

2006-06-01

Modelo matemático con quaternions para la cinemática de la marcha de un robot bípedo

Jaime Humberto Carvajal Rojas

Universidad de La Salle, Bogotá, jcarvajal@lasalle.edu.co

João Maurício Rosário

UNICAMP, SP, Brazil, rosario@fem.unicamp.br

Follow this and additional works at: <https://ciencia.lasalle.edu.co/ep>

Citación recomendada

Carvajal Rojas, Jaime Humberto and Rosário, João Maurício (2006) "Modelo matemático con quaternions para la cinemática de la marcha de un robot bípedo," *Épsilon*: Iss. 6 , Article 2.

Disponibile en:

This Artículos de investigación is brought to you for free and open access by the Revistas descontinuas at Ciencia Unisalle. It has been accepted for inclusion in Épsilon by an authorized editor of Ciencia Unisalle. For more information, please contact ciencia@lasalle.edu.co.

Modelo matemático con *quaternions* para la cinemática de la marcha de un robot bípedo

Jaime Humberto Carvajal Rojas* / João Maurício Rosário**

RESUMEN

El movimiento de las piernas en los humanos se caracteriza por ser discontinuo con respecto al piso, puede evadir obstáculos, desplazarse sobre planos inclinados, subir y bajar escaleras. Los robots bípedos tienen buena adaptación a diferentes tipos de superficies en donde los humanos viven y trabajan; por ejemplo, para transporte de objetos, recuperación y movimiento en ambientes peligrosos y otros. Este artículo tiene como objetivo principal, el desarrollo de un modelo matemático de la cinemática de un Robot Bípedo (RB), usando *quaternions*. Se presentan dos nuevas ecuaciones para calcular la posición y rotación del modelo matemático con *quaternions*.

Palabras clave: *quaternion*, modelo matemático, Robot Bípedo.

MATHEMATIC MODEL WITH *QUATERNION* FOR KINEMATICS IN THE WALKING OF A BIPED ROBOT

ABSTRACT

The human legs are characterized by a discontinuous movement regarding the floor; they can avoid obstacles, move on inclined planes and go upstairs and downstairs. The Biped Robots (BR) have an excellent adaptation to different types of surfaces where humans live and work, for example, transporting objects, recovery and movement in dangerous environments, and so on. The main purpose of this article is to develop a mathematic model of kinematics of a Biped Robot using *quaternion*. Two new equations are introduced to calculate the position and rotation of the mathematical model with *quaternion*.

Key Words: quaternion, mathematic model, Biped Robot.

* Decano Facultad de Ingeniería de Diseño y Automatización Electrónica. Doctorado en Ingeniería Mecánica con Especialización en Ingeniería Mecatrónica y Robótica Industrial de la Universidad Estatal de Campinas UNICAMP, SP, Brasil. Magister en Sistemas Automáticos de Producción de la UTP, Colombia. Ingeniero Mecánico de la UFPS, Cúcuta, Colombia. Correo electrónico: jcarvajal@lasalle.edu.co

** Professor Adjunto Departamento de Projeto Mecânico, Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, Campinas, SP, Brazil. Pesquisador CNPq nível 2ª do Brasil. Pós - doutorado em Automação e Robótica, com Especialidade em Robótica Industrial e Tecnologia Submarina, Alemanha. Doutorado em Automação e Robótica (Engenharia Elétrica), com Especialização em Produção Automatizada e Robótica, Paris, France. Mestrado em Engenharia Mecânica com Especialização em Mecânica dos Sólidos, UNICAMP, SP, Brazil. Graduação em Engenharia Mecânica, UNICAMP, SP, Brazil. Correo eletrônico: rosario@fem.unicamp.br

Fecha de recepción: enero 20 de 2006.
Fecha de aprobación: marzo 6 de 2006.

INTRODUCCIÓN

La marcha humana sobre piernas presenta la discontinuidad de contacto con el suelo, la evasión de obstáculos, el desplazamiento en superficies inclinadas y subir y bajar escaleras. Análogamente, la marcha de robots bípedos tiene la habilidad de movimientos en ambientes desestructurados: donde los humanos viven y trabajan; además pueden efectuar tareas de supervisión, mantenimiento y asistencia en todos los ambientes de desplazamiento humano. Los robots bípedos son sistemas mecatrónicos potenciales de uso industrial para transporte de cargas, transporte de personas en terrenos irregulares, rescate de seres en desastres, operaciones en ambientes peligrosos y otras operaciones en las cuales los humanos puedan sufrir accidentes. La forma bípeda es una de las principales tecnologías necesarias para el diseño y desarrollo de un androide o robot humanoide, como el que se muestra en la Figura 1. El modelo matemático para la cinemática de la marcha del Robot Bípedo de este trabajo, está basado en la configuración compuesta por la unión de siete elementos conectados por articulaciones de rotación con un grado de libertad cada una, formando en conjunto una estructura híbrida de seis Grados de Libertad (GDL) habilitado.



BIOMECAÍNICA

La biomecánica es la aplicación de los principios de la mecánica al cuerpo humano (Smith, 1997). La cinemetría es el conjunto de procedimientos biomecánicos para la obtención de las relevancias cinemáticas necesarias para describir la posición y el movimiento de los seres vivos. Existen estudios para calcular las fuerzas en los músculos cuando son sometidos a fuerzas externas, presentados por Braune e Fischer (1990), quienes también calcularon trayectorias, velocidades, aceleraciones, fuerzas y torques en las articulaciones y segmentos del cuerpo humano, en 31 fases del ciclo de marcha, estableciendo con sus estudios la base científica del análisis de la marcha humana. Con el surgimiento de la microelectrónica comenzaron a emplearse Diodos Emisores de Luz (LED) para la detección cuantitativa de trayectorias en el espacio, colocados estos LED en puntos relevantes del cuerpo del individuo y conectados por hilos para medir las grandezas involucradas en el movimiento (Pedotti, 1990). Una comparación prolija entre los diferentes sistemas de movimiento usados en Biomecánica puede consultarse en Díaz Becerra (2002).

ROBOTS BÍPEDOS

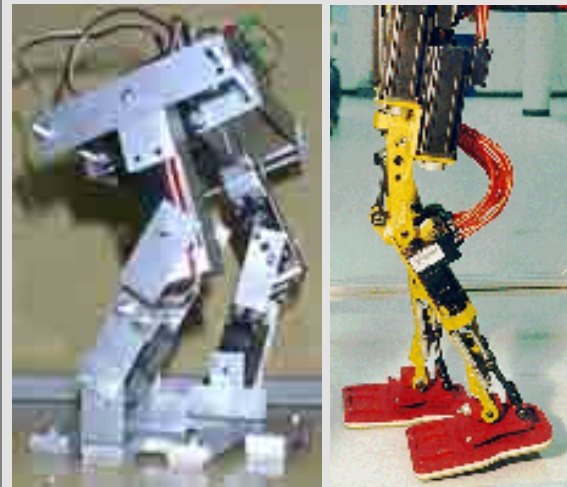
En 1964 se creó en Rusia un mecanismo bípedo capaz de transformar el movimiento de rotación en traslación, basado en el mecanismo de Chebyshev; en 1968 se propuso la máquina de andar ideal que consistía en un cuerpo sustentado por dos piernas sin masa, en 1973 se presentaron los primeros estudios sobre control y locomoción bípeda y se creó el término Punto de Momento Cero (ZMP). En 1969 en Japón fue construido uno de los primeros robots bípedos en forma antropomórfica en la Universidad de Waseda llamado WAP-1 por el profesor Kato y colaboradores (1983), (1985), (1988), (1990) y (1990). En 1971 se presenta el Robot Bípedo WL-5

de 11 GDL con control por computador. En 1973 se crea WABOT-1, robot antropomórfico humanoide, estáticamente estable y adaptado para la marcha; años después, Kato y sus colaboradores desarrollan un tipo de locomoción cuasi dinámica, cuya principal característica era que la transición de la fase de apoyo de un pie para el otro pie ocurría muy rápido y sin realizar la fase de doble apoyo. En 1981, Kato y sus colaboradores desarrollan el WL-9DR que era un modelo tridimensional de los miembros inferiores humanos y en 1985 desarrollan el WL-10R con servomotores, componentes estructurales en fibra de carbono, articulación en la pelvis que lo posibilita para marchar de lado, girar, marchar para adelante y marchar para atrás. En 1988 surgió WL-12R con 8 GDL para las piernas y 2 GDL para el tronco, con sensores de fuerza en los pies y en las articulaciones, con actuadores hidráulicos y con un paso de 30 cm en 0,8 segundos. En la Universidad de Tokio fueron desarrollados cinco versiones del Robot Bípedo Chiba Walker (CW), con siete segmentos, seis motores CC y con 5 GDL. En la industria del Japón se han desarrollado robots bípedos experimentales de 5, 7 y 9 GDL actuados con servomotores hidráulicos que pueden caminar en ambientes irregulares. En Brasil los investigadores han publicado trabajos de robots bípedos experimentales y teóricos. Díaz Becerra (2002) en la Universidad de Campinas, experimentó con un Robot Bípedo tipo RB-1 y desarrolló el modelo de la cinemática con matrices de transformación homogéneas para la orientación y análisis de la marcha por métodos geométricos.

EL ROBOT BÍPEDO RB-1

El Robot Bípedo RB-1 de este trabajo se ilustra en la Figura 3. Es un mecanismo articulado con siete segmentos rígidos que representan los miembros inferiores del cuerpo humano unidos entre si a través de articulaciones de rotación con un GDL cada una,

FIGURA 2. ROBOTS BÍPEDOS.



capaz de realizar la marcha en una superficie plana en modo estáticamente estable. Los ángulos de rotación en las articulaciones se identifican como q_i , donde $i = 1, 2, \dots, 6$, los siete segmentos rígidos del Robot Bípedo son conectados entre si por articulaciones y en cada una de ellas se establecen sistemas de coordenadas. Los siete segmentos rígidos son los dos pies, las dos piernas, los dos muslos y la pelvis. Este mecanismo de siete elementos es una estructura híbrida y para su modelo, es considerada como una cadena cinemática abierta con equilibrio instantáneo cuando uno de los dos pies está en contacto con el suelo. En equilibrio, las configuraciones singulares se minimizan. La cabeza, el tronco y las extremidades del robot humanoide son modelados como un segmento rígido integrado en el segmento de la pelvis.

Tradicionalmente, los robots industriales son modelados con matrices de transformación homogéneas sucesivas, aplicadas desde las coordenadas fijas de la base hasta las coordenadas del punto central de la garra TCP. En este caso el IR-1 es modelado como estos robots seriales, pero en lugar de aplicarse transformaciones homogéneas sucesivas, a partir de

la base, se aplican *quaternions*. Para este análisis de la cinemática, se considera el punto fijo instantáneo al lugar en donde uno de los pies está en contacto con el suelo y es llamado la base de referencia inercial, mientras que las demás articulaciones de rotación se están moviendo. Cuando el pie en balanceo se aproxima al suelo, instantáneamente la base de referencia inercial es trasladada a ese pie y así sucesivamente. De esta forma se analiza la marcha de este Robot Bípedo RB-1, para modelar la cinemática.

Una vez establecida la localización de las bases fija y móvil, se hace necesario establecer las relaciones entre ellas, es decir, cómo representar un mismo vector en cada una de las bases. Considerándose que la transformación de un vector cualquiera de la base B1 para la base B2 es realizada multiplicándose el vector por la matriz de transformación MT1. De manera análoga, para transformar un vector de la base B2 para B1, basta multiplicarlo por la inversa de MT1, porque una propiedad de la matriz de transformación es que $[MT_i]^{-1} = [MT_i]^T$. Con *quaternions* el análisis acontece en forma similar, porque también son representaciones vectoriales en donde se cumple que $q^{-1} = q^T$, o sea, que el inverso de un *quaternion* es igual a su transpuesta.

QUATERNIONS

Los *quaternions* se definen como la suma $q = q_0 + \mathbf{q}$ con la siguiente representación $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$. Su conjugado es similar al conjugado de un número complejo $q^* = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$ que es igual al inverso del quaternion $q^{-1} = q^*$.

El producto de *quaternions* es complicado y se define como el producto especial fundamental que satisface las siguientes reglas vectoriales:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ ij &= k, \end{aligned}$$

Es posible relacionar un ángulo con un *quaternion* de manera similar a como se puede asociar un ángulo con una matriz de rotación Chow (1992). Con base en esta consideración, el *quaternion* que define el operador es siempre un *quaternion* normalizado o *quaternion* unitario de la forma $q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2}$; análogo a $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ en donde θ es definido y satisface la restricción $\theta \in [0, \pi]$.

El producto especial de *quaternions* cuando $q = \cos \beta + \mathbf{K} \sin \beta$ se escribe:

$$pq = p_0q_0 - \mathbf{p} \circ \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (1)$$

El triple producto quaternion $q \circ \mathbf{v} \circ q^*$ se interpreta como *quaternions* operadores de rotación. Para aplicar estos operadores a un vector en \mathbf{R}^3 es necesario que el vector \mathbf{v} sea un *quaternion* puro. Para definir el *quaternion* operador de rotación L_q asociado con el *quaternion* q y aplicado al vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= L_q(\mathbf{v}) \\ &= q \circ \mathbf{v} \circ q^* \\ &= \end{aligned} \quad (2)$$

Este operador representa una rotación en \mathbf{R}^3 , el eje de rotación es la parte vectorial de q y el ángulo de rotación es dos veces el ángulo asociado con el *quaternion* q . La primera propiedad algebraica de este operador es su linealidad, o sea que $L_q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = L_q(\mathbf{v}) + L_q(\mathbf{w})$ y la segunda propiedad algebraica es que su norma o longitud, que es invariante bajo el operador *quaternion*.

. Esta propiedad es necesaria, si el operador es para describir una rotación. Los tres términos de la expresión pueden representarse en forma expandida con matrices de la forma . Donde Q es la matriz (Kuipers, 1999).

Con base en lo anterior se establece el siguiente teorema:

«Para cualquier *quaternion* unitario de la forma y para cualquier vector la acción del operador sobre puede ser interpretada geoméricamente como una rotación 2q del vector alrededor de como el eje de rotación (Kuipers, 1999).»

CINEMÁTICA CON QUATERNIONS

En la Figura 3 se representa el sistema de coordenadas para el RB-1 de donde se obtiene el modelo de la cinemática directa con *quaternions*, desarrollando la siguiente secuencia:

$$\hat{C}_i = \cos \frac{\theta_i}{2}$$

Paso 1. Desplazamiento nulo y rotación θ_0 en torno de Z_0 : $\mathbf{P}_1(Nulo) \mathbf{R}_1(Z_0, \theta_0)$

Paso 2. Desplazamiento de O_0 una distancia d_1 a lo largo de Y_0 y rotación θ_1 en torno de Z_1 arribando al sistema O_1 : $\mathbf{P}_2(Y_0, d_1) \mathbf{R}_2(Z_1, \theta_1)$

Paso 3. Desplazamiento de O_1 una distancia d_2 a lo largo de Y_1 y rotación θ_2 en torno de Z_2 arribando al sistema O_2 : $\mathbf{P}_3(Y_1, d_2) \mathbf{R}_3(Z_2, \theta_2)$

Paso 4. Desplazamiento de O_2 una distancia d_3 a lo largo de $-Z_2$ y rotación θ_3 en torno de Z_3 arribando al sistema O_3 : $\mathbf{P}_4(-Z_2, d_3) \mathbf{R}_4(Z_3, \theta_3)$

Paso 5. Desplazamiento de O_3 una distancia d_4 a lo largo de $-Y_3$ y rotación de θ_4 en torno de Z_4

arribando al sistema O_4 : $\mathbf{P}_5(-Y_3, d_4) \mathbf{R}_5(Z_4, \theta_4)$

Paso 6. Desplazamiento de O_4 una distancia d_5 a lo largo de $-Y_4$ y rotación θ_5 en torno de Z_5 arribando al sistema O_5 : $\mathbf{P}_6(-Y_4, d_5) \mathbf{R}_6(Z_5, \theta_5)$

Para la secuencia anterior, los desplazamientos \mathbf{P} están definidos por los siguientes vectores de posición:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= 0,0,0 & \mathbf{r}_2 &= 0,d_1,0 & \mathbf{r}_3 &= 0,d_2,0 \\ \mathbf{r}_4 &= 0,0,-d_3 & \mathbf{r}_5 &= 0,-d_4,0 & \mathbf{r}_6 &= 0,-d_5,0 \end{aligned}$$

Igualmente, las rotaciones están definidas por los siguientes *quaternions* cuando \hat{C}_i y están definidos de la siguiente forma

$$\text{y } \hat{S}_i = \sin \frac{\theta_i}{2},$$

entonces se tiene:

$$Q_i = (\hat{C}_i, 0,0,\hat{S}_i) \text{ , para } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

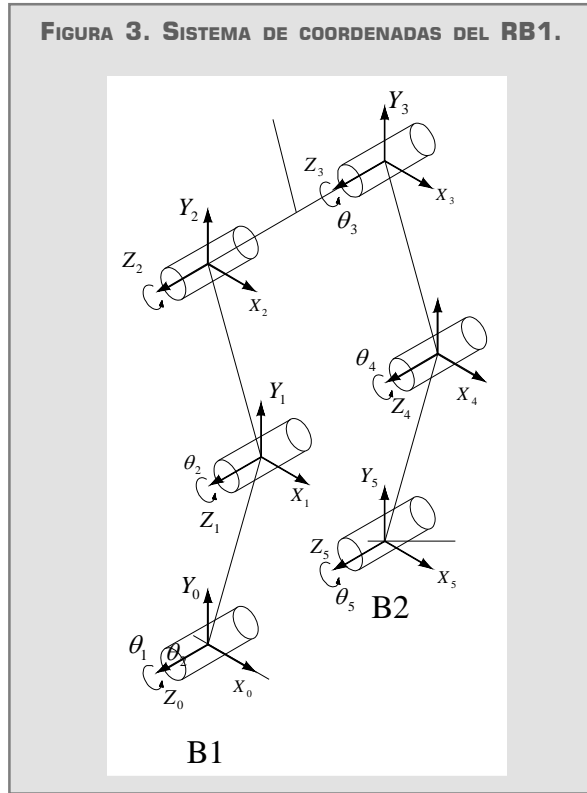
Si primero se aplica una traslación representada por el vector \mathbf{r} seguida por una rotación representada por el *quaternion* Q al sistema $O_i X_i Y_i Z_i$ resulta un nuevo sistema $O_{i+1} X_{i+1} Y_{i+1} Z_{i+1}$ tal que las coordenadas de un vector de posición \mathbf{p} en el sistema conocidas en el sistema se puede calcular con la siguiente expresión matemática:

$$\mathbf{P} = (0, \mathbf{p}_{i-1}) = Q_i \circ (0, \mathbf{p}_i) \circ Q_i^* + (0, \mathbf{r}_i) \quad (3)$$

Y para la rotación se puede expresar por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{i-1} = Q_i \mathbf{R}_i \quad (4)$$

Donde \mathbf{r}_i y Q_i son respectivamente, desplazamiento y posterior rotación, que permiten convertir el sistema de coordenadas O_{i-1} en el nuevo sistema de coordenadas O_i .



CÁLCULO DE LA POSICIÓN

Aplicando consecutivamente las expresiones (3) y (4) desde el sistema O_0 hasta el sistema O_5 se obtiene el siguiente conjunto de expresiones para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$(0, \mathbf{p}_0) = Q_1 \circ (0, \mathbf{p}_1) \circ Q_1^* + (0, \mathbf{r}_1)$$

$$\mathbf{R}_0 = Q_1 \mathbf{R}_1$$

$$(0, \mathbf{p}_1) = Q_2 \circ (0, \mathbf{p}_2) \circ Q_2^* + (0, \mathbf{r}_2)$$

$$\mathbf{R}_1 = Q_2 \mathbf{R}_2$$

$$(0, \mathbf{p}_2) = Q_3 \circ (0, \mathbf{p}_3) \circ Q_3^* + (0, \mathbf{r}_3)$$

$$\mathbf{R}_2 = Q_3 \mathbf{R}_3$$

$$(0, \mathbf{p}_3) = Q_4 \circ (0, \mathbf{p}_4) \circ Q_4^* + (0, \mathbf{r}_4)$$

$$\mathbf{R}_3 = Q_4 \mathbf{R}_4$$

$$(0, \mathbf{p}_4) = Q_5 \circ (0, \mathbf{p}_5) \circ Q_5^* + (0, \mathbf{r}_5)$$

$$\mathbf{R}_4 = Q_5 \mathbf{R}_5$$

$$(0, \mathbf{p}_5) = Q_6 \circ (0, \mathbf{p}_6) \circ Q_6^* + (0, \mathbf{r}_6)$$

$$\mathbf{R}_5 = Q_6 \mathbf{R}_6$$

Por substitución consecutiva, en las anteriores expresiones se obtiene:

$$(0, \mathbf{p}_0) =$$

$$Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 Q_6 (0, \mathbf{r}_7) Q_6^* Q_5^* Q_4^* Q_3^* Q_2^* Q_1^* +$$

$$Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 (0, \mathbf{r}_6) Q_5^* Q_4^* Q_3^* Q_2^* Q_1^* +$$

$$Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 (0, \mathbf{r}_5) Q_4^* Q_3^* Q_2^* Q_1^* +$$

$$Q_1 Q_2 Q_3 (0, \mathbf{r}_4) Q_3^* Q_2^* Q_1^* + Q_1 Q_2 (0, \mathbf{r}_3) Q_2^* Q_1^* +$$

$$Q_1 (0, \mathbf{r}_2) Q_1^* +$$

$$(0, \mathbf{r}_1)$$

$$(0, \mathbf{p}_0) = Q_{123456} (0, \mathbf{r}_7) Q_{654321}^* +$$

$$Q_{12345} (0, \mathbf{r}_6) Q_{54321}^* + Q_{1234} (0, \mathbf{r}_5) Q_{4321}^* +$$

$$Q_{123} (0, \mathbf{r}_4) Q_{321}^* + Q_{12} (0, \mathbf{r}_3) Q_{21}^* +$$

$$Q_1 (0, \mathbf{r}_2) Q_1^* + (0, \mathbf{r}_1)$$

Considerando que

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = (\hat{C}_\theta, 0, 0, \hat{S}_\theta)$$

para las variables de articulación. Generalizando se puede escribir:

$$[P_0] = [Q]_{i=1}^m \circ [P_m] \circ [Q^*]_{i=1}^m + \sum_1^m (Q_1^{m-i} \circ r_m^i \circ Q^{*1}_{m-i}) \quad (5)$$

$$P_0 = w + \sum_1^m W \quad (6)$$

En donde:

$[Q]_{i=1}^m$: *quaternion* de posición del marco de la garra del robot respecto al marco de la base fija.

$[Q^*]_{i=1}^m$: Producto de *quaternions* de rotación Q desde i = 1, 2,...,10 hasta m = 10.

$[B]_{i=1}^m \circ [P_m] \circ [Q^*]_{i=1}^m$: *quaternion* de posición del sistema objetivo con respecto al sistema de coordenadas m. Si el sistema objetivo coincide con el sistema de la garra m, entonces, se tiene que P = 0, 0, 0, 0

$[Q^*]_{i=1}^m$: Producto de *quaternions* conjugado desde m = 10, 9,..., i cuando i = 1.

$\sum_1^m W$: Sumatoria producto del operador *quaternion*. Para $w =$ y

$$\sum_1^m W = \sum_1^m (Q_1^{m-i} \circ r_m^i \circ Q^{*1}_{m-i})$$

CÁLCULO DE ROTACIÓN

Las relaciones entre los quaternions que definen la rotación de las articulaciones en el sistema de coor-

denadas B2, o sea, O_5 respecto a un sistema de coordenadas de B1, o sea, O_0 por composición de *quaternions* se obtiene con la siguiente expresión, si i = 1, 2,..., m y m = 6

$$R_{i-1} = Q_i R_i \quad (7)$$

$$R_0 = Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 Q_6 R_6 = Q_{123456} R_6$$

Generalizando se puede escribir:

$$R_0 = Q_i^m R_m \quad (8)$$

Con las expresiones (6) y (8) se puede determinar la posición y la orientación de la Base B2 del RB-1 respecto al sistema de coordenadas de la base B1 en función de las coordenadas de articulación θ_0 , θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_5 y θ_6 , correspondiendo por tanto a la solución del problema de la cinemática directa.

CONCLUSIÓN

Los *quaternions* son una herramienta matemática tradicional que pueden emplearse para calcular el modelo matemático de la cinemática de sistemas robotizados, manipuladores, robots bípedos y robots antropomórficos. Los *quaternions*, en comparación con las matrices de transformación homogéneas, pueden ser más rápidos para el cálculo cuando se precisa conocer tan solo una característica, como la posición o la orientación.

El cálculo de la cinemática de robots bípedos es fundamental para el desarrollo de los robots humanoides o antropomórficos y este modelo matemático de la cinemática, también es base para la programación y control autónomo de estos dispositivos mecatrónicos.

BIBLIOGRAFÍA

- Barrientos, A.; Peñin, L.; Balaguer, C. y Aracil, R. Fundamentos de Robótica. Madrid: McGraw Hill, 1997.
- Braume, W. y Fisher, O. The human gait. Springer Verlag, 1990.
- Carvajal, J. Modelamiento, simulación y programación *off line* de robots y dispositivos mecatrónicos integrados en células flexibles de manufactura FMC. Tesis de doctorado. Brasil: UNICAMP SP, 2004.
- Chow, J. Quaternion Kinematic and Dynamic Differential Equations. IEEE Transactions on Robotics and Automation 8 1, (1992).
- Denavit J. y Hartenberg R. A kinematic notation for lower-pair mechanism based on matrices. *ASME J. Appl. Mech.*, (1955): 215-221.
- Díaz, C. Desenvolvimento de um robô Bípede para locomoção em Ambiente Desestruturado. Tese de Doutorado. Brasil: UNICAMP SP. 2002.
- Hamilton, W. «On Quaternions». *Proc. Royal Irish Academy* 3, (1844): 1-16.
- Hamilton, W. «On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions». *Proceeding of the Royal Irish Academy* 2, (1843) 424-434.
- Kato T.; Takanishi, A. y Kato I. The realization of quasydynamic walking machine. Fourt CISM.IFToMM Symposium On Theory and Practice of Robots and Manipulators, 1983.
- Kuipers, J. B. Quaternions and Rotation Sequences. New Jersey: Princeton University Press, 1999.
- Pedotti, A. «Future Perspectives in Europe for Quantitative Análisis of movement». *Proc. Gait Análisis. State-of-the-art of Measuring Systems and Their Importantce in Prosthetic and Orthotic Technology*. Berlin, 1990.
- Smith, L.; Weis. E. y Lehmkuhl, L. *Cinesiología Clínica de Brunnstrom* São Paulo: Manole, 1997.
- Takanishi A. «Robot bípede walking stabilized with trhnk motion». In *Mechanical Engineering. Symposium on Robotics*, 1990.
- Takanishi, A. *et al.* Realization of dynamic biped walking stabilized with trunk motion. In *Proc. Rob. Manuf. Syst.*, 1988.
- Takanishi, A. *et al.* Realization of dynamic biped walking stabilized with trunk motion. In *Proc. International Conference on Advanced Robotics*, 1985.
- Takanishi, A. *et al.* Realization of dynamic biped walking stabilized with trunk motion on a sagittally uneven surface. Tsuchiura: IEEE Proc. Int. Workshop Intelligent Robots Systems, 1990.