1,3 para una cartera de activos internacionales incluyendo TES	32
Gráfica 4. Valor en riesgo para una cartera de activos nacionales	33
Gráfica 5. Rentabilidad esperada para una cartera de activos nacionales	34
Gráfica 6. Valor en riesgo para una cartera de activos nacionales incluyendo TES	35
Gráfica 7. Rentabilidad esperada para una cartera de activos nacionales incluyendo TES.	36

Gráfica 8. Valor en riesgo para una cartera con activos internacionales 37

Gráfica 9. Rentabilidad esperada para una cartera con activos internacionales 38

FIGURAS

Figura 1. Ejemplo parámetros de optimización en Excel 28

Figura 2. Ejemplo cálculo de la línea de mercado de capitales 29

RESUMEN

La presente investigación trata la problemática de la selección de cartera, basada en la necesidad de tener una claridad en base a la estrategia de limitar la capacidad de diversificación utilizada por aquellos administradores de las carteras colectivas en Colombia, basada en los desarrollos empíricos de Markowitz (1952) y Sharpe (1964) entre otros, el objetivo principal del presente trabajo investigativo fue determinar el efecto de los límites en la inversión y la falta de diversificación sobre una serie de portafolios que en primera instancia se conformaron con acciones nacionales, y posteriormente con valores de renta fija nacional y acciones internacionales, a través de la programación lineal, se optimizaron los portafolios sujetos a una serie de supuestos, de lo anterior se concluyó entre otras cosas , que a medida que se aumentó la cantidad de títulos susceptibles de hacer parte de las carteras optimas, el efecto de la modificación sobre el algoritmo de optimización se fue diluyendo cada vez más, además de advertir cómo el modelo utilizado no es concluyente por hacer exógenas variables que deberían tenerse en cuenta como endógenas.

Palabras clave: optimización, elección de cartera, límites a la inversión, carteras colectivas.

Clasificación JEL: G1; G10; G11

ABSTRACT

This research addresses the problem of portfolio selection, based on the need for clarity based on the strategy of limiting the ability of diversification used by those managers of collective portfolio in Colombia, based on empirical developments Markowitz (1952) and Sharpe (1964) and others, the main objective of this research was to determine the effect of limits on investment and lack of diversification on a number of portfolios that were formed in the first instance with national operations, and subsequently with fixed income securities national and international stocks, through linear programming portfolios subject to a number of

assumptions were optimized, the above it was concluded among other things, that as the quantity of subject titles was raised to be part of optimal portfolios, the effect of the change on the optimization algorithm was diluted more and more, as well as warn that model used is not conclusive done exogenous variables that should be considered as endogenous.

Keywords: optimization, portfolio choice, investment limits, collective funds.

JEL Clasification: G1; G10; G11

INTRODUCCIÓN

La problemática de la selección de cartera ha sido estudiada por la literatura económica y financiera, como es el caso de Markowitz (1952) y Sharpe (1964) entre otros autores, dentro del contexto actual, en donde la eficiencia de los mercados se encuentra en discusión constante tanto en las aulas de clase como en la práctica profesional, es pertinente decir que, para el profesional de las finanzas, es necesario tener una perspectiva más amplia acerca de las aplicaciones empíricas de los modelos básicos de selección de portafolios y sus correspondientes extensiones y modificaciones actuales, ajustándose mas a la realidad del entorno financiero.

Como se han resaltado, los desarrollos fundamentales de Markowitz (1952) y Sharpe (1964) acompañado de los planteamientos de Tobin (1958), establecieron la metodología, y el lenguaje propio de la teoría moderna de portafolio, como posteriormente lo analizaron Malkiel y Fama (1970), para su discusión sobre la eficiencia de los mercados, la similitud entre la competencia perfecta descrita por los clásicos y neoclásicos de la teoría económica, en cuanto a lo que se refiere a la simetría de información y el comportamiento utilitarista maximizador y racional.

De lo anterior se deduce cómo los planteamientos teóricos de estos autores son notables y relacionados en el sentido de que la mayoría de estos modelos parten de un equilibrio general, además de otros supuestos alejados de la realidad cotidiana del mundo financiero caracterizado por volatilidades aleatorias o motivadas por la especulación. Por ende se hizo necesario que apareciesen estudios empíricos como los realizados por Lessard (1973), el cual realizó un estudio para cuatro países de América latina (Colombia, Chile, Argentina y Brasil), con el objetivo de examinar el potencial de estos países para realizar diversificación, además del estudio de Valente (1989), que destaca los beneficios de la diversificación a través de un estudio dirigido a satisfacer las necesidades de inversión de los fondos pensionales en Chile, a través de un análisis internacional,

desde esta perspectiva relaciona un posible aumento en la rentabilidad y una disminución en el riesgo, se encuentra asociado con la implementación de una estrategia de inversión de activos de otros países.

En este sentido la literatura da cuenta de aun más trabajos de los mencionados en este documento, trabajos que abordan la temática de la conformación de cartera, además de un gran número de metodologías que hacen referencia a la optimización y análisis de eficiencia, pero se presenta la ausencia de un trabajo que aborde un análisis detallado y que permita desde la óptica de límites sobre la inversión determinar los efectos sobre un portafolio similar al que se compone para las carteras colectivas.

Partiendo del modelo ya planteado por Markowitz en 1952, se construyeron diez portafolios y se realizaron comparaciones, entre portafolios a los cuales no se les modificó de ninguna manera la forma metodológica y matemática en cuanto a los supuestos de optimización, de tal manera que se pudiese contrastar a través de la frontera eficiente y la medición de la máxima pérdida esperada y la rentabilidad, si una modificación sobre el algoritmo de restricción afectaba de manera negativa o positiva estas variables.

De lo anterior se observó cómo el efecto sobre el riesgo es positivo, es decir, al modificar las restricciones en cuanto al máximo posible de ser susceptible de ser invertido, el riesgo disminuye y por ende la rentabilidad también, lo resaltante no es que este efecto se presente, sino que como se observó, a medida que aumentan los títulos dentro de una posible canasta, el efecto adverso sobre el riesgo disminuye.

En resumen a continuación se presentan tres capítulos, de los cuales, el primero hace referencia a una revisión de literatura acerca del tema central de la investigación, el segundo corresponde a la explicación detallada de la metodología empleada para determinar el efecto de los límites en la inversión y la falta de

diversificación sobre los portafolios conformados, en el tercer capítulo se recopilan los resultados de manera gráfica y numérica, y para finalizar se construyó una sección de conclusiones y recomendación, en donde se consigan los resultados de los contrastes.

CAPITULO I

REVISIÓN DE LITERATURA

La literatura presentada a continuación fue escogida de acuerdo a tres criterios: el primero, fue que tratase el problema de eficiencia en la selección de cartera, desde la aplicación de los desarrollos de Markowitz (1952), el segundo criterio se refiere a que las investigaciones citadas contengan o desarrollen el concepto de diversificación, y por último que dentro de la metodología utilizada en dicha literatura, se aplicará alguna clase de restricción dentro del problema de optimización en los portafolios que se encuentran dentro de la frontera eficiente.

Del mismo modo además de cumplir con los tres criterios anteriores, los autores presentados a continuación se encuentran organizados de manera cronológica y espacial en cuanto a lo que se refiere a investigaciones y estudios de mercados internacionales.

En términos de teoría, la presente revisión explora algunos estudios que son mostrados en la parte final de este capítulo, y de forma similar que al inicio se encuentran organizados de manera temporal, y a nivel de relevancia e importancia que tienen dichas teorías sobre el desarrollo metodológico de este estudio

Dentro de la literatura extensa que existe en cuanto a la temática de la selección de cartera y diversificación a nivel internacional se resalta el trabajo de Lessard (1973), el cual realiza un estudio para cuatro países de América latina (Colombia, Chile, Argentina y Brasil), el objetivo de la investigación radicaba en examinar el potencial de estos países para realizar diversificación, a través de un análisis de retornos, basado en la construcción de matrices de covarianzas, además de la relación multivariable de la muestra tomada entre 1958 y 1968. Dentro de los resultados arrojados del estudio, se nota cómo las estrategias de inversión, serán resultado de la existencia de ganancias, de la misma forma plantea cómo la metodología utilizada es pertinente para realizar predicciones.

Valente (1989), al igual destaca los beneficios de la diversificación a través de un estudio dirigido a satisfacer las necesidades de inversión de los fondos pensionales en Chile, a través de un análisis internacional, desde esta perspectiva relaciona un posible aumento en la rentabilidad y una disminución en el riesgo, se encuentra asociado con la implementación de una estrategia de inversión de activos de otros países. Madura y O'Brien (1992) realizaron una revisión de literatura de la cual extraen cómo la diversificación tiene un efecto positivo sobre la eficiencia, de la misma forma resaltan cómo los mecanismos de cobertura son esenciales en cuanto a lo que se refiere a mitigar el riesgo frente al tipo de cambio.

De manera similar Izquierdo y Sáez (2000), construyen una cartera de optimización, partiendo de la utilización de la diversificación internacional, para lo cual utilizan un test de cointegración, además de la construcción de índices de Sharpe, todo ello con la intención de comparar a nivel europeo e internacional la diversificación, de acuerdo a los autores los coeficientes entre los índices bursátiles de algunos países, demuestran que existe poca relación lineal, por lo cual consideran conveniente la realización de diversificación entre ellos.

Por otro lado Cruz et al. (2007) utilizan una metodología de optimización partiendo de diferentes modelos, los cuales permiten crear varios portafolios, además de la utilización de la línea de mercado de capitales para la determinación porcentual de la composición de acciones, que sea capaz de optimizar la prima por riesgo. La mayor conclusión a la que llegan los autores se desprende de cómo la rentabilidad intrínseca a la tasa libre de riesgo varía entre cada individuo, además de que la simetría de información acerca del conocimiento del mercado cambia entre los inversionistas.

Medina (2003), construye dos portafolios, los cuales se componen de cinco acciones de la bolsa de valores de Colombia. Dentro del estudio el autor resalta cómo el modelo de Markowitz, es estático y particular, es decir, no es una aplicación de equilibrio general del mercado, sino por el contrario es de índole parcial, por lo cual una de las conclusiones más importantes nace de cómo el

modelo CAPM, es más acertado para realizar un modelo que tenga en cuenta al mercado y su riesgo sistemático.

Por su parte Hernández (2005), estudia desde la teoría de portafolio la estrategia de inversión de los bancos en Colombia, por lo cual utiliza una metodología que parte de la construcción de fronteras eficientes, y con posterioridad utiliza modelos GARCH, que estiman la volatilidad de los TES. El estudio da algunas conclusiones, entre las cuales se mencionan, como durante el periodo 1995 -2003 se muestra un aumento en la pérdida esperada por colocación de la cartera, sin tener ninguna incidencia el nivel de diversificación, de la misma manera concluye cómo la estrategia de los bancos de minimizar el riesgo y optimizar rendimientos es viable si se imponen restricciones a los porcentajes a invertir en activos que serán invertidos en cartera y bonos del estado.

Por el contrario Gil (2007), aborda el tema de la eficiencia, a través de un contraste, con el fin de analizar la relación entre crecimiento económico y el mercado de capitales; para lo cual utiliza, entre otros algunos indicadores de integración, liquidez y tamaño, del estudio se resalta como uno de los problemas del mercado de capitales en Colombia es su concentración de oferta, lo cual impide un desarrollo más rápido y dinámico.

En complemento Córdoba y Echeverry (2008), realizan un estudio que estructura una serie de portafolios que son optimizados partiendo de la teoría moderna de portafolio, además de la utilización del modelo CAPM, encuentran la opción para un inversionista colombiano que presente una aversión al riesgo muy baja puede optar por invertir en la bolsa de valores de Hong Kong, de tal manera que dicho mercado le ofrece el 30% más de rentabilidad que el índice general de la bolsa de valores de Colombia.

1. EFICIENCIA EN LOS MERCADOS DE CAPITALES

Dentro de la literatura que aborda la temática de la eficiencia en el mercado de capitales se destaca el trabajo de Roberts (1967), expone tres tipos de eficiencia

dentro de la cuales se habla de una eficiencia débil, semifuerte y fuerte, resumida en la tabla 1. Con posterioridad Malkiel y Fama (1970), plantean cómo en un mercado eficiente, los precios son capaces de reflejar de forma plena y completa la información disponible en el mercado, de esta forma los inversionistas serán capaces de tomar decisiones, a través del precio fijado por el juego libre entre la demanda partiendo de un equilibrio basado en la rentabilidad esperada y simetría en la información.

Tabla 1. Resumen tipos de eficiencia

Eficiencia	
Tipo	Características
Débil	Los precios evidencian toda la información histórica, y no se pueden obtener rentabilidades de manera extraordinaria.
Semifuerte	Los precios evidencian toda la información pública, y se pueden obtener rentabilidades extraordinarias, a través de la obtención de información privilegiada.
Fuerte	Los precios evidencian toda la información existente, no es posible obtener rentabilidades extraordinarias.

Fuente: Elaboración propia, con base en Roberts (1967)

De la misma manera el estudio resalta algunas condiciones básicas pero no necesarias para que un mercado sea eficiente, y que con posterioridad serán aplicadas en desarrollos empíricos y teóricos, dichas condiciones pueden ser definidas cómo; la no existencia de costos transaccionales, y la información es simétrica y a libre disposición. Dichas condiciones son suficientes, ya que por ejemplo como ocurre en la realidad, un gran número de inversionistas que sean capaces de acceder de manera libre a la información, harán posible que se presente un mercado eficiente.

2. LOS PORTAFOLIOS EFICIENTES

Dentro de los trabajos más importantes sobre la eficiencia de portafolios, el trabajo de Markowitz (1952), es tal vez de los más resaltables desde la perspectiva teórica y práctica de la selección de cartera, el autor aplica la eficiencia de portafolios a temas financieros, dicha eficiencia se explica a través de la varianza de los rendimientos esperados y su media.

Dicho modelo planteado en 1952, además de explicar la eficiencia a través de la varianza y la media, plantea supuestos básicos, similares a lo expuesto con posterioridad por Malkiel y Fama (1970), en donde se muestra cómo la eficiencia es posible si se cumplen algunas condiciones de suficiencia.

Además de la concepción de eficiencia de portafolios, la relación entre el nivel de riesgo y diversificación de activos, en complemento de la determinación de una frontera eficiente y en donde la adición de la aplicación empírica, muestra la relación inversa entre el número de activos y el nivel de riesgo. De la misma forma la presencia de riesgo sistemático y no sistemático expuesto en el trabajo de Sharpe (1964), complementa y soporta lo expuesto en el modelo de eficiencia de cartera, en cuanto a la relación entre los rendimientos esperados, la cantidad de activos y el riesgo.

En consecuencia los desarrollos teóricos del modelo de eficiencia de cartera serán utilizados dentro de la metodología como pilar fundamental, para el planteamiento de los problemas de optimización partiendo de restricciones y del supuesto de la existencia de simetría en la información, como ocurre en los casos de hipotéticos mercados de competencia perfecta.

3. LAS PREFERENCIAS DE LOS INVERSIONISTAS

En lo referente a las preferencias de los inversionistas, la existencia de estudios e investigaciones es muy amplia, para este caso resaltamos los estudios de Tobin (1958), en donde concluye como los inversionistas, bajo el supuesto de tasas de

interés iguales entre captación y colocación, son indiferentes al riesgo, y por lo tanto serán capaces de elegir el mismo portafolio de inversión.

La hipótesis de Tobin es importante partiendo de la relevancia que tiene dentro del desarrollo metodológico, el supuesto mencionado, ya que a través de él se deduce la llamada línea del mercado de capitales, la cual permite analizar la tangencia con el portafolio que se maximiza con base en la razón de Sharpe, autor ya mencionado con anterioridad en cuanto a lo que se refiere a la distinción del riesgo.

4. PRINCIPALES EXTENSIONES DEL MODELO DE MARKOWITZ

Además del modelo tradicional de selección de cartera expuesto por Markowitz (1952), y su planteamiento de la media varianza como sustento teórico del problema de optimización, existen extensiones o redimensionamientos matemáticos y teóricos que plantean de manera similar como la selección de cartera se convierte en expresión matemática que parte de problemas de maximización o minimización según sea el caso.

Es el caso del modelo CAPM, (Capital Asset Pricing Model) por sus siglas en inglés, el cual se basó en los desarrollos de Markowitz (1952), y con posterioridad establecido como planteamiento teórico por Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966), del cual se desprenden la mayoría de modelos de mercado que son utilizados en la actualidad. Este modelo de equilibrio a diferencia del modelo de Markowitz, deduce un equilibrio general del mercado más no particular como ocurre en el primer modelo, además de mostrar como la rentabilidad está en función de un riesgo de mercado.

En complemento del CAPM se puede realizar una revisión de algunas otras extensiones o modificaciones que tengan como base los problemas de optimización, como es el caso de Konno y Yamazaki (1991), que exponen en su estudio para la bolsa de Tokio un método similar, pero que por el contrario plantea

un problema optimizador basado en la minimización de las desviaciones absolutas con respecto al promedio aritmético de las rentabilidades.

Investigaciones en la misma línea de conformación de cartera óptima, dentro de los cuales se destacan el modelo de media semivarianza estudiado por Nantell y Price (1979), del cual se desprende una nueva visión de inversión, a diferencia de los metodologías anteriores, el presente maneja una diversificación condicional, en base al comportamiento del activo, de tal forma que el inversionista se centra en modificar el portafolio en función de aquellos activos que se encuentran en determinado tiempo por debajo del valor de su media.

En concordancia Xia et al. (2000), exponen un modelo de selección de cartera que parte a diferencia de los planteamientos de Markowitz (1952), de la media aritmética de los retornos y utilizan una metodología basada en cambiar la media de la rentabilidad esperada, por una variable dinámica a través de un nuevo algoritmo que reemplace el tradicional problema de optimización, todo ello con el objetivo comparar los resultados y su aproximación a la realidad, de ello muestran como los resultados en cuanto a rentabilidad son más favorables, que las simulaciones realizadas con el método tradicional.

CAPÍTULO II

5. CONFORMACIÓN DE PORTAFOLIOS EFICIENTES

Dentro de la metodología aplicada para la conformación de los portafolios se utilizaron las rentabilidades calculadas a través de la expresión (4), las cuales se entienden como rentabilidades compuestas, mas no simples, debido a que las personas como seres racionales conforman portafolios con un horizonte temporal de largo plazo, en otras palabras no realizan inversiones de corto plazo.

$$R_t = \ln \left[\frac{P_t}{P_{t-1}} \right] \quad (4)$$

De manera posterior se creó un vector de promedios (6), acompañado de una matriz de varianzas y covarianzas (9), al igual que una matriz de pesos de cada portafolio consignados en la expresión lineal (7), en la cual se pretendía a través de la programación lineal, sujeto a un problema de optimización, obtener el porcentaje de participación de cada uno de los activos sobre el portafolio.

$$\bar{R}_K = \sum_{t=1}^n \frac{R_t}{n} \quad (5)$$

$$\bar{R}_{k_{1 \times f}} = (\bar{R}_{1,1} \bar{R}_{1,2} \dots \bar{R}_{1,f}) \quad (6)$$

$$W = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,q} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \dots & w_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{f,1} & w_{f,2} & \dots & w_{f,q} \end{bmatrix} \quad (7)$$

En cuanto al cálculo de la rentabilidad de cada uno de los portafolios, se cuenta con la expresión (8), de la cual se obtuvo la rentabilidad en función de la selección óptima de cada uno de los activos dentro de la muestra tomada durante el periodo de un año bursátil, es decir, se obtuvo el retorno esperado teniendo en cuenta el promedio anual, y el peso de cada título.

$$R(E_p) = [R(E_p)_{1,1} \quad R(E_p)_{1,2} \quad \dots \quad R(E_p)_{1,f}] \quad (8)$$

En lo que se refiere a la obtención de una medida que describa el riesgo de un portafolio, Markowitz (1952) utilizó la desviación estándar como una medida aceptable para describir la volatilidad de los títulos, es decir, para saber que tan riesgosos son, esto explica cómo esta medida de dispersión recoge tanto los riesgos a los que se encuentran expuestos los títulos en el mercado, como aquellas perturbaciones ajenas a él. Para ello se plantean las expresión (9), que expuesta de una forma matricial, y más conocida como matriz de varianzas y covarianzas, explican la forma matemática en la cual se obtendrá la volatilidad de cada portafolio a través de la multiplicación mostrada en la ecuación (10).

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^{2E} & \sigma_{1,2}^E & \dots & \sigma_{1,f}^E \\ \sigma_{2,1}^E & \sigma_2^{2E} & \dots & \sigma_{2,f}^E \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{f,1}^E & \sigma_{f,2}^E & \dots & \sigma_f^E \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\sigma_p = (w^T * VARCOVAR * W)^{1/2} \quad (10)$$

5.1 PARÁMETROS DE OPTIMIZACIÓN

La literatura existente y extensa sobre selección y optimización de cartera, muestra la forma en la cual se deben conformar los portafolios, en primera instancia para que sean eficientes, y segundo para que cumplan con los supuestos planteados, de la revisión hecha en el segundo capítulo del presente estudio y para este caso en particular se tomaron cinco portafolios presentados a continuación todos ellos con un problema de optimización en particular.

Tabla 2. Restricciones de optimización

Portafolios eficientes sin límite.				
Portafolio de mínimo riesgo	Portafolio con expectativas de rendimientos	Portafolio de mínimo retorno	Portafolio de máximo retorno	Portafolio tangente
$minimizar \sigma_p$ Sujeto a: $\sum_{i=1}^f w_i = 1$ $w_i \geq 0$	$minimizar \sigma_p$ Sujeto a: $\sum_{i=1}^f w_i = 1$ $w_i \geq 0$ $R(E_p) = k$	$minimizar R(E_p)$ Sujeto a: $\sum_{i=1}^f w_i = 1$ $w_i \geq 0$	$maximizar R(E_p)$ Sujeto a: $\sum_{i=1}^f w_i = 1$ $w_i \geq 0$	$maximizar = \frac{R(E_p) - R_l}{\sigma_p}$ Sujeto a: $\sum_{i=1}^f w_i = 1$ $w_i \geq 0$
Portafolios eficientes con límite.				
Portafolio de mínimo riesgo	Portafolio con expectativas de rendimientos	Portafolio de mínimo retorno	Portafolio de máximo retorno	Portafolio tangente
$minimizar \sigma_p$ Sujeto a: $\sum_{i=1}^f w_i = 1$ $w_i \leq \underline{\alpha}$	$minimizar \sigma_p$ Sujeto a: $\sum_{i=1}^f w_i = 1$ $w_i \leq \underline{\alpha}$ $R(E_p) = k$	$minimizar R(E_p)$ Sujeto a: $\sum_{i=1}^f w_i = 1$ $w_i \leq \underline{\alpha}$	$maximizar R(E_p)$ Sujeto a: $\sum_{i=1}^f w_i = 1$ $w_i \leq \underline{\alpha}$	$maximizar = \frac{R(E_p) - R_l}{\sigma_p}$ Sujeto a: $\sum_{i=1}^f w_i = 1$ $w_i \leq \underline{\alpha}$

Fuente: elaboración propia, basado en Markowitz (1952).

Donde “ α ” ($1 \leq \alpha \leq 0$) se entenderá como el promedio de los límites máximos a la inversión dentro de la optimización partiendo de las restricciones que por lo general son utilizadas por los bancos y algunas corredoras de bolsa, dependiendo

el tipo de título, la calificación, el emisor o la moneda en la cual se encuentran representados en estas restricciones que fueron obtenidas a partir de los reglamentos de varias carteras colectivas que se encontraban a disposición del público por internet y que se resumen en la tabla 3.

Tabla 3. Límites de composición de carteras colectivas.

TÍTULO	BBVA	DAVIVIENDA	ALIANZA DE VALORES	BANCO CAJA SOCIAL	CORREVAL	PROMEDIO
	MAX	MAX	MAX	MAX	MAX	MAX
Sector financiero	40%	100%	90%	100%	100%	86%
Sector real	30%	30%	90%	15%	100%	53%
Emisor extranjero	20%	40%	90%	0%	30%	36%
TES	100%	100%	60%	30%	100%	78%

Fuente: elaboración propia, datos basados en los reglamentos de las carteras colectivas de cada una de las entidades.

Esta modificación al algorítmico típico que fue utilizada como problema de optimización permite determinar si dicha modificación es positiva o negativa dentro de la relación riesgo rentabilidad, de igual forma se pretende contrastar el comportamiento de los portafolios planteados.

5.2 CÁLCULO DEL VALOR EN RIESGO DE LOS PORTAFOLIOS

Dentro de la metodología propuesta se tomó el valor en riesgo (VaR), el cual pretende hacer una medición de riesgo, a través de la cuantificación de la máxima pérdida esperada, sujeto a un nivel de confianza determinado en un periodo de tiempo.

Para este caso como la intención es la cuantificación de la máxima pérdida esperada para cada uno de los portafolios expuestos en la sección anterior, dicha medición se realizó a través de la expresión (11), en donde " X_m ", es el valor de la

inversión en el mercado; “ σ_p ”, expresa la volatilidad del portafolio, “ N ” es el nivel de confianza del portafolio y “ T ” representa el tiempo.

$$\text{VaRp} = (\sigma_p) \times (N) \times (T)^{1/2} \quad (11)$$

5.3 CONSECUCIÓN Y MANEJO DE DATOS

Entre los datos que se utilizaron en la presente investigación, se obtuvieron los precios de cierre de las 10 acciones que tuvieron durante el periodo de un año, la mayor participación dentro de índice por liquidez (COL 20)¹, y que pueden ser observadas en la tabla 4, dentro de la cual se toma una muestra compuesta por nueve acciones, que se tranzan diariamente en la bolsa colombiana, en consecuencia se tomaron los precios de cierre obtenidos de la base de datos de la página oficial de la bolsa de valores de Colombia, durante un periodo bursátil de 252 días, omitiendo días festivos y fines de semana, el cual comienza el 1 de enero del 2013 y termino el 31 de diciembre del correspondiente año.

Tabla 4. Participación de acciones sobre el índice COL20

POSICION	TRIMESTRE I		TRIMESTRE II	
	ACCIONES	PARTICIPACION	ACCIONES	PARTICIPACION
1	PREC	15,47%	PREC	16,35%
2	ECOPETROL	13,59%	ECOPETROL	15,332%
3	PFBCOLOM	12,28%	PFBCOLOM	11,07%
4	PFAVTA	6,60%	PFDVIVIENDA	9,49%
5	<u>PHELMBANK*</u>	<u>6.10%*</u>	PFAVTA	7,24%

¹Debido a que la canasta del índice se reconstruye de manera trimestral, se plantea que se escogerán aquellas acciones que persistan con la mayor participación durante los dos trimestres para los cuales se presentan datos en la bolsa de valores de Colombia.

6	PMGC	6,03%	BVC	6,24%
7	BVC	5,62%	TABLEMAC	6,01%
8	PFDVIVIENDA	5,57%	GRUPOSURA	4,31%
9	TABLEMAC	4,81%	PMGC	4,27%
10	GRUPOSURA	4,11%	<u>PFAVAL*</u>	<u>3,30%*</u>

Fuente: cálculos propios a partir de datos tomados de la bolsa de valores de Colombia.

En concordancia con el objetivo de la investigación, la diversificación es fundamental, por lo cual se tomaron los TES, con vencimiento al 2015, y al 2018, los cuales obtuvieron un promedio de participación mayor al 30% dentro del índice COLTES de corto plazo, del cual hacen parte los títulos menos riesgosos de renta fija de emisión pública debido al bajo coeficiente de variación en comparación con el índice general COLTES, y el índice de largo plazo.

Tabla 5. Coeficientes de variación para los índices

	COLTES	COLTESCP	COLTESLP
DESV	99,6015296	2,03344538	70,3075298
MEDIA	58,52	173,53	55,90
C/V	1,702	<u>0,012*</u>	1,258

Fuente: cálculos propios a partir de datos tomados de la bolsa de valores de Colombia.

En la misma línea, en cuanto a la selección de la muestra de activos internacionales, se tomaron acciones que pueden ser tranzadas en el mercado local, de estas acciones se seleccionaron por sectores, de la misma forma se utilizaron los criterios del índice de Sharpe y la razón de Treynor para definir el premio por arriesgar que daban las empresas, de esta manera se decidió tomar los activos que tuvieran índices positivos y negativos entre sí, pero que no fueran contradictorios, a excepción de la acción de McDonald's Corporation, la cual fue incluida a razón de completar un portafolio diversificado por sectores.

Tabla 6. Resumen de criterios para selección

Titulo	R PROMEDIO	DESVEST	CV	BETA	ALFA	SHARPE	TREYNOR
Microsoft inc	0,293	1,918	0,153	0,004	0,001	0,153	66,378
Caterpillar inc	-0,092	0,926	-0,09	0,033	0,001	-0,100	-2,805
3m	0,324	1,335	0,243	0,022	0,001	0,242	14,897
Goldman Sachs	0,168	1,023	0,164	0,026	0,001	0,164	6,521
Visa Inc	0,341	1,462	0,233	0,020	0,001	0,233	16,809
Johnson & Johnson	0,212	1,363	0,155	0,000	0,001	0,155	1202,158
General Electric	0,215	1,063	0,203	0,015	0,001	0,202	14,076
Exxon Mobil	0,117	0,575	0,204	0,101	0,001	0,202	1,151
McDonald's	0,011	0,576	0,020	-0,048	0,001	<u>0,018*</u>	<u>-0,218*</u>

Fuente: cálculos propios a partir de datos tomados de la bolsa de valores de Nueva York.

De igual manera en cuanto a lo que se refiere a la revisión de literatura se tendrán en cuenta las mismas restricciones que sean utilizado en el presente proyecto en lo que se refiere a la delimitación de los antecedentes, es decir, se utilizaron aquellos artículos que sean producto de investigaciones de frontera o a nivel de doctorado, que contengan la desarrollos empíricos o teóricos a cerca de la diversificación, restricción sobre las maximizaciones o minimizaciones, o en general de aplicaciones de la selección eficiente de cartera en Colombia, para ello se utilizaran bases de datos de acceso libre o privado a través de las bases de la Universidad de La Salle.

5.4 ESTIMACIÓN DE LA FRONTERA EFICIENTE

Continuando con la sección metodológica, hay que anotar que todos los cálculos del presente documento fueron realizados en la plataforma Excel, dentro de la cual a través del análisis de datos se calcularon las matrices de varianzas y covarianzas, en cuanto a las participaciones de cada título dentro de cada uno de los portafolios planteados, la función de programación lineal *Solver* fue la

herramienta utilizada para obtener los datos resultado de las restricciones expuestas en el trabajo, como se puede evidenciar en la figura 1.

Figura 1. Ejemplo parámetros de optimización en Excel



Fuente: cálculos propios a partir de datos tomados de la bolsa de valores de Colombia y Nueva York.

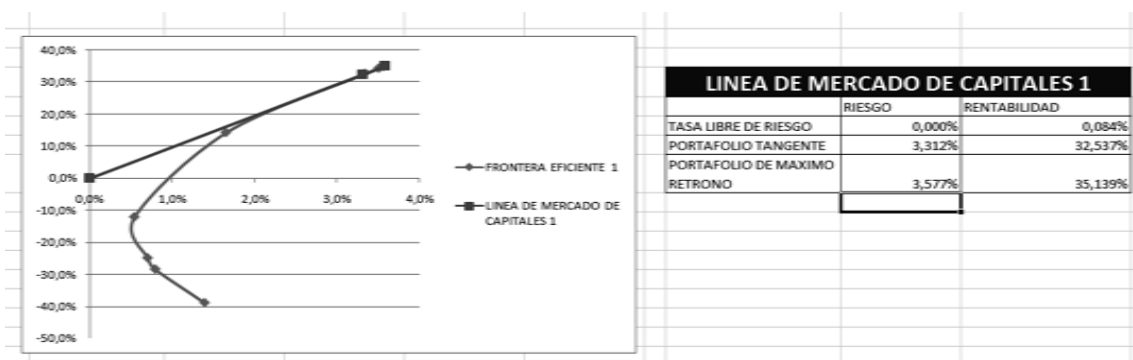
A través del programa Excel fue posible la obtención del riesgo, estimado a partir de la función (10), al igual que la rentabilidad esperada expresada en la ecuación (8), dichas variables son necesarias para construir el grafico que exprese la relación entre rentabilidad y riesgo, que como ya se ha mostrado en varias oportunidades en este documento para Markowitz (1952), dicha relación en forma gráfica tendrá una forma similar a una bala mirando hacia la izquierda, y como se podrá observarse en la gráfica 1 de la siguiente sección del documento la cual corresponde a los resultados cuantitativos del estudio.

5.5 ESTIMACIÓN DE LA LÍNEA DE MERCADO DE CAPITAL

La línea del mercado de capitales, es una función que relaciona al riesgo y la rentabilidad en una curva con pendiente positiva, que nace desde la tasa libre de riesgo tenida en cuenta en un portafolio y la cual hace tangencia en donde es máxima la función de Sharpe dentro de la frontera eficiente, uno de los desarrollos teóricos más importantes para hacer la afirmación de que en este punto existe una tangencia de pendientes, fue el realizado por Tobin (1958), el cual dice como en este punto de tangencia existe un portafolio de mercado y es simétrico para todos los inversionistas.

A modo de ejemplo la figura 2, representa la forma en la cual en el presente documento se realizó el cálculo de dicha línea de mercado, para ello se necesitan tres datos, el primero es la tasa libre de riesgo, la cual se tomó como el promedio simple del bono del tesoro americano a treinta años, el segundo y el tercero son la rentabilidad esperada y el riesgo en el punto de tangencia y en el portafolio de máximo retorno esperado, el cual se obtuvo a partir de las restricciones contempladas en la tabla 2.

Figura 2. Ejemplo cálculo de la línea de mercado de capitales



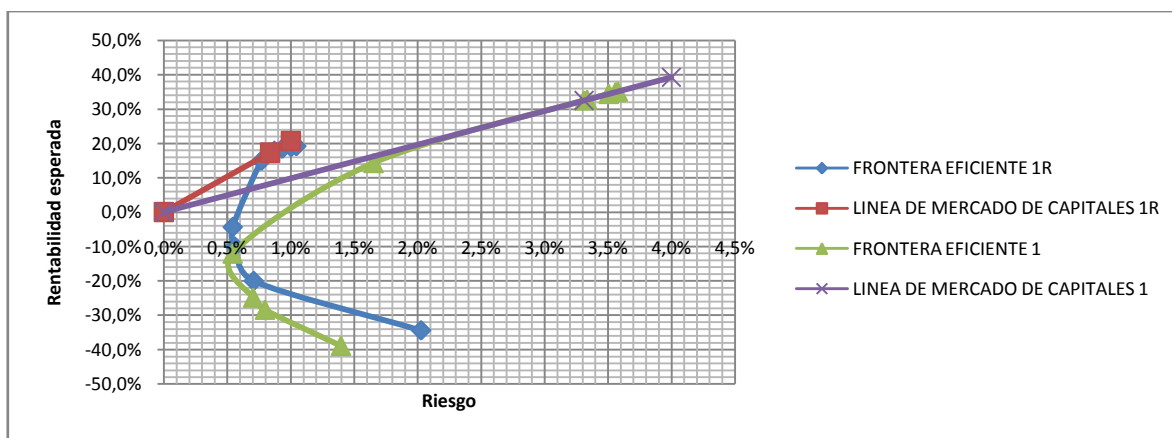
Fuente: cálculos propios a partir de datos tomados de la bolsa de valores de Colombia y Nueva York.

CAPÍTULO III

6. EFECTOS SOBRE LA FRONTERA EFICIENTE

Dentro de la metodología propuesta, se pretendía determinar el efecto que tenía la modificación sobre el algoritmo de restricción que limitaba la capacidad del modelo de optimizar entre cero y uno la participación de cada activo sobre los portafolios calculados, de estos se desprenden tres posibles fronteras eficientes al igual que diferentes líneas de mercado, de allí que se pueda observar de manera gráfica los cambios que sufre la forma de la frontera.

Gráfica 1. Frontera eficiente -1 y línea de mercado de capitales - 1, para una cartera de activos nacionales



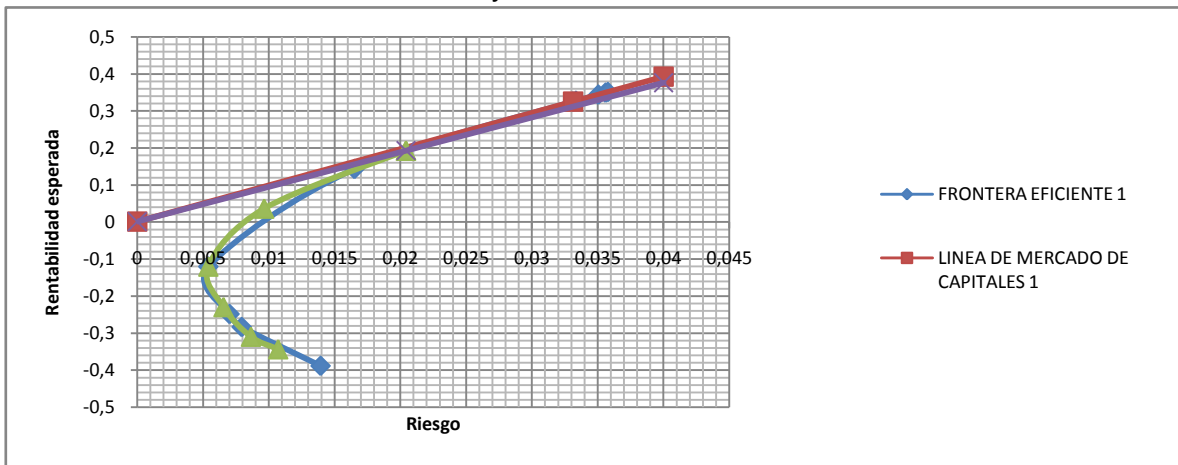
Fuente: procesamiento del autor con base en datos tomados de la bolsa de valores de Colombia año 2013. Series optimizadas.

Según Markowitz (1952), las rentabilidades esperadas y el riesgo se pueden interpretar en un plano cartesiano, en donde se crea una gráfica en forma de bala mirando hacia la izquierda, es decir hacia el eje donde se muestran las escalas de rentabilidad. Esta gráfica, al igual que la línea de mercado de capitales, muestra la existencia de una relación positiva entre el riesgo y los retornos de los activos, evidencia una función entre estas dos variables.

Por lo anterior, se observa en la gráfica 1, una diferencia entre la frontera 1, y la frontera 1R, denotada así como la frontera que muestra los efectos de una política

restrictiva sobre la conformación de los portafolios, por lo cual se puede evidenciar un cambio en la concavidad, es decir, se presenta un encogimiento, de esto se pudo determinar que tanto la desviación estándar como la rentabilidad esperada disminuyeron.

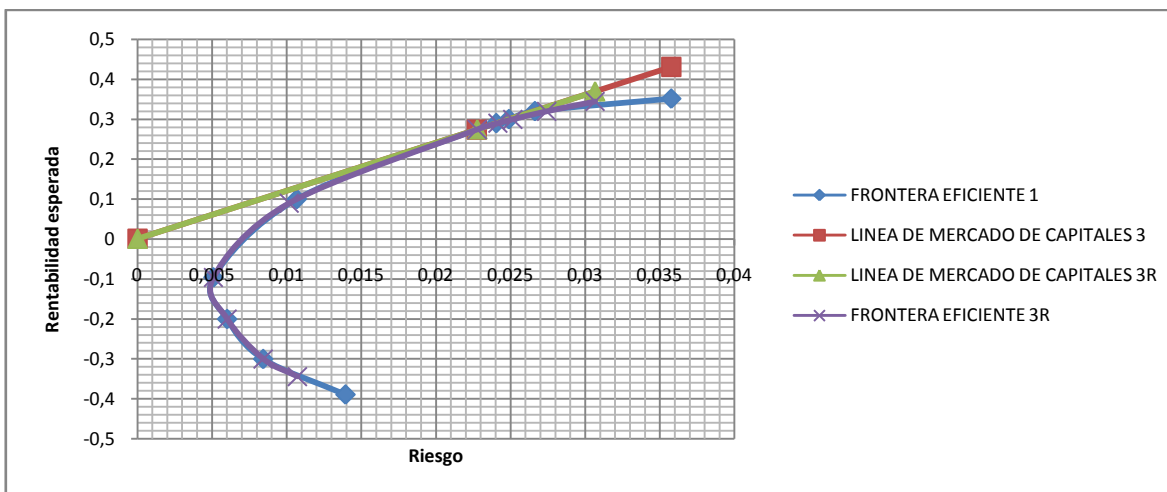
Gráfica 2. Frontera eficiente -1,2 y línea de mercado de capitales -1,2, para una cartera de activos nacionales incluyendo TES



Fuente: procesamiento del autor con base en datos tomados de la bolsa de valores de Colombia año 2013. Series optimizadas.

Por el contrario a lo sucedido en los portafolios conformados solamente por acciones nacionales, aquellos a los cuales se les adicionaron dos TES, dentro de la cartera, se presentaron un efecto, como se puede ver en la grafica 2, menos fuerte sobre la concavidad y la extensión de frontera, al igual que sobre la línea del mercado de capitales, la cual a excepción de la grafica inmediatamente anterior no pivotea hacia arriba, si no que se mantiene estática.

Gráfica 3. Frontera eficiente -1,3 y línea de mercado de capitales -1,3 para una cartera de activos internacionales incluyendo TES



Fuente: procesamiento del autor con base en datos tomados de la bolsa de valores de Colombia y Nueva York, año 2013. Series optimizadas.

Para las dos gráficas anteriores se evidencia cómo a medida que se aumentan los activos susceptibles de hacer parte de los portafolios, al parecer disminuye el efecto sobre la frontera y la línea de mercado, para observar si a medida que se aumentan los activos dentro de la cartera, dichas restricciones aplicadas, tendrán menos impacto sobre la extensión y la concavidad de las mismas se puede apreciar como la tendencia persiste a través de la gráfica 3.

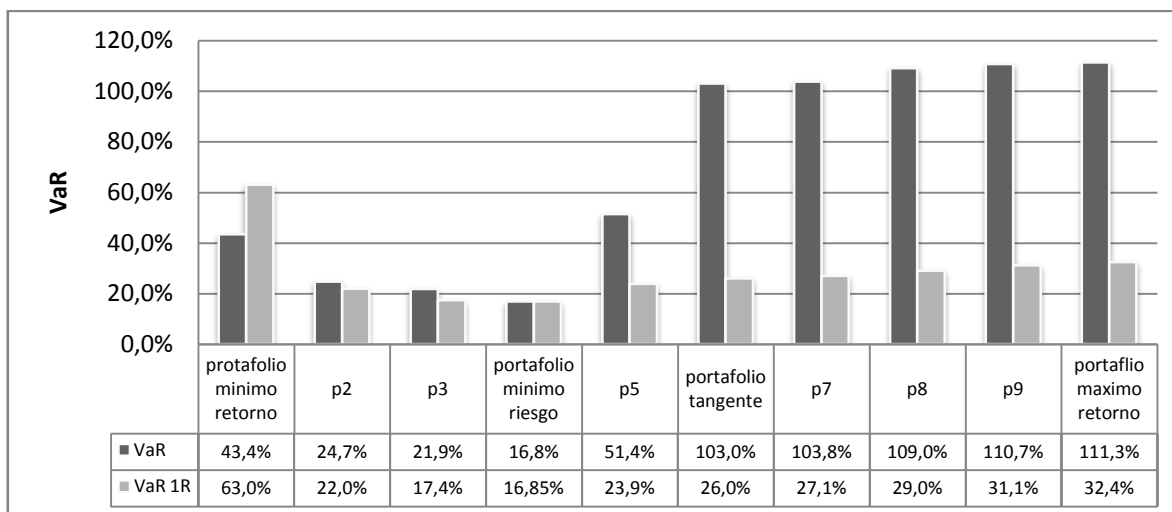
6.1 EFECTOS SOBRE LA RENTABILIDAD ESPERADA Y EL VAR

A diferencia de lo visto en las gráficas anteriores, es necesario comparar dos variables, que para este caso permitieron ver el efecto, y además de eso cuantificar la diferencia entre los portafolios no limitados y aquellos a los cuales se les modificó las restricciones de optimización.

Como se había planteado en la parte metodológica, tanto el VaR, como la rentabilidad esperada permitieron cuantificar el cambio entre una metodología y otra, en síntesis permite determinar y contrastar el efecto de la alteración sobre la

maximización de los portafolios en el sentido de interpretar los efectos evidenciados a continuación.

Gráfica 4. Valor en riesgo para una cartera de activos nacionales

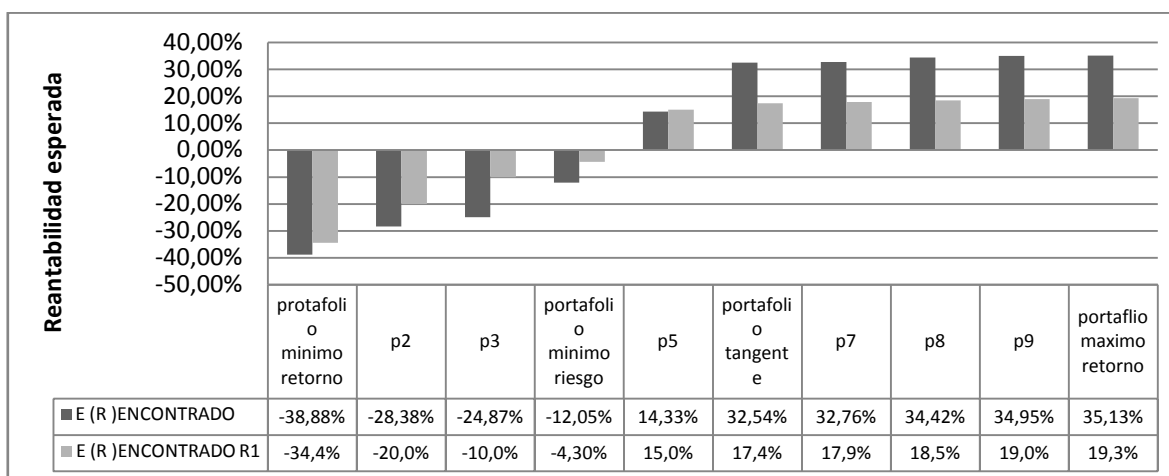


Fuente: procesamiento del autor con base en datos tomados de la bolsa de valores de Colombia año 2013. Series optimizadas.

En el sentido de apoyar los resultados aquí presentados, varios estudios realizados en la misma vía del presente documento registran cambios notables sobre la estructura y el comportamiento de la rentabilidad esperada, es el caso de Valente (1989), del cual se desprende la evidencia de cómo la implantación de activos internacionales, impulsan los retornos en forma positiva.

Para este caso en particular ocurre lo mismo, debido a lo modificación sobre los algoritmos de restricción, que determinaron un decrecimiento sobre el riesgo y la rentabilidad, en un primer momento y como se puede apreciar en las graficas 5, 6, 7 respectivamente, en el momento en el cual se incluyen acciones internacionales dentro de los portafolios observados, se evidencia un comportamiento simétrico entre un antes y un después, esto tal vez propiciado ya sea por el aumento en los títulos a escoger o por el contrario sea como en el caso de diversos autores la naturaleza del mismo.

Gráfica 5. Rentabilidad esperada para una cartera de activos nacionales



Fuente: procesamiento del autor con base en datos tomados de la bolsa de valores de Colombia año 2013. Series optimizadas.

En cuanto a lo que se refiere específicamente no a la cantidad de títulos, si no a la modificación sobre el comportamiento de los portafolios, se evidencia un cambio significativo en los portafolios tangentes, la tabla 7, muestra cómo la relación entre cantidad de títulos e impacto es negativa, es decir, a medida que se aumentan los activos susceptibles a ser integrados dentro de la cartera, el efecto de disminución sobre el riesgo y la rentabilidad disminuyen cada vez mas.

Tabla 7. Impacto sobre portafolio tangente con modificación sobres límites a la inversión

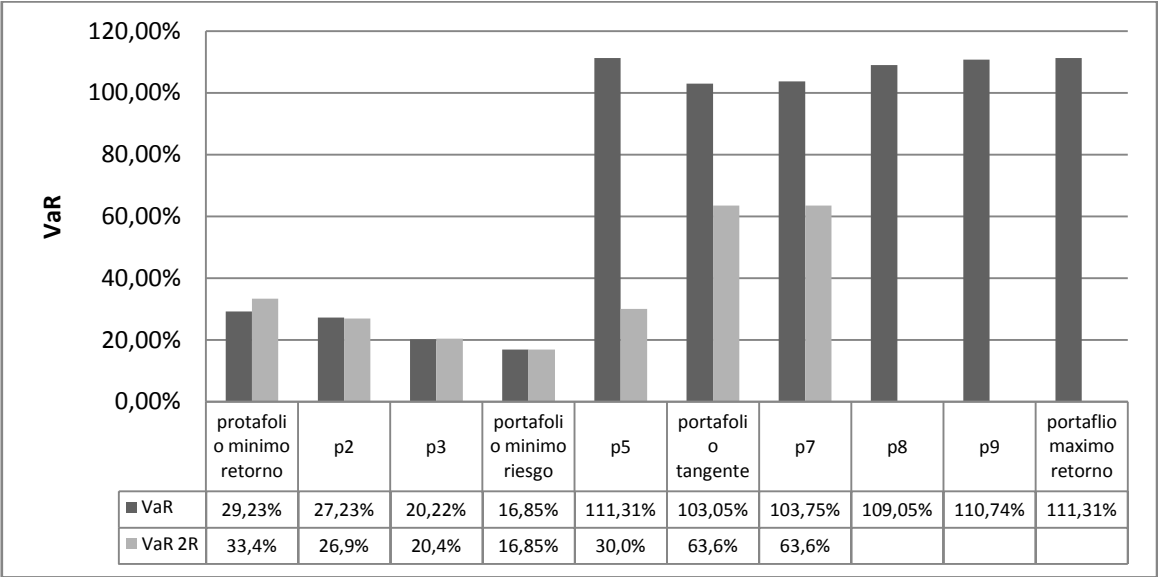
Portafolio tangente			
TITULOS	RF	RIESGO	IMPACTO
Nacionales	0,08%	0,84%	-2,48%
Nacionales + TES	0,08%	0,54%	-1,27%
Internacionales	0,08%	2,3%	0,00

Fuente: procesamiento del autor con base en datos tomados de la bolsa de valores de Colombia y Nueva York, año 2013. Series optimizadas.

A manera de demostración, la tabla 7 muestra cómo para el portafolio tangente que integra acciones nacionales, como acciones de la bolsa de Nueva York, se

presenta un escenario en donde la canasta de títulos aumenta, y en consecuencia el efecto de la modificación sobre el algoritmo de optimización se hace prácticamente nulo, con un valor de variación de cero, y en contraprestación del efecto en la canasta más sensible a este tipo de políticas la cual fue conformada solamente por activos colombianos.

Gráfica 6. Valor en riesgo para una cartera de activos nacionales incluyendo TES

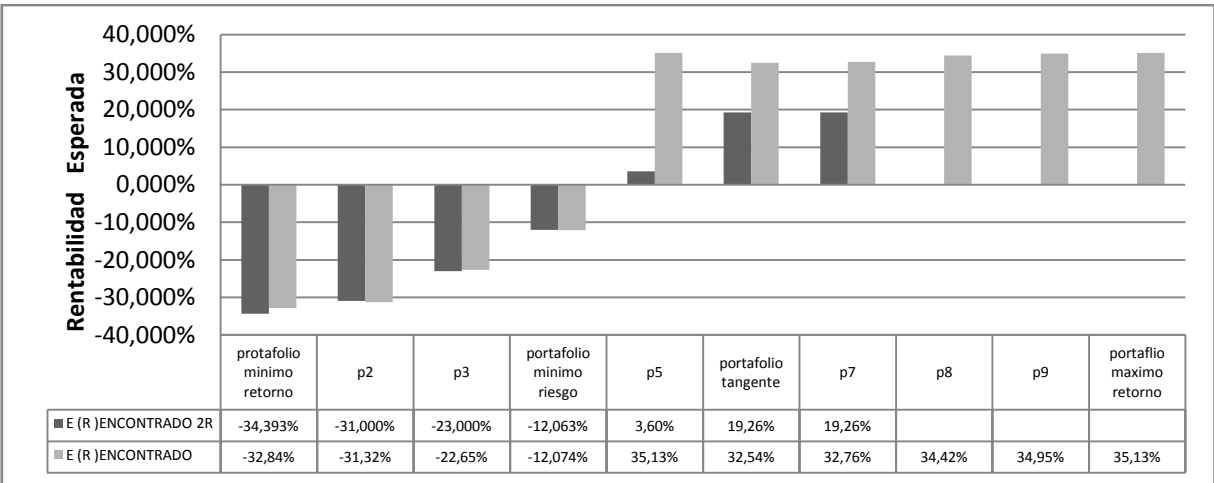


Fuente: procesamiento del autor con base en datos tomados de la bolsa de valores de Colombia año 2013. Series optimizadas.

Para tener aun más claridad sobre los efectos adversos que producen los limites de composición de la inversión sobre la rentabilidad esperada y una de las variables observadas propuesta como lo fue el *Value at Risk*, las graficas 6 y 8, representan el comportamiento de la máxima pérdida esperada, ya que ésta se encuentra en función del riesgo calculado, la tendencia es la misma que en las graficas 7 y 9, correspondientes a los cambios sobre rentabilidad esperada, debido a la relación positiva que existe y que la extensa literatura expone, acerca de cómo entre los cambios positivos sobre los precios de los activos y las volatilidades, existe un efecto positivo.

Es pertinente aclarar que para este caso en particular y aun mas para este modelo se está analizando un periodo de tiempo determinado, es decir, que todos los resultados aquí presentados no se encuentran en función del tiempo, en otras palabras son estáticos, por demás que los efectos aquí expuestos y cuantificados son contrastados para un periodo de tiempo determinado, por lo cual se afirma que los resultados pueden cambiar dependiendo del momento en el cual se toman las muestras de datos correspondientes.

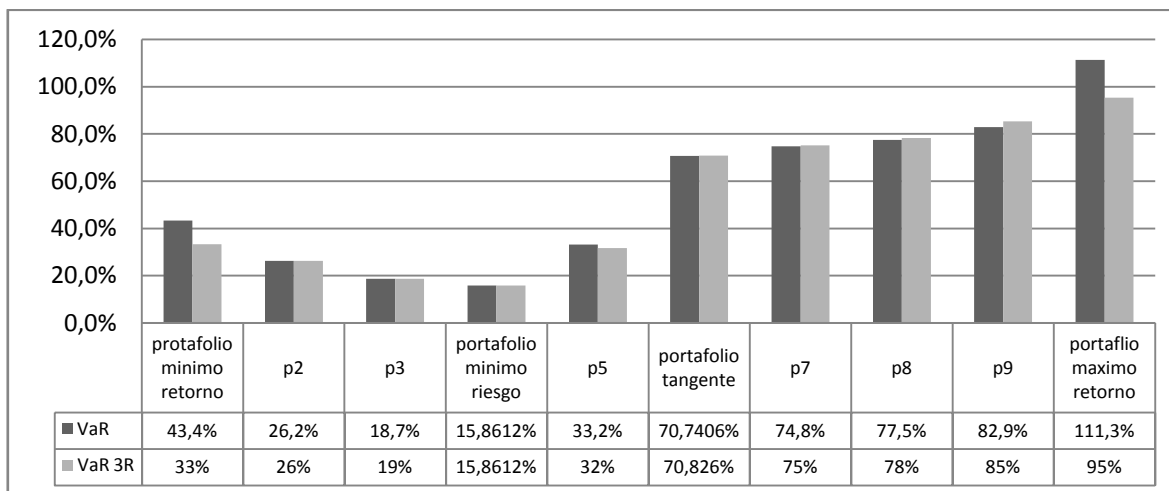
Gráfica 7. Rentabilidad esperada para una cartera de activos nacionales incluyendo TES.



Fuente: procesamiento del autor con base en datos tomados de la bolsa de valores de Colombia año 2013. Series optimizadas.

En concordancia, el interés de este documento es interpretar y comparar los efectos que tiene la modificación a los límites en la inversión o la falta de diversificación dentro del riesgo y la rentabilidad de varios portafolios, para este caso se formaron diez portafolios, de los cuales se les alteró, primero la cantidad de títulos que pudiesen ser tomados para optimizar el portafolio, es decir, se modificó la muestra en varios escenarios, en segunda instancia se transformo el algoritmo que normalmente se usa como criterio de restricción, por lo cual es diciente afirmar que, partiendo de las muestras tomadas, los límites sobre la inversión afectan al riesgo de manera negativa, es decir, la volatilidad de las muestras disminuye y por consiguiente la rentabilidad esperada también.

Gráfica 8. Valor en riesgo para una cartera con activos internacionales

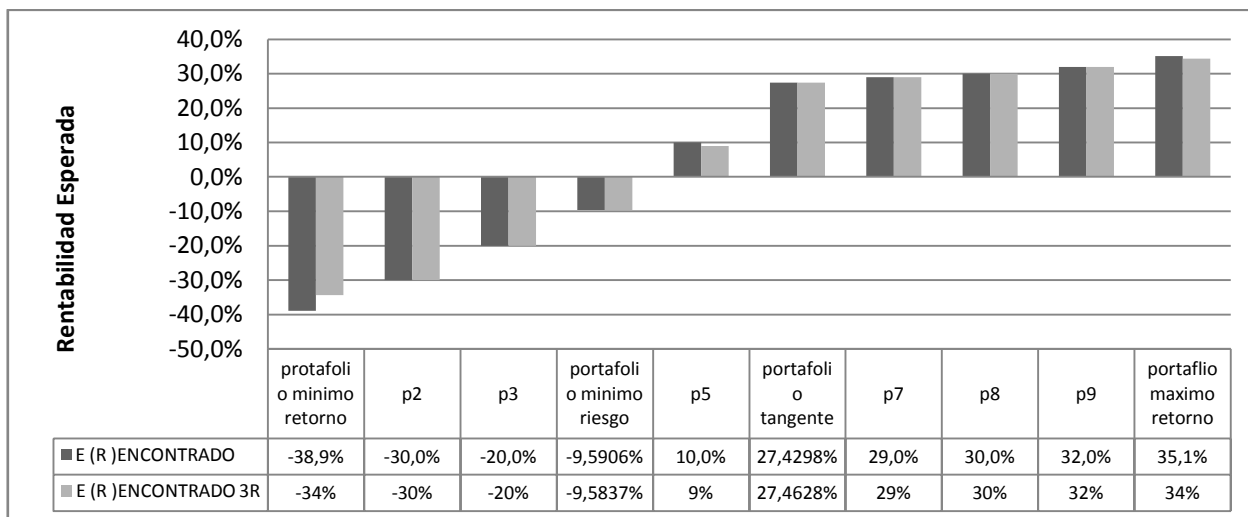


Fuente: procesamiento del autor con base en datos tomados de la bolsa de valores de Colombia y Nueva York, año 2013. Series optimizadas.

La disminución en el VaR y la rentabilidad, la cual se puede observar en las graficas de la 4 a la 7, muestran como, el condicionamiento dentro del modelo a distribuir los activos según la naturaleza como se muestra en la tabla 3, tiene como efecto la disminución de la máxima pérdida esperada en un 58,3% en promedio en los portafolios tangentes correspondientes a acciones nacionales, incluyendo dos títulos de deuda pública.

En consecuencia la rentabilidad esperada para los portafolios tangentes se vio afectada en promedio con una disminución del 14,3%, un error recurrente en estos casos es la falsa afirmación de que la rentabilidad y el riesgo tienen una relación directa, esta afirmación está errada, la relación entre estas variables es para este caso y como lo afirma la literatura existente, positiva y va en la misma vía, en otras palabras a mayor riesgo, mayor ganancia, también es de anotar que estos resultados se ven sujetos a este modelo estático, debido a que los planteamientos de Markowitz (1952), exponen un modelo segmentado, y se advierte de que los datos aquí obtenidos son producto de una muestra determinada en un espacio temporal.

Gráfica 9. Rentabilidad esperada para una cartera con activos internacionales



Fuente: procesamiento del autor con base en datos tomados de la bolsa de valores de Colombia y Nueva York, año 2013. Series optimizadas.

En resumen y como lo expresó Hernández (2005), la estrategia de los bancos es viable, en el sentido de que existan límites a la inversión determinada por cada activo que es susceptible de ser escogido dentro de un portafolio, con la intención racional de minimizar riesgo y maximizar la rentabilidad, en la misma vía Valente (1989), destaca como la introducción de activos internacionales beneficia la rentabilidad, la cual para este caso aumenta pasando de 19.6% para el portafolio tangente compuesto por solo títulos nacionales, al 27,42% para la cartera compuesta no solo por títulos colombianos, si no que se suman a la canasta algunos activos internacionales.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Durante todo el documento se ha resaltado la importancia de los desarrollos teóricos de Markowitz (1952), y su importancia dentro de las finanzas, la aplicación de la teoría de portafolio, es fundamental para entender el comportamiento tanto de los inversionistas como del riesgo y la rentabilidad.

El modelo presentado en este documento no es un modelo de mercado, es decir, es particular y estático en el tiempo, para este caso el tiempo es exógeno, por ende, se puede afirmar que, la aplicación de límites a la inversión, que para este texto se entiende como la modificación en el algoritmo que limita la dinámica del modelo para otorgar las participaciones de cada activo sobre cada cartera, afecta de manera negativa la rentabilidad, y por consiguiente se presenta una disminución en el riesgo.

Los resultados presentados son consecuencia de una muestra tomada en un espacio de tiempo determinado, por consiguiente se encuentran limitados por el contexto económico y demás variables que el modelo considera exógenas, por lo cual no es posible afirmar que los efectos mostrados en el documento sean constantes y se presenten con recurrencia.

En este sentido es posible decir que, los efectos observados como lo son: el cambio en la concavidad o el encogimiento de la frontera eficiente, la disminución del riesgo calculado que en promedio fue del 14,3% y la estabilización del comportamiento entre los portafolios a medida que se aumentan la cantidad de títulos, está en función como lo expone Valente (1989) y apoyado por Hernández (2005), de la diversificación, en el sentido de que la modificación de la restricción sobre los pesos de cada activo se restringe, lo cual obliga al modelo a diversificarse.

Por lo cual se hace pertinente decir que, es necesario que además de limitar el modelo en el sentido de disminuir el riesgo a través de la restricción de los títulos

susceptibles de hacer parte de una cartera, es pertinente imponer un límite adicional a la cantidad de activos de cualquier naturaleza, ya que como se observó al parecer el efecto es indiferente a si los componentes de la cartera son de renta fija o variable, en este sentido es oportuno decir que, si se aumenta de manera excesiva la cantidad de activos, los efectos de la modificación al algoritmo de optimización, se diluyen y por lo tanto, la estrategia de diversificación aplicada por aquellos encargados de administrar los fondos de inversión o carteras colectivas pierde su objetivo de mantener un riesgo bajo y controlado.

En cuanto a lo que se refiere a las recomendaciones, es pertinente expresar que es necesario que este tipo de temas sean explicados a través de modelos que se acerquen más a la realidad, ya que los supuestos de no existencia de costos de transacción y simetría en la información hacen que los resultados obtenidos se vean limitados por variables que se consideran exógenas, y por el contrario deberían considerarse endógenas.

REFERENCIAS CONSULTADAS

Córdoba, G. L. R., & Echeverri, C. P. F. (2008). Estructuración de portafolios de acciones en el mercado de valores de Hong Kong.

Cruz, E. A., Restrepo, J. H., & Medina, P. D. (2007). Selección de portafolios de acciones a partir de la línea de mercado de capitales con activos financieros de Colombia. *Scientia et Technica*, 3 (35).

Gil, J. M. U. (2007). *Caracterización del mercado accionario colombiano, 2001-2006: un análisis comparativo*. Banco de la República.

Hernández, R. R. (2005). *Colocar menos cartera e invertir en TES: ¿ una decisión óptima?: análisis de las inversiones en la Banca Colombiana, 1995-2003*. Universidad de los Andes, Facultad de Economía, Centro de Estudios sobre Desarrollo Economía.

Izquierdo, M. A. F., & Sáez, J. C. M. (2000). Gestión óptima de carteras internacionales ante la integración de los mercados europeos. *Investigaciones europeas de dirección y economía de la empresa*, 6(3), 87-99.

Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management science*, 37(5), 519-531.

Lessard, D. R. (1973). International portfolio diversification: a multivariate analysis for a group of Latin American countries. *The Journal of Finance*, 28(3), 619-633.

Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The review of economics and statistics*, 13-37.

Madura, J., & O'Brien, T. J. (1992). International diversification for the individual: A review. *Financial Services Review*, 1(2), 159-175.

- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection*. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- Malkiel, B. G., & Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review Of Theory And Empirical Work*. *The journal of Finance*, 25(2), 383-417.
- Medina, L. Á. (2003). Aplicación de la teoría del portafolio en el mercado accionario colombiano. *Cuadernos de Economía*, 22(39), 129-168.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 768-783.
- Nantell, T. J., & Price, B. (1979). An analytical comparison of variance and semivariance capital market theories. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14(02), 221-242.
- Roberts, H. V. (1967). Statistical versus clinical prediction of the stock market.
- Sharpe W, F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *journal of finance*, 19(3), 425-442.
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies*, 25(2), 65-86.
- Valente, J. R. (1989). Diversificación internacional: una alternativa para las necesidades de inversión de los fondos de pensiones. *Estudios Públicos*, 34, 115-146.
- Xia, Y., Liu, B., Wang, S., & Lai, K. K. (2000). A model for portfolio selection with order of expected returns. *Computers & Operations Research*, 27(5), 409-422.