1-1-1984

Casi cálculo

Hernan Feria Moron
Universidad de La Salle, Bogotá

CASI - CALCULO

HERNAN FERIA MORON

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física.

Director: Dr. JOSE ANTONIO MEDINA

UNIVERSIDAD SOCIAL CATOLICA DE LA SALLE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y FISICA
Bogotá, 1984

Ni la Universidad, ni el asesor, ni el jurado de grado son responsables de las ideas expuestas por el graduando.

Acuerdo N° 028 del 21 de Octubre de 1982- Consejo Directivo.

Presidente del Jurado.

Jurado.

Jurado.

Noviembre de 1984

AGRADECIMIENTOS

El Autor expresa sus agradecimientos:

A ANTONIO VELASCO MUÑOZ, Director del Departamento de Matemáticas y Física.

A FERNANDO RUIZ, Secretario del Departamento de Matemáticas y Física.

A JOSE ANTONIO MEDINA, Profesor de Matemáticas.

A la UNIVERSIDAD DE LA SALLE.

a Todas aquellas personas que en una u otra forma colaboraron en la realización del presente trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCION

Sin lugar a dudas, el cálculo ha sido una de las herramientas más poderosas que ha desarrollado el hombre en su afán por comprender la naturaleza y como tal merece ser enseñado de tal forma que el estudiante la comprenda desde sus cimientos. Desafortunadamente, en los cursos de análisis II que se dictan a nivel de bachillerato, cursos que de análisis poco tienen, la mecanización y la memorización es algo que prima sobre la verdadera comprensión de los conceptos, llegandose al punto en el que los estudiantes solo saben aplicar fórmulas y dar definiciones que poco o nada comprenden. Este sentido meramente utilitarista que se le ha querido dar al cálculo y la dificultad que representa para el alumno el entender conceptos tan elaborados como el de límite, es lo que me ha motivado a escribir este trabajo, en el cual pretendo hacer una introducción al cálculo, a través de la cual y sin que se tenga que recurrir a conceptos como el de límite, el alumno de grado 11 pueda captar y desarrollar los conceptos básicos del cálculo. Para esto, el trabajo se desarrolla con una metodología en la cual al estudiante no se le develará completamente el objeto del conocimiento, sino que éste a través de la observación, el análisis y el preguntarse a sí mismo, también participará en la develación de las verdades que nos ofrece el objeto del conocimiento.

El trabajo se halla dividido en dos capítulos, de los cuales el primero trata sobre las diferencias finitas, diferencias que se trabajan a diario y que dan origen a la función diferencia y al operador diferencia, operador que posee varias propiedades, siendo una de ella la lineabilidad. Aparte de ésto se da una interpretación de la función diferencia y se habla de la diferencia de orden n-ésimo, demostrándose que la diferencia n-ésima de una función polinómica de grado n es constante.

El segundo capítulo trata sobre algunas aplicaciones de la función diferencia, siendo una de ellas la demostración de que la pendiente de una recta es independiente de los puntos que tomemos para determinarla. Aparte se vé como podemos valernos de ella para determinar la pendiente aproximada de una curva en un punto de su dominio, con el error de aproximación que querramos, y para determinar la razón media de cambio de una función. Todo esto, haciendo énfasis en la comprensión del concepto y en la interpretación de los resultados que obtenemos. También cabe destacar que aunque en su mayor parte este casi-cálculo se halla limitado a funciones polinómicas, se echa mano de ciertas funciones no polinómicas con el objeto de mostrar algunos problemas que se presentan y a la vez ir creando la necesidad de pasar del casi-cálculo a un cálculo más exacto. Asímismo, se proponen una serie de ejercicios para que el alumno afianze los conceptos y detecte cuestiones como: La continuidad de una función no implica que exista la pendiente de la curva en cada punto de su dominio, si una función es contínua el valor de $\Delta f(a)$ se aproxima a cero a medida que tenemos un h más y más pequeño, sin interesar el punto $a \in D_f$ que tomemos.

1. DIFERENCIAS FINITAS

Frecuentemente leemos o decimos expresiones como:

1. El valor del pasaje en bus subió $1.50
2. Las reservas internacionales del país cayeron en US $500 millones durante el mes y,
3. El costo de vida bajó en un 6% con relación al año anterior.
4. X Corredor llegó con una diferencia de tres minutos respecto al ganador.

Las cuales son el resultado de la utilización, que sin saberlo le damos a las diferencias finitas. En consecuencia, si nos llegan a preguntar: ¿Qué son las diferencias finitas? La primera impresión que tendremos es la de estar ante algo completamente desconocido, y como es natural exclamaremos algunas preguntas, propias de éstas situaciones. ¿Qué es eso?, ¿Para qué sirven? a lo cual contestaremos en este capítulo y a lo largo del trabajo.

1.1. CONCEPTO DE DIFERENCIA FINITA

Supongamos que tenemos la siguiente tabla, en donde se ilustra el valor del consumo de agua para cierta residencia, durante los primeros cinco meses del año.

Table 1. Tabla de Valores.

MES	VALOR DEL CONSUMO
1	2.100
2	2.300
3	2.400
4	2.450
5	2.330

Basándonos en esta tabla, podemos establecer la diferencia en el valor del consumo de agua entre dos meses cualesquiera, por Ejemplo: Entre el tercer y segundo mes ¿Cómo haríamos? obviamente, la solución a ésta, consistiría en planter una sencilla resta de la siguiente manera:

$$\$2.420 - \$2.300 = \$120.$$

Con base en la cual podemos afirmar: En el tercer mes el valor del consumo de agua aumentó $120. Ahora, si hubiera dado -$120 ¿Qué interpretación le daríamos a éste resultado?. En tal caso diríamos: El consumo en lugar de aumentar, bajó en $120.

Procediendo tal y cual como en el caso anterior, podemos obtener la diferencia de consumo entre cualquier par de meses; sin embargo, de mane-

1.

DIA DE LA SEMANA	DINERO GASTADO	DIFERENCIAS
1	50	
2	70	
3	60	
4	80	
5	90	
6	400	

2.

AÑO	AUMENTO EN EL COSTO DE VIDA	DIFERENCIAS
1.980	17%	
1.981	20%	
1.982	24%	
1.983	18%	

3.

ESTATURA	PESO PROMEDIO	DIFERENCIAS
1.55	54	
1.60	59	
1.65	63	
1.70	66	

ra particular centraremos nuestro interés sobre las diferencias entre valores sucesivos que aparezcan en la segunda columna de la tabla, las cuales denominaremos diferencias finitas.

Una vez establecido el concepto de diferencia finita, nos preguntaríamos ¿Se podrán tabular tales diferencias? En caso de ser posible ¿Cómo lo haremos?. Para tal efecto, a la tabla anterior le agregaremos una tercera columna, en donde dispondremos las diferencias de tal modo que queden entre los elementos de la columna anterior que han servido para determinarla.

Tabla 2. Tabla de Diferencias.

MES	VALOR DEL CONSUMO	DIFERENCIAS
1	2.100	
		200
2	2.300	
		120
3	2.420	
		30
4	2.450	
		120
5	2.330	

EJERCICIOS:

Calcule las diferencias entre los Sucesivos Valores que aparecen tabulados a continuación:

4.

HORA	TEMPERATURA	DIFERENCIAS
9 A.M.	8	
10 A.M.	10	
11 A.M.	11	
12 M.	13	
1 P.M.	14	
2 P.M.	16	
3 P.M.	15	
4 P.M.	12	

En las anteriores tablas, a lo mejor chemos notado que los elementos o valores de la primera Columna están igualmente espaciados, cosa que es común cuando se calculan diferencias finitas. Aparte de esto, parece ser que ya conocíamos este tipo de tablas. ¿Dónde las habremos visto? ¿Acaso con anterioridad hemos trabajado en ellas? Recordemos que cuando se quiere efectuar la gráfica de una función f, se calcula f(x) para determinados valores de x, los cuales se tabulan para luego ser pasados a un plano de coordenadas Cartesianas, por Ejemplo:

Efectuar la gráfica de la función f definida por $F(x)= x + 2$

Tabla 3. Tabulación de f(x)

X	f(x)
0	2
1	3
2	4

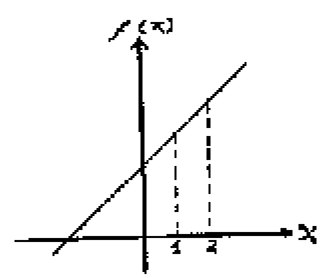


Figura.1

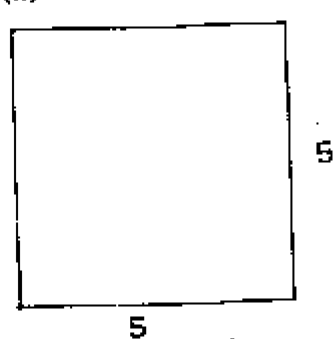
Al comparar ésta tabla con las anteriores ¿Qué observamos? ¿Qué interrogantes surgen? Si nuestras observaciones han sido acertadas, el interrogarse a planternos sería: ¿Podemos hablar de diferencias finitas entre las imágenes bajo una determinada función? Ante lo cual cabría preguntarnos ¿Por qué no? Acaso en nuestro ejemplo sobre consumo de agua ¿No podemos decir que la tabla corresponde a una tabulación de la función f: Valor del consumo de agua?.

1.2. FUNCION DIFERENCIA

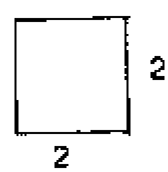
Consideramos la función f definida por $f(x)= x^2$, por medio de la cual es posible calcular el área de un cuadrado cuyos lados miden X. Pues bien, si queremos determinar la diferencia entre el área de un cuadrado cuyos lados miden dos centímetros y otro cuyos lados miden cinco centímetros ¿Qué debemos hacer? lo primero sería calcular sus áreas, las cuales estarían dadas por f(5) y f(2), luego restaríamos estos valores tal como se ve a continuación:

f : Función área de un cuadrado.

$f(x) = X^2$



Area = $f(5) = (5\ cm)^2 = 25\ cm^2$



Area = $f(2) = (2cm)^2 = 4\ cms^2$

Diferencia de Area = 25 cms^2 - 4 cm^2 = 21 cm^2

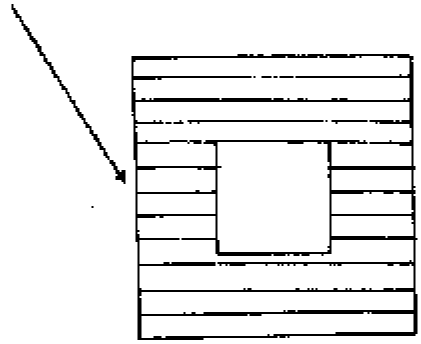


Figura 2

Procediendo de igual manera, podemos calcular la diferencia de área entre los cuadrados cuyos lados miden la longitud X que aparece en las siguecintes tablas:

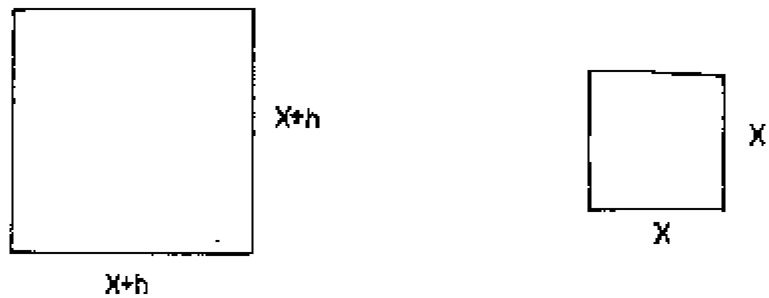
Tabla 4.

X	f(x)	Dif.
2	4	
		21
5	25	
		39
8	64	
		57
11	121	
		75
14	196	

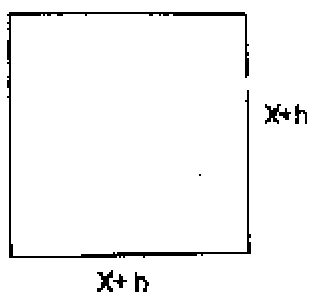
Tabla 5.

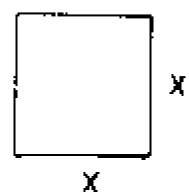
X	f(x)	Dif.
1	1	
		63
8	64	
		161
15	225	
		259
22	484	
		357
29	841	

Como se observa, en la primera tabla el intervalo o diferencia entre los valores de X fue de tres, mientras que en la segunda fué de siete; así que este intervalo puede ser cualquier número h, siendo posible el determinar la diferencia de área entre dos cuadrados cuyos lados miden X y X + h; siempre y cuando $(x+h) \in Df$.



Pero, ¿Cuál será la diferencia de área entre estos dos cuadrados?.
Como el área del cuadrado más pequeño está dado por $f(x) = X^2$, lo primero que debemos hacer es determinar $f(x+h)$ y luego efectuar la respectiva resta.





Area $= f(x) = X^2$

Area $= f(x+h) = (x+h)^2$

$$\text{Diferencia de Area} = (x+h)^2 - X^2$$
$$= X^2 + 2xh + h^2 - X^2$$
$$= 2xh + h^2 \qquad (1)$$

Si hacemos $x = 2$ t $h = 3$ ¿Qué obtenemos? Veamoslo.

$$\text{Diferencia de Area} = 2x3x2 + 3^2$$
$$= 12 + 9$$
$$= 21$$

Que es precisamente la diferencia de área entre dos cuadrados cuyos lados miden dos y cinco, respectivamente (Ver Tabla 4), de modo que la expresión (1) permite calcular la diferencia de área entre dos cuadrados cualesquiera; dicho de otra manera, por medio de la expresión (1) podemos establecer diferencias entre las imágenes bajo la función f. Ahora, ¿Qué nombre le daríamos a esta expresión? ¿Me define una función? Tomando h= 1, grafiquémos las diferencias para algunos valores de X.

Tabla 6.

X	Diferencia de Area
0	1
1	3
2	5

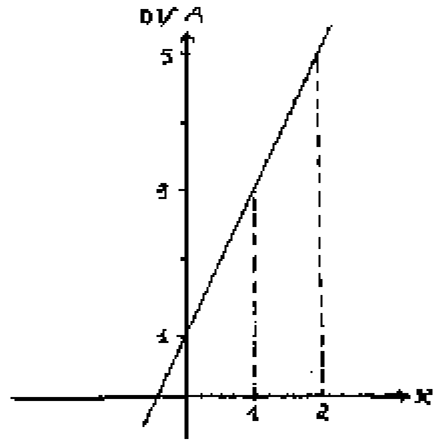


Figura 3

Como puede verse, no hay dos puntos de la gráfica que tengan la misma primera componente, por lo tanto, estamos ante la representacion gráfica de una función; sin embargo, cabría preguntarnos ¿El que hayamos tomado h = 1 tendrá que ver en algo con el resultado anterior?. De ninguna manera, pues la expresión Dri de A = $2hx + h^2$ ó $y = 2hx + h^2$, co-

$$\boxed{2h}\,X \quad + \quad \boxed{h^2}$$

$$\boxed{m}\,X \quad + \quad \boxed{b}$$

rresponde a la de una recta con pendiente $m = 2h$ y que corta al eje Y en $b = h^2$, así que siempre obtenemos la gráfica de una recta y por ende la de una función, la cual llamaremos función diferencia o primera diferencia de f, cuya definición formal daremos a continuación.

DEFINICION.

Si f es una función cualquiera y h una constante tal que $(x+h) \in Df$, denominaremos primera diferencia de f ó función diferencia de primer orden para el intervalo h *, a la función cuyo valor en $x \in Df$ viene dado por:

$$f(x+h) - f(x) \qquad (2)$$

Esta nueva función la simbolizaremos por Δf, y su valor particular en X, lo designaremos:

$\Delta f(x)$ Se lee : Delta f de X

O sea: $\quad f(x) = f(x+h) - f(x)$

Si observamos la expresión Δf. puede verse que al ser colocado el símbolo Δ al lado de la función f, ésta se transforma en la función diferencia. Al símbolo Δ lo llamaremos el operador diferencia. A h, lo

---

*Algunas veces por abreviar, solo hablaremos de la diferencia de f.

llamaremos el intervalo de diferencia y a menos que se diga lo contrario, entenderemos que siempre se está utilizando el intervalo de diferencia h.

1.2.1. Interpretación de la función Diferencia.

Particularmente para la función f definida por $f(x) = x^3$, si tomamos $h = 1$, su función diferencia estará determinada por:

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+1) - f(x) \\
&= (x+h)^3 - x^3 \\
&= x^3+3x^2+3x+1 - x^3 \\
&= 3x^2 + 3x + 1
\end{aligned}
$$

Ecuación por medio de la cual podemos obtener algunos valores de Δf, tales como:

$$
\begin{aligned}
\Delta f(1) &= 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 \\
&= 7 \\
\Delta f(-2) &= 3(-2)^2 + 3(-2) + 1 \\
&= 7 \\
\Delta f(3,5) &= 3(3,5)^2 + 3(3.5) + 1 \\
&= 48.25
\end{aligned}
$$

Pero éstos valores ¿Qué significado tendrán? ¿Qué interpretación les daremos?. O más bien aún ¿Qué interpretación podemos darle a Δf? Si

$x > 0$, una posible salida a estos interrogantes consistiría en decir que Δf me permite determinar la diferencia de volumen entre dos cubos cuyos lados miden X y X+1 (volumen del cubo $= J^3$); sin embargo, puede ser que f me permita establecer el número de bacterias que tendríamos en un cultivo de estas, al cabo de un tiempo x, en cuyo caso Δf no tendría el significado anterior. Entonces, ¿Será que no hay una interpretación para la función diferencia, la cual sea independiente de lo que f represente? ¿Cuál podría ser ésta interpretación?. Si queremos buscarla ¿Qué punto de partida debemos tomar?. De hecho, lo más conveniente es que partamos de la forma como hemos definido la función diferencia, definición que ilustraremos en la gráfica de una función f, tomada arbitrariamente y cuyo análisis gráfico puede sernos de utilidad.

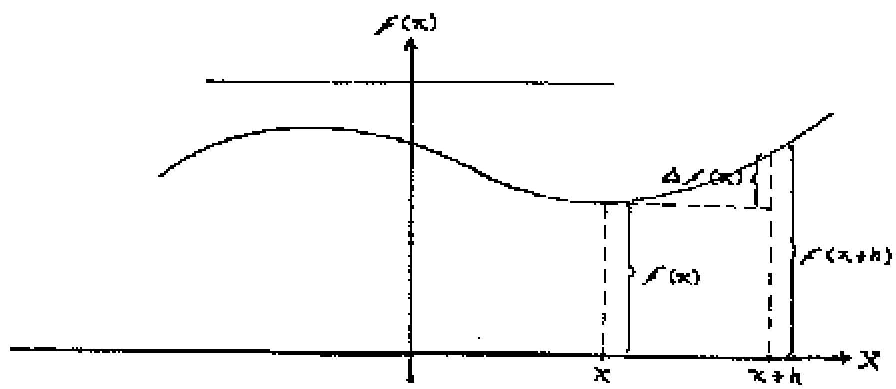


Figure 4

De acuerdo a la gráfica ?qué podemos decir respecto a $\Delta f(x)$? ¿Qué representa $\Delta f(x)$? Como puede verse, al pasar de x a (x+h), el valor de f varía de f(x) a f(x+h), variación que está dada por $\Delta f(x)$; así que la función diferencia puede interpretarse como la función cuyo valor en X corresponde al incremento experimentado por f(x), cuando incrementamos el valor de X en h (O sea, al pasar de x a x+h).

Ejemplo 1.

Consideremos la función f definida por $f(x) = 2X$, y tomemos $h = 2$

En tal caso, la función diferencia está definida por:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+2) - f(x)\\ &= 2(x+2) - 2X\\ &= 4\end{aligned}$$

¿Qué significado tendrá el que las diferencias entre f(x+2) y f(x) sean iguales a 4?. Ello quiere decir que independientemente del valor de X, el incremento experimentado por f(x) siempre será de 4 unidades al pasar de x a x+2 (Ver Figura 5), lo cual como veremos en el próximo capítulo, ocurre cuando f(x) me define una recta Y, si las diferencias no fueran constantes. ¿La gráfica de f sería una recta?.

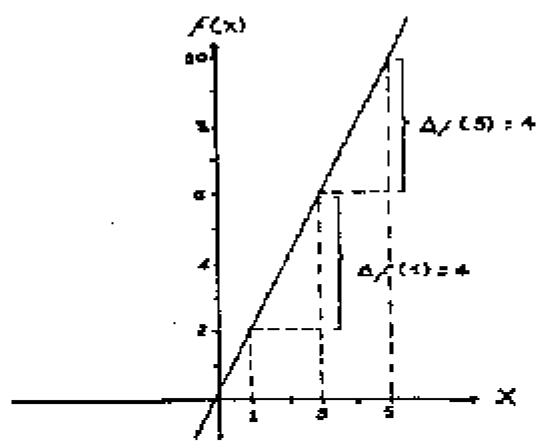


Figura 5

Ejemplo 2.

Sea la función f definida por $f(x) = X^2 + 2X$. Para $h = 0,5$, hallar su función diferencia.

Utilizando la definición de función diferencia, tendremos que:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x + 0,5) - f(x)\\ &= (X + 0,5)^2 + 2(X + 0,5) - (X^2 + 2x)\\ &= X^2 + X + 0,25 - 2X + 1 - X^2 - 2X\\ &= X + 1,25\end{aligned}$$

En este caso, el valor de las diferencias no es constante sino que de-

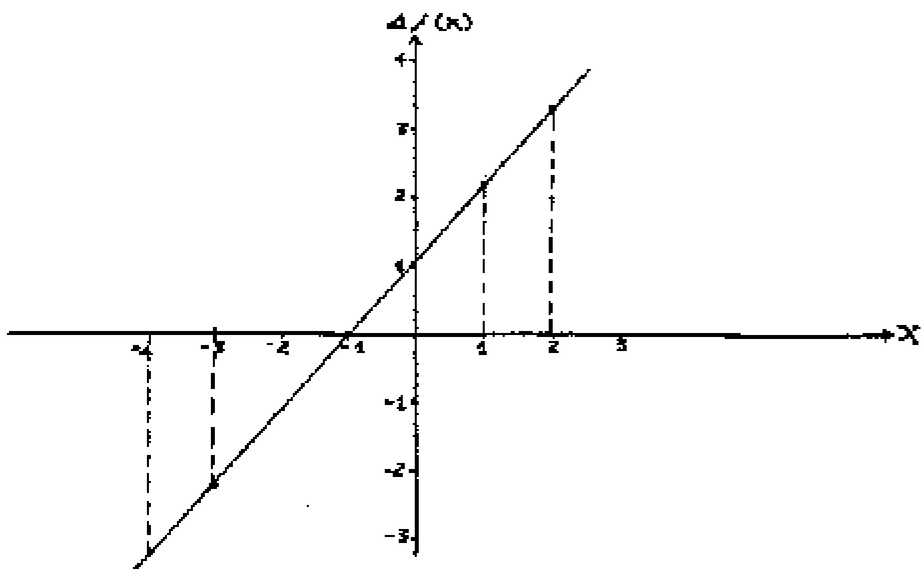


Figura 6

penden del valor de X, siendo mayores al crecer X; lo cual significa que al pasar de X a X +0,5 el incremento experimentado por f(x) es mayor el crecer X (Ver Figura 7).

$$\Delta f(x) = X + 1,25$$

$\Delta f(-3.5) = -3,5 + 1,25 = -2,25$

$\Delta f(\ -3) \ = -3 + 1,25 \quad = -1,75$

$\Delta f(-1.25) = -1,25 + 1,25 = \quad 0$

$\Delta f(\ 1\ ) = \ 1 + 1,25 \quad = 2,25$

$\Delta f\ (1.5) = \ 1,5 + 1,25 = 2,75$

$$-3.5 > -3 > -1 > -1.25 > 1 > 1.5$$

$$\Delta f(-3.5) > \Delta f(-3) > \Delta f(-1) > \Delta f(1.25) > \Delta f(1.5)$$

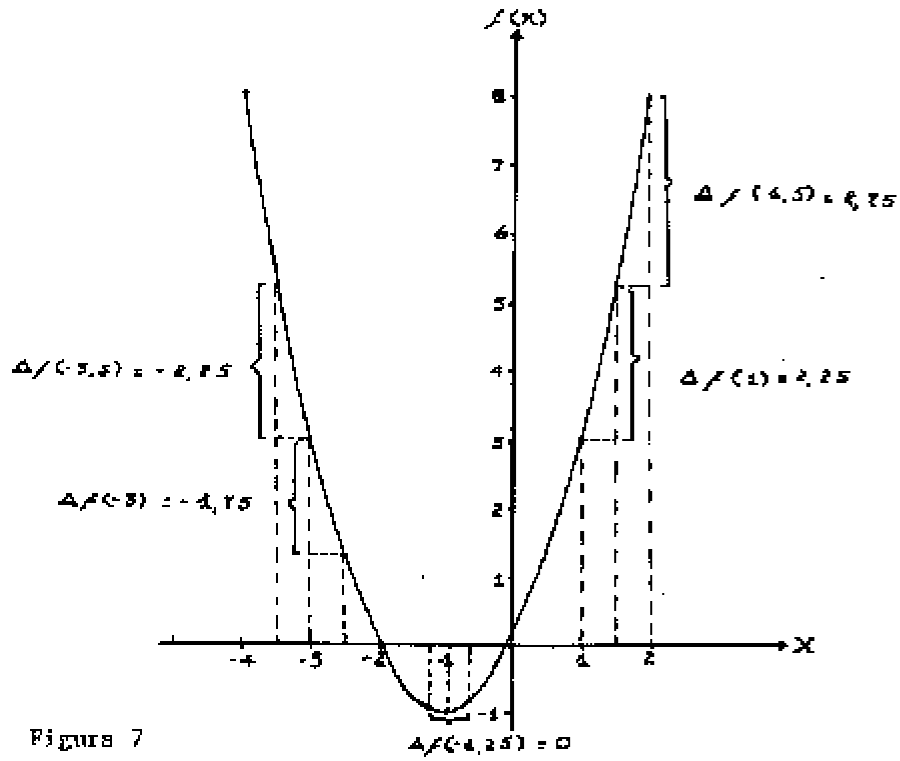


Figura 7

En el párrafo anterior digimos que como $\Delta f(x)$ dependía de X, el incremento en $f(x)$ era mayor al crecer X; ¿Será que podemos tomar esto como una regla general? o ¿Existirán casos en donde no se cumple?.

Ejemplo 3.

S : f está definida por $f(x) = X^2 - 3X$ y $h = 0,5$. Hallar Δf

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+o,5) - f(x)\\ &= (x+0,3)^3 - 3(x+0,5) - (x^3 - 3x)\\ &= X^3 + 1,5\,X^2 + 0,75X + 0,125 - 2X - 1,5 - X^3 + 3x\\ &= 1,5\,X^2 + 0,75X - 1,375.\end{aligned}$$

De acuerdo a esta ecuación, el valor de $\Delta f(x)$ depende del que le asignemos a X, lo que a primera instancia nos hace pensar que el incremento experimentado por $f(x)$ es mayor al crecer X; no obstante, es prudente el

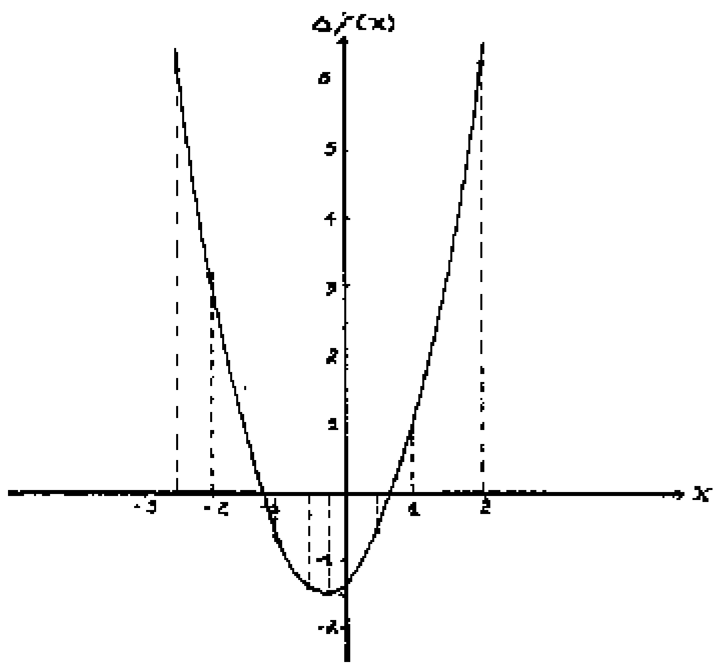


Figura 8

preguntarnos ¿Tal razonamiento es válido?. Al respecto, veamos que nos dicen las gráficas de f y f. (Ver Fig. 8).

$-2,5 > -2 > -0,5 > -1/4 \quad \therefore \quad ($

$\Delta f(-2,5) > \Delta f(-2) > \Delta f(-,05) > \Delta f(-1/4)$

$0 > 0,5 > 1 > 2$

$\Delta f(0) > \Delta f(0,5) > \Delta f(1) > \Delta f(2) \quad \therefore \quad ($

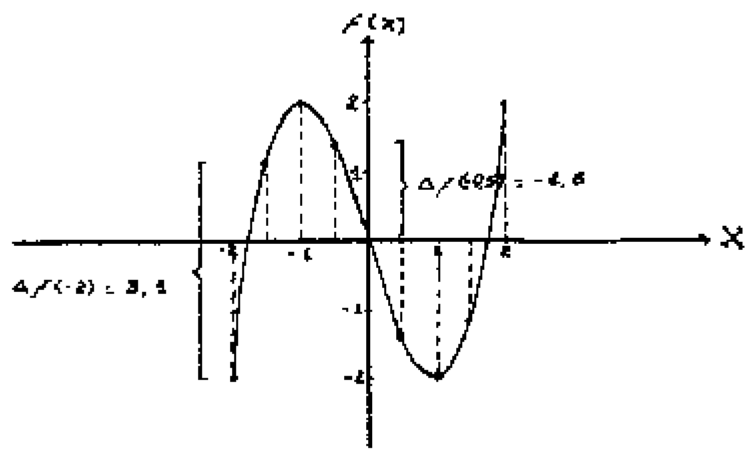


Figura 9

Una vez ovservadas estas gráficas, valdría la pena recordar el refrán "Una imágen vale más que mil palabras" ya que sin lugar a dudas, el incremento experimentado por f(x) no siempre es mayor al crecer X, como si ocurría en el ejemplo anterior.

Además de lo anotado en los párrafos anteriores, cabe destacar lo siguiente: De acuerdo a la interpretación que le dimos a la función diferencia, $f(-2) = 3,1$ significa que al pasar de $X = -2$ a $X = 1.5$, $f(x)$ experimenta un incremento de 3,1 unidades. Ahora, si hubiésemos tomado $h = 3$, $f(x) = 9X^2 + 27x + 18$ y $f(-2)= 0$, lo cual indicaría que $f(X)$ no experimenta incremento al pasar de $x = -2$ a $x = 1$, pero si observamos la gráfica de f(Ver Fig. 9) podemos ver que entre $X= -2$ y $x= 1$, el valor de $f(x)$ aumenta a dos y disminuye a -2, lo que nos induce a pensar que la información dada porΔf, en este caso, sería incorrecta, planteándose el interrogante ¿Qué debemos hacer para obviar esto? De hecho, en primera instancia lo apropiado sería escoger un h pequeño; más sin embargo, puede suceder que f sufra variaciones bruscas (Ver fig. 10), en cuyo caso, el escoger un h pequeño no sería suficiente, pues se presentaría el problema anotado (Obsérvese que al pasar de x. a x+h, el valor de f(x) disminuye bruscamente y luego empieza a aumentar, todo lo cual ocurre en un h pequeño). Entonces, aparte de escoger un h muy pequeño

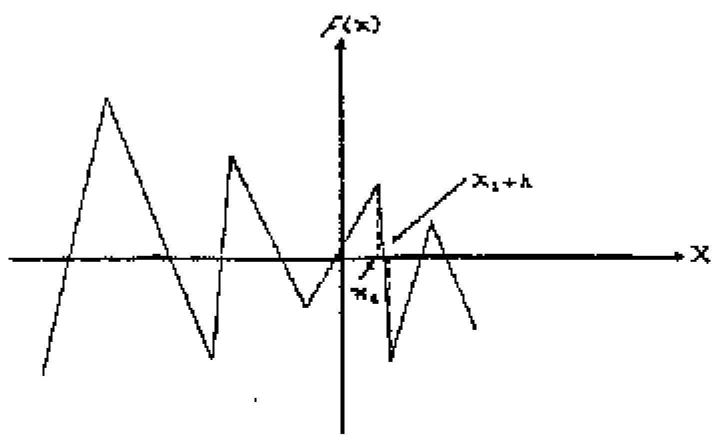


Figura 10

¿Qué debemos hacer para tener un buen margen de confiabilidad, respecto a la información que nos daΔf? Indudablemente, si el problema lo origina las variaciones bruscas de f, una buena solución sería: Aplicar el operador diferencia, solo a aquellas funciones que tengan un comportamiento suave (sin variaciones bruscas). sin sobresaltos. ¿Cómo Cuáles?

Ejemplo 4.

Cual es la diferencia de la función f*, cuya gráfica aparece a continuación.

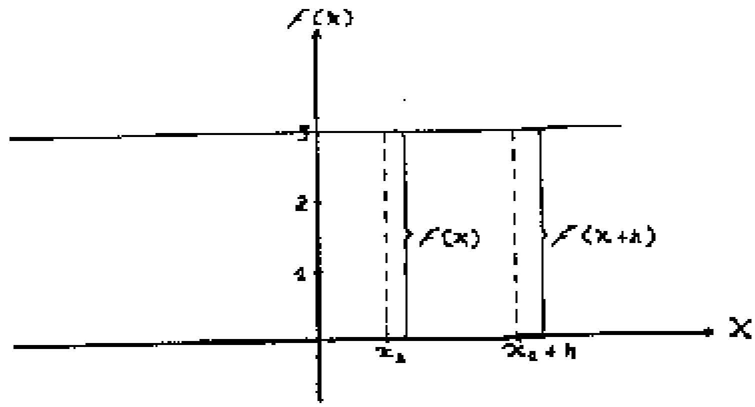


Figura 11

¿Qué podemos decir acerca de las diferencias entre f(x) y f(x+h)?. Como puede verse, f(x) no experimenta incremento al pasar de x, a x+h, así que las diferencias siempre serán nulas.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$
$$= 3 - 3$$
$$= 0$$

---

*De ahora en adelante cuando hablemos de una función f, nos estaremos refiriendo a una función polinómica a menos que digamos otra cosa.

Ejemplo 5.

Si la función f está definida por $f(x) = x^2 + 2x$. Cuál es su función diferencia.

Aplicando la definición de función diferencia, tendremos que:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x)\\ &= (x+h)^2 + 2(x+h) - (x^2 + 2x)\\ &= X^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - X^2 - 2X\\ &= 2xh + h(2+h)\end{aligned}$$

Ecuación a partir de la cual podemos obtener toda una serie de funciones, de acuerdo al h que escojamos; por ejemplo: Para h = 1

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= 2x(1) + 1(2+1)\\ &= 2x + 3 \qquad (4)\end{aligned}$$

Para h = 0,5

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= 2x\ (0,5) + 0,5(2+0,5)\\ &= x + 1,25 \qquad (5)\end{aligned}$$

Si calculamos cada una de estas funciones en $x = 0,5$; obtenemos:

Aplicando 4:

$$\begin{aligned}\Delta f(0.5) &= 2(0.5) + 3\\ &= 4\end{aligned}$$

Aplicando 5.

$$\Delta f(0,5) = 0,5 + 1,25$$

$$= 1,75$$

Valores que son diferentes, pero ¿Por qué? para responder a este interrogante debemos tener presente que aunque las diferencias se calculan entre imágenes de una misma función f, no debemos olvidar que (4) calcula el incremento experimentado por f (x) al pasar de x a x+1, mientras que (5) lo calcula para cuando pasamos de x a x+0.5 (Ver Fig. 12).

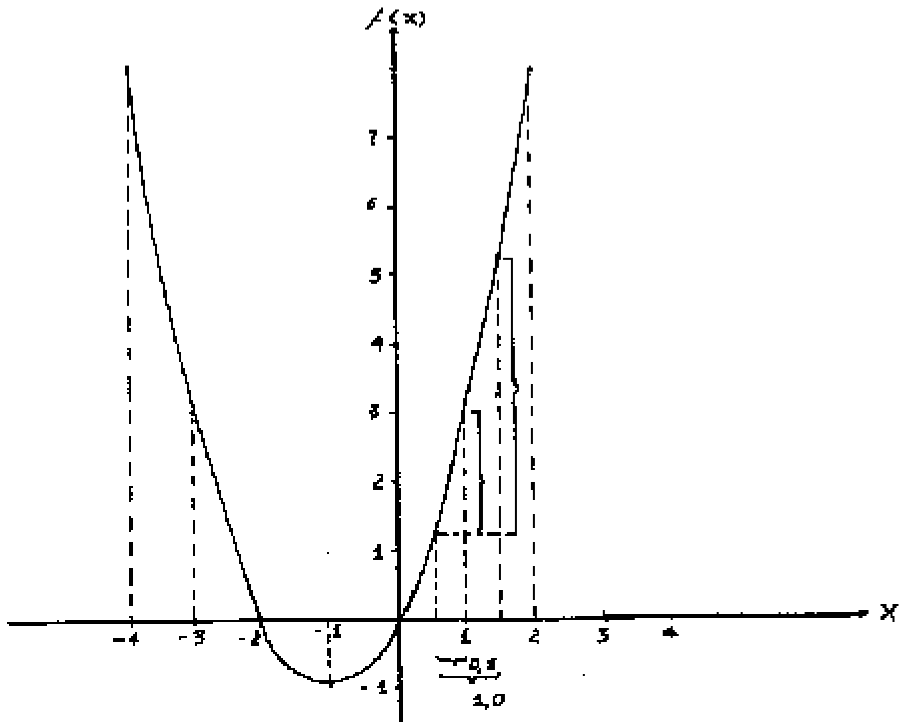


Figura 12

Observaciones:

1. Las diferencias de una función constante son nulas.

2. Si f es una función lineal, sus diferencias son constantes.

3. Aunque la única condición que le impusimos al h fue la de que (x+h) Df, lo más conveniente es escoger un h pequeño.
4. Debemos restringir la aplicabilidad del operador diferencia a aquellas funciones que tengan un comportamiento suave, para que en lo posible obviemos los inconvenientes que nos planteamos.

EJERCICIOS

1. Determinar la función diferencia de cada una de las funciones que aparezcan definidas a continuación:

1.1. $f_1(x) = x$

1.2. $f_2(x) = 2X^2 + 1$

1.3. $f_3(x) = (x-2)^2$

1.4. $f_4(x) =$

1.5. $f_5(x) = 3x + 5x^2$

1.6. $f_6(x) = 4$ Sen x

1.7. $f_7(x) = 4 + 9x$

1.8. $f_8(x) = \frac{x^2}{3}$

2. Las funciones diferencias que obtuvo en el punto anterior, calcúlelas en $x = 1$ y $x = 2$, tomando un $h = 0.4$

3. Grafique las funciones que se dieron inicialmente y sobre dichas gráficas represente las diferencias que obtuvo en $x = 1$ y $x = 2$

3.1. Qué nos dice $\Delta f(1)$, $\Delta f_2(2)$ y $\Delta f_3(1)$

4. El trabajo que debe hacerse para levantar un peso de 30 Kgs a una altura de x mts., está dado por $T(x) = 30x$. Cuál es la función diferencia de T y que nos permite establecer $\Delta T(x)$.

5. La fuerza que se requiere para estirar cierto resorte a una distancia de x cms, está dado por $f(x) = -2X$. Usando la función diferencia, determine la fuerza adicional que debe hacerse si queremos estirarlo desde una distancia de x cms a otra de (x+h) cms.

5.1. Si h= 2 y x = 3 ¿Cómo interpretaríamos a $\Delta f(3)$?

6. Si la función f está definida por $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$, tomando un $h = 0,1$; demuestre que no es cierta la afirmación: El incremento experimentado por f(x) crece al crecer X.

6.1. Puede decirse lo mismo si $f(x) = 4X^3$

6.2. Haga la gráfica de $f(x) = 4X^3$. Justifique la respuesta anterior.

1.3. PROPIEDADES DEL OPERADOR DIFERENCIA

En un ejemplo anterior vimos que si f está definida por $f(x) = X^2 + 2X$, entonces,

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x)\\ &= (x+h)^2 - 2(x+h) - (X^2+2X)\\ &= x^2 + 2Xh + h^2 - 2X - 2h - X^2 - 2X\end{aligned}$$

La cual podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= [\ (x^2+2hx+h^2) - X^2] + [\ 2\ (x+h) - 2X\ ]\\ &= [\ (x+h)^2 - X^2\ ] + [\ 2\ (x+h) - 2X\ ]\end{aligned}$$

Expresión que corresponde a la suma de la función diferencia de $f_1(x) = X^2$ y $f_2(x) = 2x$

$$\Delta f_1(x) = f_1(x+h) - f_1(x)$$
$$= (x+h)^2 - X^2$$

$$\Delta f_2(x) = f_2(x+h) - f_2(x)$$
$$= 2(x+h) - 2X$$

Si además de esta tenemos presente que la función f se puede considerar como la suma de las dos funciones anteriores ($f = f_1 + f_2$). ¿Cuál sería la conclusión a sacar?.

Siguiendo nuestras observaciones sobre la expresión (3), notaremos que el sumando $2(x+h) - 2x$ podemos escribirlo así:

$$2(x+h) - 2x = 2 [(x+h) - x]$$

Con lo cual tenemos:

$$\Delta f_2(x) = \Delta 2x$$
$$= 2(x+h) - 2x$$
$$= 2 [(x+h) - x]$$
$$= 2\Delta f(x) \qquad \therefore \qquad f(x) = x$$

y, ¿Qué significado tendrá esto?. A continuación daremos respuesta a estos interrogantes.

1.3.1. Diferencia de una Constante por una función.

Si C es una constante y f es una función cualquiera, la función diferencia de C.f es igual al producto de C por la función diferencia de f.

$$(C.f.) = C\ \Delta f.$$

$$(C.f(x)\ ) = C\ \Delta f(x) \qquad (4)$$

Demostración.

Como $C.\ f(x) = (C.f)\ (x)$

$$\begin{aligned} \Delta(C.f(x)) &= \Delta(C.f)\ (x) \\ &= (C.f)\ (x+h) - (C.f)\ (x) \\ &= C.f(x+h) - C.f(x) \\ &= C\ [\ f(x+h) - f(x)\ ] \\ &= C\ \Delta f(x) \end{aligned}$$

La diferencia de una constante multiplicada por una función es la constante por la diferencia de la función.

Antes de proseguir hay que destacar el hecho de que en la práctica no nos encontraremos con enunciados del tipo: "Si $f(x) = X^2$, y $C = 3$. ¿Cuál es la función diferencia de 3.f", ya que $3.f(x) = 3X^2$, y por tanto lo anterior se reduce a determinar la función diferencia de $f(x) = 3X^2$ Ante todo ésto surge la pregunta ¿Cómo aplicaremos la propiedad anterior? Veamoslo: Si tomamos a $f_1(x) = x^2$, podemos decir que $f = 3.f$, y por consiguiente.

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \Delta(3 \cdot f_1)(x) \\
&= \Delta[3 \cdot f_1(x)] \\
&= 3\,\Delta f_1(x) \\
&= 3\,[\,f_1(x+h) - f_1(x)\,] \\
&= 3\,[\,(x+h)^2 - X^2\,] \\
&= 6xh + 3h^2
\end{aligned}
$$

Como se observa, en el desarrollo anterior hemos sustituído a f por $3.f_1$, cosa que tendríamos que hacer cuando tuviesemos una función f del tipo $C.f_1 = f$, lo que en lugar de facilitar el proceso lo alargaría y hasta podría llegar a complicarlo, de ahí que en tales casos procederemos de una manera muy práctica y con la cual obtendremos los mismos resultados, tal como se ve a continuación:

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \Delta(3X^2) \\
&= 3\Delta x^2 = 3\,[\,(x+h)^2 - X^2\,] \\
&= 6\,xh + 3h^2
\end{aligned}
$$

Observación:

Cuando nos den una función f del tipo $C.f_1 = f$, reemplazamos a f(x) por su valor, pasamos la constante al lado izquierdo del operador y lo que queda lo tomamos como el valor en X de cierta función a la cual le estamos buscando su función diferencia.

1.3.2. Diferencia de la Suma de dos Funciones.

Si f1 +f2 son dos funciones cualesquiera.

$$\Delta(f1 + f2) = \Delta f1 + \Delta f2$$

$$\Delta(f1 + f2)(x) = \Delta f1(x) + \Delta f2(x) \qquad (5)$$

Demostración.

Aplicando la definición de función diferencia, tenemos:

$$\Delta(f1 + f2)(x) = (f1 + f2)(x+h) - (f1+f2)(x)$$

Ajora, como $(f1 + f2)(x+h) = f1(x+h) + f2(x+h)$

$$(f1 + f2)(x) = f1(x) + f2(x)$$

Al sustituirlas obtenemos:

$$\Delta(f1 + f2)(x) = [f1(x+h) - f1(x)] + [f2(x+h) - f2(x)]$$

$$= \Delta f1(x) + \Delta f2(x)$$

La función diferencia de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus funciones diferencias.

En lo referente a esta propiedad anotaremos tres cosas.

1. Su aplicabilidad puede ser extendida a cualquier número finito de funciones.

2. Habitualmente solo tomaremos una función f, la cual expresará la correspondiente suma.

3. Esta propiedad y la primera que vimos (1.3.1.) las sintetizaremos diciendo que el operador diferencia es lineal, lineabilidad que como veremos más adelante, reviste de una gran importancia, pues entre otras cosas nos permite encontrar la diferencia de cualquier función polinómico.

Ejemplo 1.

Si $f(x) = 3x^2$, cual es la función diferencia de f.

Aplicando la primera propiedad del operador diferencia, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \Delta(3X^2) \\
&= 3\Delta X^2 \\
&= 3\ (2xh + h^2) \\
&= 6xh + 6h^2
\end{aligned}
$$

Tomando h= 0,2, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= 6.\ X\ .\ 0,2 + 6(0.2)^2 \\
&= 1,2\ x + 0.24
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.

Consideremos la función f definida por $f(x) = \text{Log. } X^3$, para h = 0,3 ¿Cuál es su función diferencia?

$$\Delta f(x) = \Delta \text{Log } x^3$$
$$= \Delta 3 \text{ Log } X = 3 \Delta \text{ Log } X$$
$$= 3 \left[\text{ Log } (x+0,3) - \log x \right]$$
$$= 3 \log \left(\frac{x + 0,3}{x}\right)$$

En $x = 2$

$$\Delta f(2) = 3 \log (2,3/2)$$
$$= 3 \times 0,0606$$
$$= 0,1820$$

Lo cual nos indica que entre el logaritmo de 8 y 8,3 hay una diferencia de valores igual a 0,1820 aproximadamente.

Ejemplo 3.

Si f está definido por $f(x) = X^2 + X/2$. Cuál es su función diferencia.

¿En este caso podemos aplicar la segundapropiedad del operador diferencia? De hecho podemos aplicarla y para ello consideraríamos a $f1(x) = x^2$ y $f2\ (x) = X/2$, de modo que:

$$\Delta f(x) = \Delta(f1(x) + f2(x))$$
$$= \Delta X^2 + \Delta X/2$$
$$= \Delta X^2 + 1/2 \Delta X$$
$$= 2xh + h^2 + 1/2\ h$$

En particular para h = 2

$$\Delta f(x) = 2.\ x\ .\ 2 + (2)^2 + 2/2$$
$$= 4X + 5$$

Ejemplo 4.

Sea la función f definida por $f(x) = 3X^3 + X^2 - 2X + 3$. Cuál es su función diferencia si tomamos h=1

$$\Delta f(x) = \Delta(3X^3 + x^2 - 2X + 3)$$

Utilizando la lineabilidad del operador diferencia, tenemos:

$$\Delta f(x) = \Delta 3X^3 + \Delta X^2 - \Delta 2X + \Delta 3$$
$$= 3\Delta X^3 + \Delta X^2 - 2\Delta X + \Delta 3$$

Pero como ya conocemos la función diferencia de cada uno de los sumandos, lo único que debemos hacer es reemplarlas.

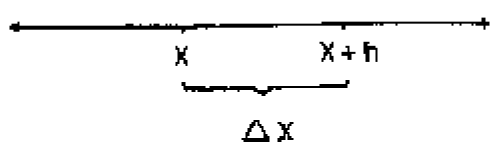
$$\Delta f(x) = 3(3x^2 + 3X + 1) + (2x+1) - 2 + 0$$
$$= 9X^2 + 9x + 3 + 2x + 1 - 2$$
$$= 9x^2 + 11X + 2$$

Ejemplo 5.

Si f(x) = X. La función diferencia de f es:

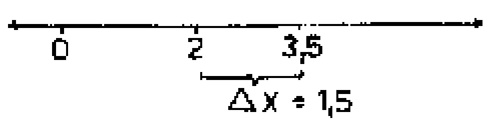
$$\Delta f(x) = \Delta X$$
$$= (x+h) - X$$
$$= h$$

De donde deducimos que $\Delta x = h$, y debido a esta igualdad, el intervalor de diferencia h podemos designarlo por Δx; pero, ¿Qué nos dice Δx?. Siguiendo al pie de la letra la interpretación que le dimos a la función diferencia, x nos dará el incremento experimentado por $f(x)$, al pasar de x a $x+h$. Ahora, como $f(x) = X$ y $\Delta x = h$, sobre el eje X podemos hacer una representación gráfica de lo que sucede sin tener que recurrir al plano cartesiano, tal como se ve a continuación:



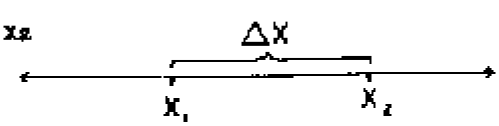
¿Qué podemos decir respecto a ΔX?. Como lo habran notado, podemos decir que Δx es el incremento experimentado por la variable independiente X al pasar de X a $X+h$. En particular para:

1. $X = 2$ y $X+h = 3.5$



$$\Delta X = 3.5 - 2.0$$
$$= 1.5$$

2. $X = X_1$ y $X+h = X_2$



$\Delta x = x2 - x1$

EJERCICIOS

Encuentra las funciones diferencias de:

1. $f(x) = 12X^2 + 6X - 1$
2. $f(x) = 5/9\ (x-32)$
3. $f(x) = 1/5\ (5X^3 + 3x)$
4. $f(x) = 1/2\ m\ x^2$
5. $f(x) = m\ x$
6. $f(x) = 9/5X + 32$
7. $f(x) = U.X - 1/2\ g\ X^2$

Hasta ahora solo hemos considerado la función diferencia de C.f y f1+f2, pero también sería interesante saber lo que sucede con la función diferencia de f1xf2 y de f1/f2. ¿Qué podemos decir respecto a Δ(f1xf2) y Δ(f1/f2)?. ¿Será que $\Delta(f1xf2) = \Delta f1 \times \Delta f2$ y $\Delta(f1/f2) = \Delta f1/\Delta f2$? Veamoslo:

1.3.5. Diferencia del producto de dos funciones.

Supongamos que f1 y f2 son dos funciones cualesquiera, aplicando la definición de función diferencia, tendremos que:

$\Delta(f1 \times f2)\ (x) = (f1 \times f2)\ (x+h) - (f1 \times f2)\ (x)$

Pero como $(f1 \times f2)(x+h) = f1(x+h)\ f2(x+h)$

y $(f1 \times f2) = f1(x)\ f2(x)$

Al hacer las respectivas sustituciones, obtenemos:

$$\Delta (f. \times f2)(x) = f1\ (x+h)\ f2\ (x+h) - f1(x)\ f2(x)$$

Además de esta, en la figura 13 podemos ver si una función f está definida por f(x), el valor de f(x+h) es equivalente al de $f(x) + \Delta f(x)$ ($f(x+h) = f(x) + \Delta f(x)$).

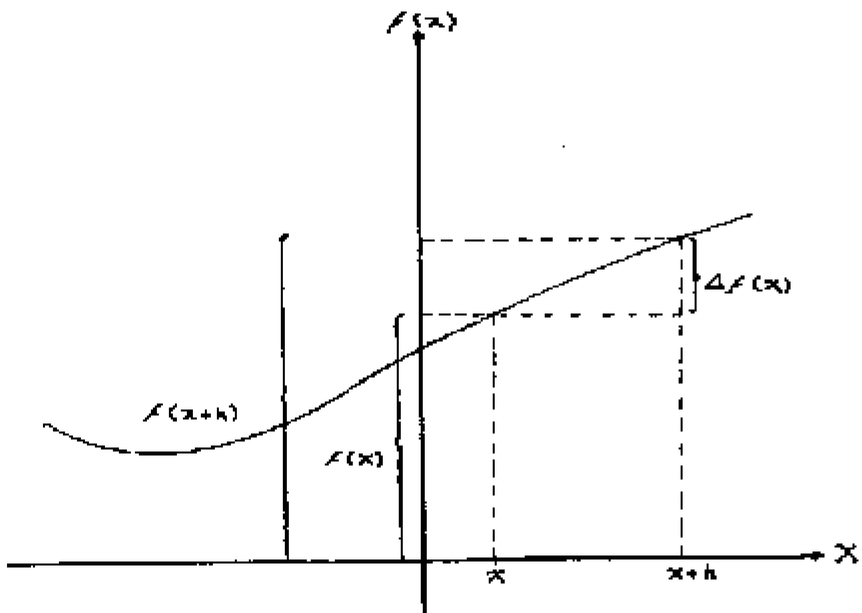


Figura 13

Particularmente, para f1 y f2

$$f1(x+h) = f1(x) + \Delta f1(x)$$

$$f2(x+h) = f2(x) + \Delta f2(x)$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}\Delta(f1 \times f2)(x) &= [f1(x) + \Delta f1(x)][f2(x) + \Delta f2(x)] - f1(x)\, f2(x) \\ &= f1(x)\, f2(x) + f1(x)\Delta f2(x) + \Delta f1(x)\, f2(x) + \Delta f1(x) \\ &\quad \Delta f1(x) - f1(x)\, f2(x) \\ &= f1(x)\Delta f2(x) + \Delta f1(x)\, f2(x) + \Delta f1(x)\Delta f2(x) \qquad (6)\end{aligned}$$

Como puede verse, en el tercer sumando de (6) aparece el producto $\Delta f1(x) \cdot \Delta f2(x)$, para el cual sería interesante preguntarnos ¿Qué sucede si h es muy pequeño? ¿Podemos aproximar su valor a cero?. En efecto, se el h es muy pequeño, las diferencias $[f1\ (x+h) - F(x)]$ y $[f2(x+h) - f(x)]$ también lo serán, por lo tanto, si el h que escogemos es lo suficientemente pequeño, podemos decir $f1(x) \cdot f2(x) \approx 0$, con la cual

$$\Delta(f1 \times f2)\ (x) \approx \Delta f1(x)\ f2(x) + f1(x)\Delta f2(x) \qquad (9)$$

$$\Delta(f1 \times f2) \approx \Delta f1 \times f2 + f1 \times \Delta f2$$

La diferencia del producto de dos funciones es aproximadamente igual a la diferencia de la primera función por la diferencia de la segunda, si escogemos un h lo suficientemente pequeño.

1.3.4. Diferencia del Cociente de dos funciones.

Supongamos que f1 y f2 son dos funciones cualesquiera, con $f2(x) \neq 0$ y sea f el cociente de las dos funciones anotadas. En tal caso, aplican-

---

* Se lee aproximadamente igual (espero sea claro, el porqué [illegible] la igualdad).

de la definición de función diferencia, tendremos que:

$$\Delta f(x) = \Delta(f1/f2)\,(x) = (f1/f2)\,(x+h) - (f1/f2)\,(x)$$

$$= \frac{f1(x+h)}{f2(x+h)} - \frac{f1(x)}{f2(x)}$$

$$= \frac{f2(x)\ f1(x+h) - f1(x)\ f2\,(x+h)}{f2(x+h)\ f2(x)}$$

Ahora, como $f1(x+h) = f1(x) + \Delta f1(x)$

y $f2(x+h) = f2(x) + \Delta f2(x)$

Al reemplazar obtenemos:

$$\Delta(f1/f2)\,(x) = \frac{f2(x)[f1(x)+\Delta f1(x)] - f1(x)[f2(x) + \Delta f2(x)]}{[f2(x) + \Delta f2(x)]\ f2(x)}$$

$$= \frac{f2(x)\Delta f1(x) - f1(x)\Delta f2(x)}{[f2(x) + \Delta f2(x)]\ f2(x)}$$

Si tomamos un h lo suficientemente pequeño ¿Qué sucede con $f2(x) + \Delta f2(x)$?

Pues, en tal caso podemos decir que $[f2(x) + \Delta f2(x)] \approx f2(x)$*

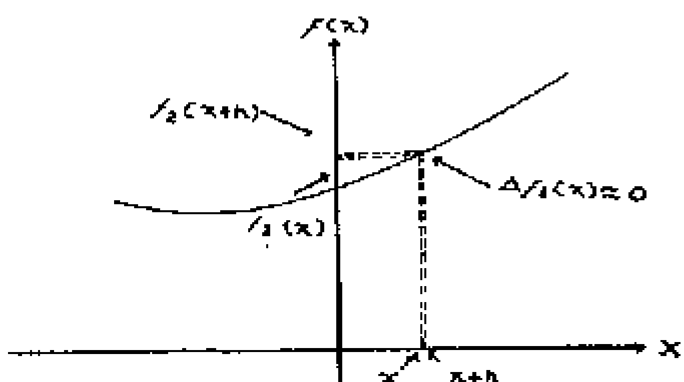


Figura 14

---

*La afirmación $[f2(x)+ f2(x)] \approx f2(x)$, es válida para cualquier $X \in Df$ siempre y cuando la gráfica de f no presente interrupciones en algún $X \in Df$.

Por lo tanto

$$\Delta (f1/f2)\ (x) \simeq \frac{f2(x)\Delta f1(x) - f1(x)\Delta f2(x)}{[f2(x)]^2} \tag{9}$$

$$\Delta(f1/f2) \simeq \frac{f2\Delta f1 - f1\Delta f2}{f2^2}$$

La diferencia del cociente de dos funciones es aproximadamente igual a la fracción que tiene como denominador el cuadrado de la función divisor y como numerador, el divisor multiplicado por la diferencia del dividendo menos el producto del dividendo, y la diferencia del divisor. Si h es lo suficientemente pequeño.

Ejemplo 1.

Si $f(x) = x^5$. Cuál es la función diferencia de f.

En este caso, a la función f podemos considerarla como el producto de las funciones $f1(x) = x^2$ y $f2(x) = x^3$. Así que aplicando la fómula (6)

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \Delta x^5 = \Delta(x^2 \cdot x^3) \\ &= \Delta(x^2)\ x^3 + x^2\Delta x^3 \\ &= (2xh + h^2)\ x^3 + x^2(3x^2h + 3xh^2 + h^3) + \Delta x^2\Delta x^3 \\ &= 5x^4h + 4x^3h^2 + x^2h^3 + \Delta x^2\Delta x^3 \qquad (10) \end{aligned}$$

Seguidamente calculemos a $f1(x)$ y $f2(x)$ en $x=1$, luego tomemos varios h y veamos el incremento que produce el producto $\Delta f1(x)\Delta f2(x)$ en (10), cuando h es muy pequeño.

$$\Delta f1(x) = \Delta x^2 = 2xh + h^2$$

En x = 1

$$\Delta f1(1) = 2 \ . \ 1 \ . \ h + h^2$$
$$= 2h + h^2$$

$$\Delta f2(x) = \Delta x^3 = 3x^2 h + 3xh^2 + h^3$$

En x = 1 $\quad \Delta f2(1) = 3. \ 1^2 \ h + 3 \ . \ 1 \ h^2 + h^3$

$$= 3h + 3h^2 + h^3$$

Tabla 7.

h	$\Delta f1(1)$	$\Delta f2(1)$	$\Delta f1(1)\Delta f2(1)$
0.2	0.44	0.728	0.32032
0.1	0.21	0.331	6.951×10^{-2}
10^{-3}	2.001×10^{-3}	3.003×10^{-3}	6.009×10^{-6}
10^{-4}	2.0001×10^{-4}	3.0003×10^{-4}	6.0009×10^{-8}
10^{-5}	2.00001×10^{-5}	3.00003×10^{-5}	6.00009×10^{-10}

Como puede verse, si h es lo suficientemente pequeño, el incremento que produce $\Delta f1(1)\Delta f2(1)$ es prácticamente nulo.

Ejemplo 2.

Cuál es la función diferencia de f. si $f(x) = (2x + 1)(x^3 - 1)$

suponiendo que el h a escoger es muy pequeño, tendremos:

$$\Delta f(x) = \Delta[(2x+1)\ (x^3 - 1)]$$
$$\simeq [\Delta(2x+1)]\ (x^3-1) + (2x+1)\ [\Delta(x^3 - 1)]$$
$$\approx 2h\ (x^3 - 1) + (2x+1)\ (3x^2h + 3xh^2 + h^3)$$
$$\approx 8hx^3 + (6h^2 + 3h)\ x2 + (2h^3 + 3h^2)x - 2h$$

Ejemplo 3.

Determinar la función diferencia de f. si $f(x) = \dfrac{1}{2X^2 - 2x + 1}$

Aquí tenemos el caso de un cociente en el cual $f1(x) = 1$ y $f2(x) = 2x^2 + 2x + 1$. De modo que si el h a escoger es muy pequeño

$$\Delta f(x) = \Delta\left[\frac{1}{2x^2 + 2x + 1}\right]$$
$$\approx \frac{(2x^2 - 2x + 1)\ \ 1\ \ - 1\ \ (2x^2 - 2x + 1)}{(2x^2 + 2X + 1)}$$
$$\approx \frac{4xh + 2h^2 - 2h}{(2x^2 + 2x + 1)^2}$$

Tomando varios h (muy pequeños) veamos las diferencias de valores que hay entre $[f2(2) + \Delta f2(2)]\ f2(2)$ y $[f2(2)]^2$

$$f2(2) = 2 - 2^2 + 2.2 + 1 = 13$$
$$\Delta f2(2) = 4 - 2 - h + 2h^2 - 2h = 6h + 2h^2$$

Tabla 8.

h	$[f2(2) + f2(2)]\ f2(2)$	$[f2(2)]^2$	Diferencias
0.2	185.64	1.69	16.64
10^{-2}	169.7813	1.69	7.8×10^{-1}
10^{-3}	169.07813	1.69	7.8×10^{-2}
10^{-4}	169.007813	1.69	7.8×10^{-3}
10^{-6}	169.00007813	1.69	7.8×10^{-5}

OBSERVACIONES.

Con las fórmulas que hemos desarrollado podemos utilizar las funciones diferencias que conocemos y obtener las de muchas otras, en lugar de tener que partir a cada instante de la definición básica, con la cual hemos simplificado y facilitado su cálculo.

En nuestros ejemplos hemos hallado la función diferencia de una función f. Ahora bien, como f es una función, nos preguntaríamos ¿Podemos repetir la operación, aplicando el operador a esta nueva función?.

1.4. DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN Y ORDENES SUPERIORES

Consideremos la función f definida por $f(x) = x^2 + 2x$, para la cual sabemos que $f(x) = 2xh + h^2 + 2h$. Pues bien, como Δf es una función, $\Delta(\Delta f)$ es la función cuyo valor en x viene dado por:

$$\Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

Pero $\qquad \Delta f(x+h) = 2(x+h)h + h^2 + 2h$

Con lo cual tendremos que:

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta f(x)) &= 2(x+h) + h^2 + 2h - (2xh + h^2 + 2h)\\ &= 2h^2\end{aligned}$$

Esta nueva función la simbolizaremos por $\Delta^2 f$ y su valor en x lo designaremos $\Delta^2 f(x)$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = 2h^2$$

y si repetimos el proceso anterior ¿Qué obtenemos? Pues obtenemos la función diferencia de $\Delta^2 f$, cuyo valor en X sería:

$$\Delta(\Delta^2 f(x)) = \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x)$$

Ahora, como $\Delta^2 f$ es una función constante, su valor en x+h es el mismo que en X.

$$\Delta^2 f(x+h) = \Delta^2 f(x) = 2h^2$$

Así que $\qquad \Delta(\Delta^2 f(x)) = 2h^2 - 2h^2$

$$= 0$$

Función esta, que simbolizaremos $\Delta^3 f$ y cuyo valor en x estará dado por $\Delta^3 f(x)$.

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x)) = 0$$

De acuerdo a lo dicho, daremos la siguiente definición:

Definición 2.

Si Δf es la primera diferencia de una función f, la segunda diferencia de f, que simbolizaremos $\Delta^2 f$, es la función cuyo valor en X viene dado por:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \qquad (10)$$

Dicho de otra manera, $\Delta^2 f$ es la diferencia de la primera diferencia de f.

$$\Delta^2 f = \Delta(\Delta f)$$
$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

De manera análoga, la tercera diferencia de f es la diferencia de la segunda diferencia de f y la designaremos por $\Delta^3 f$.

$$\Delta^3 f = \Delta(\Delta^2 f) \qquad (11)$$
$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x)) = \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x)$$

En general si $n \geqslant 2$, la n-ésima diferencia de fe es la diferencia de la (n-1) ésima diferencia de f, lo cual expresaremos así:

$$\Delta^n f = \Delta(\Delta^{n-1} f) \qquad n = 2,3,4,\ldots.$$

$$\Delta^{n} f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x) \qquad (12)$$

Ejemplo 1:

Si $f_2(x) = 9(x^2 + 2x + 1)$. Determinar la segunda diferencia de f_2

$$\Delta f(x) = \Delta[9(x^2 + 2x + 1)] = 9\Delta(x^2 + 2x + 1)$$

$$= 9[\Delta(x^2 + 2x) + 1]$$

$$= 9(2xh + h^2)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta[9(2xh + h^2)]$$

$$= 9\Delta(2xh + h^2)$$

$$= 9(2h\Delta x + \Delta h^2)$$

$$= 9 \cdot 2h^2$$

$$= 18h^2$$

Aunque el desarrollo del ejercicio ha sido correcto, hemos olvidado una propiedad muy importante del Operador delta, cual es la de su finalidad y cuya aplicación abreviaría el proceso anterior, pues ya conocemos la segunda diferencia de $(x^2 + 2x)$ y de 1.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta^2[9(x^2 + 2x + 1)]$$

$$= 9[\Delta^2(x^2 + 2x + 1)]$$

$$= 9[\Delta^2(x^2 + 2x) + \Delta^2 1]$$

$$= 9(2h^2 + 0)$$

$$= 9 \cdot 2h^2$$

Con lo cual sus diferencias de orden Superior serán nulas

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x)) = \Delta 18h^2 = 0$$

Ejemplo 2:

Sea $f_1(x) = 3x + 1$ y $f_3(x) = 2x^3$. Hallar la cuarta diferencia de f_1 y f_3

$$\Delta f_1(x) = \Delta(3x + 1) = \Delta 3x + \Delta 1$$
$$= 3\Delta x + 0$$
$$= 3h$$
$$\Delta^2 f_1(x) = \Delta(\Delta f_1(x)) = \Delta 3h$$
$$= 0$$

$$\Delta^3 f_1(x) = \Delta^2 f_1(x)) = \Delta 0$$
$$= 0$$
$$= {}^4 f_1(x)$$
$$\Delta f_3(x) = \Delta 2x^2 = 2\Delta x^3$$
$$= 2(3x^2h + 3xh^2 + h^3)$$
$$= 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3$$
$$\Delta^2 f_3(x) = \Delta(\Delta f_3(x))$$
$$= \Delta(6x^2h + 6xh^2 + 2h^3$$
$$= 6h\Delta x^2 + 6h^2\Delta x + 2h^3$$
$$= 12xh^2 + 12h^3$$
$${}^3 f_3(x) = \Delta(\Delta^2 f(x))$$
$$= \Delta(12xh^2 + 12h^2)$$
$$= 12h^2\Delta x + 12h^3$$
$$= 12h^2 \cdot h + 0$$
$$= 12h^3$$

$$\Delta^4 f_3\ (x) = \Delta(\Delta 12\ h^3)$$
$$= 0$$

Observando la forma como están definidas las funciones de los ejemplos 1 y 2. podemos notar lo siguiente:

1 $\Delta f_1, \Delta f_2$, y Δf_3 son funciones polinómicas de grado 1, 2 y 3, respectivamente

2. $\Delta f_1, \Delta f_2$, y Δf_3 son funciones polinómicas de grado 0, 1 y 2, respectivamente.

3. Las diferencias $\Delta f_1, \Delta^2 f_2$ y $\Delta^3 f_3$ son constantes, las cuales al seguir el proceso por medio del cual las obtuvimos, vemos que se pueden escribir de la siguiente manera:

$$3\ h = 3 \cdot 1 \cdot h = 1\ h!\ 3$$
$$18\ h^2 = 9 \cdot 2 \cdot 1\ h^2 = 2!\ h^2\ 9$$
$$12\ h^3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot h^3 = 3\ !\ h^3\ 2$$

Observaciones que resumiremos en la siguiente tabla:

Tabla 9.

f (x)	f '(x)	^{2}f (x)	^{3}f (x)	^{4}f (x)
3 x + 1	1 ! h 3	0	0	0
$9\ (x^2 + 2x + 1)$	$18\ x\ h + 9\ h^2 + 18\ h$	$2\ !\ h^2\ 9$	0	0
$2x^3$	$6x^2h + 6xh^2 + 2h^3$	$12xh^2 + 12h^3$	$3\ !\ h^2\ 2$	0

Y, de todo esto ¿Qué conclusión podemos sacar? Como lo habremos notado al aplicar el Operador delta (Δ) sobre una función polinómica de grado n, obtenemos una función polinómica de grado n - 1, lo cual hace por la n-esima diferencia sea constante y que a su vez las diferencias de orden superior sean nulas, resultados que son casos particulares del siguiente teorema:

1.5. TEOREMA

Si f es una función polinómica de grado n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{--------} + a_n x^n$$

en la que $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ son Constantes arbitrarias y $a_n \neq 0$; la n-esima diferencia de f es una constante igual a $n!\, h^n a_n$, y las diferencias superiores son nulas.

$$\Delta^n f(x) = n!\, h^n a_n$$

$$\Delta^m f(x) = 0, \text{ para } m > n$$

Demostración:

Sin pérdida de generalidad podemos tomar la función f definida por $f(x) = a_n x^n$, donde los términos del polinomio de grado menor que n son cero:

Demostraremos que $\Delta^n a_n x^n = n!\, h^n a_n$. Para tal efecto, tomemos la proposición $p(n): \Delta^n a_n x^n = n!\, h^n a_n$, y aplicando el principio de inducción probemos que:

1. p (1) es verdadera.

2. Si p (n) es verdadera para n=k, también lo es para K + 1.

Para n = 1, la primera diferencia de f (x) = $a_1 x$ es:

$$\Delta (a_1 x) = a_1 \Delta x$$
$$= a_1 h = 1 ! h a_1$$

Por lo tanto p (1) es verdadera.

Ahora supongamos que p (n) es veradera para n = k

$$\Delta^n a_n x^k = k ! h^k a_k$$

y demostremos que

$$\Delta^{n+1} a_{n+1} X^{n+1} = (k + 1) ! h^{h+1} a_{n+1}$$

Veamoslo

$$\begin{aligned} \Delta^{h+1} a_{n+1} X^{n+1} &= a_{n+1} \Delta^{k+1} X^{k+1} \\ &= a_{n+1} \Delta^k (\Delta x^{k+1}) \qquad (13) \\ &= a_{n+1} \Delta^k [(x + h)^{k+1} - X^{h+1}] \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula del Binomio de Newton, tendremos que

$$\Delta^{n+1} a_{k+1} X^{k+1} = a_{k+1} \Delta^k [x^{h+1} + (h+1) x^k h + \frac{(k+1) k x^{k-1} h^2}{2 !} + \frac{(k+1) k (k-1) x^{k-2} h^3}{3 !} + \ldots + h^{k+1} - x^{k=1}]$$

(14) $$= a_{k+1} \Delta^k [(h+1) h x^k + \frac{(h+1) k h^2}{2!} x^{k-1} + \frac{(k+1) k (k-1) h^3}{3!} X^{k-2} + \ldots + h^{k+1}]$$

Ahora, como hemos supuesto que la n-esima diferencia de un polinomio de grado k es h! $h^k a_n$, en donde a_n es el coeficiente de x^n, entonces

$$\Delta^k [(h+1)h\, x^k + \frac{(k+1)\, k\, h^2}{2\,!}\, x^{k-1} + \ldots\ldots + h^{k-1}] = k\,!\, h^k\, (k+1)h$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}\Delta^{h+1} a_{n+1}\, X^{h+1} &= a_{k+1}\, k\,!\, h^k\, (k+1)\, h\\ &= (k+1)\, k\,!\, h^{h+1}\, a_{k+1}\\ &= (k+1)\,!\, h^{k+1} a_{k+1}\end{aligned}$$

de lo que se deduce inmediatamente el resto del teorema, pues

si $\Delta^n\, a_n k^n = n\,!\, h\, a$, para $m = n+1$

$$\begin{aligned}\Delta^m a_n x &= \Delta^{n+1} a_n x = \Delta(\Delta^n a_n x)\\ &= \Delta n\,!\, h\, a_n\\ &= 0\end{aligned}$$

Notese que $m = n+1 > n$

Como consecuencia de este teorema, tenemos el siguiente corolario.

Si f es una función polinómica de grado n, su primera diferencia es una función polinómica de grado n - 1 (Ver expresiones (13) y (14)).

Ejemplo 1.

Cuál es la quinta diferencia de f, si $f(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^2 + 1$

Como f es una función polinómica de grado 5, aplicando el teorema anterior, obtenemos:

$$\Delta^5 f(x) = \Delta^5(3x + 2x - x + 1)$$
$$= 5\,!\,h^5\,3$$
$$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\,h^5\,3$$
$$= 360\,h^5$$

Ejemplo 2.

Si $f(x) = x^4$. Determinar la cuarta diferencia de f

A f podemos considerarla como una función polinómica de la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x + a_3 x + a_4 x$$

en donde $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ y $a_4 = 1$

De modo que aplicando el teorema anterior

$$\Delta^4 f(x) = \Delta^4(x^4)$$
$$= 4\,!\,h^4 \cdot 1$$
$$= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot h^4$$
$$= 24h^4$$

Ejemplo 3.

Sea $f(x) = (3x + 2)^2$. Hallar su segunda diferencia

$$\Delta^2 f(x) = \Delta^2(3x + 2)^2$$
$$= \Delta^2(3x + 12x + 4)$$
$$= 2\,!\,h^2 3$$
$$= 2 \cdot 1 \cdot 3h^2$$
$$= 6h^2$$

EJERCICIOS

1. Determine la primera diferencia de las funciones que aparecen definidas a continuación:

1.1 $f_4(x) = x^2 + 1$

1.2 $f_5(x) = 2x^2 + 2$

1.3 $f_6(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

1.4 $f_7(x) = x^4 + 3x - 1$

2. Hallar la primera diferencia de:

2.1 $f_1(x) = x^2 + 1$

2.2 $f_2(x) = x/6$

2.3 $f_3(x) = x^3 + 2x^2 - 3$

3. Usando las funciones anteriores calcule a $\Delta f_1(x)$, $\Delta f_2(x)$ y $\Delta f_3(x)$ en $x = 1$. luego complete la siguiente tabla

h	0,2	10	10	10
$\Delta f_1(1)$				
$\Delta f_2(1)$				
$\Delta f_3(1)$				
$\Delta f_1(1)\Delta f_2(1)$				
$\Delta f_2(1)\Delta f_3(1)$				

3.1 ¿Qué sucede con el valor de $\Delta f_1(x)\Delta f_2(x)$ y $\Delta f_2(x)\Delta f_3(x)$, si en lugar de $x = 1$, tomamos $x = 100$. Elabore una tabla usando los mismos valores de h del numeral anterior.

4. Las funciones diferencias que obtuvo en el punto 1, calculelas para $x = 2$

4.1 Tomando el h que se indica, complete la siguiente tabla

h	0,2	0,1	10	10
$\Delta f_4(2)$				
$\Delta f_5(2)$				
$\Delta f_6(2)$				
$\Delta f_7(2)$				

4.2 Si en lugar de $x = 2$ hubiésemos tomado $x = 1.000$, ¿Qué sucede con el valor de $\Delta f\ (2)$? ¿Podemos despreciarlo? Elabore una tabla usando los h del numeral anterior.

4.3 Para que el valor de $\Delta f(x)$ sea despreciable, cual fuese el valor de x, ¿A qué valor debe aproximarse el h que tomemos?

5. Hallar las segundas diferencias de las funciones que aparecen definidas enseguida

5.1 $f\ (x) = (x^2 - x+1)\ (x^2 + 2)$

5.2 $f\ (x) = x^7 + x^2$

5.3 $f(x) = x^2 - x/2$

5.4 $f(x) = (\sqrt{x} + \sqrt{2x})$

5.5 $f(x) = (x-1)(x^2 + 3)$

5.6 $f(x) = 3x + 1/2\, gx^2$

5.7 $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

5.8 $f(x) = 5x^2$

6. Suponiendo que el h a escoger es lo suficientemente pequeño, encuentre las diferencias de:

6.1 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

6.2 $f(x) = \dfrac{1}{2 + 2x^2}$

6.3 $f(x) = (x^2 + 2x)(x-3)$

6.4 $f(x) = x/6\ |x|$

6.5 $f(x) = x(x^2 + 1)$

6.6 $f(x) = (x-1)^4$

7. Hallar la n-esima diferencia de las funciones que aparecen definidas a continuación

7.1 $f(x) = x^4 + 3x^4 - 2x^2 + x - 1$

7.2 $f(x) = x^4$

7.3 $f(x) = 3x^5$

7.4 $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2}{4}$

7.5 $f(x) = 2/3\,(5x^2)$

Aclaración

Si $f(x)$ me define una función polinomica de grado n, debemos buscar la n-esima diferencia de f.

7. Usando las formulas(6)y(8) determine la primera diferenica de las funciones del punto anterior, según el caso.

2. APLICACIONES DE LA FUNCION DIFERENCIA

2.1 PENDIENTE DE UNA RECTA

Como bien se sabe, cuando tenemos una recta L y queremos saber cual es su pendiente, lo primero que hacemos es tomar dos puntos cualesquiera de la recta; de tal modo que si $P_1 : (x_1, y_1)$ y $P_2 : (x_2, y_2)$ son dos de estos puntos, la pendiente m de dicha recta está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

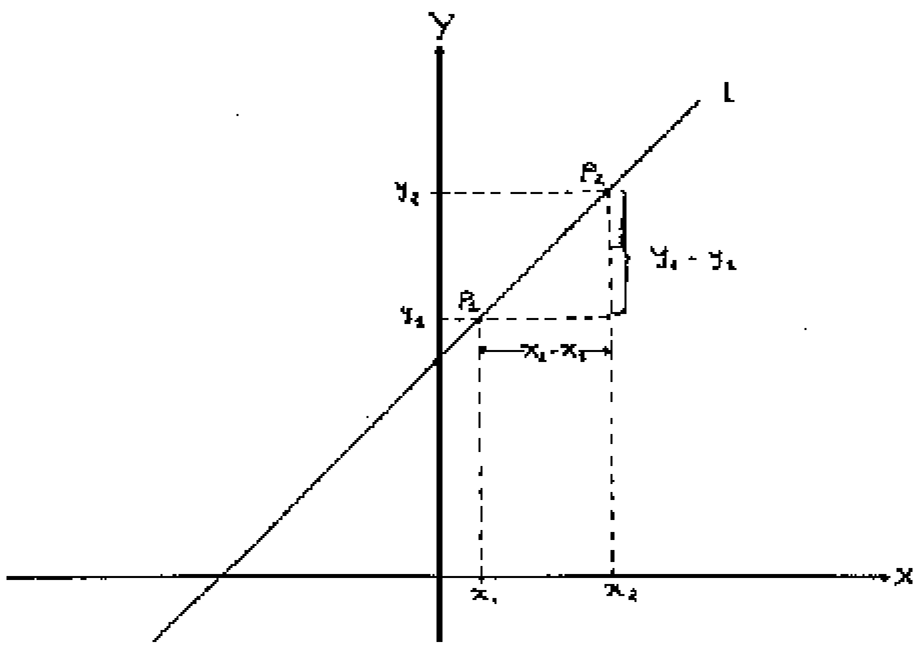


Figura 15

Procedimiento, respecto al cual sería apropiado preguntarnos ¿por qué no interesan los puntos que tomemos de L? o más aún ¿ por qué podemos hablar de la pendiente de una recta? Veamoslo:

Como toda recta L es la gráfica de una función lineal, la cual llamaremos f, tendremos que:

$$y_2 = f(x_2)$$

y

$$y_1 = f(x_1)$$

Además de esto la diferencia $x_2 - x_1$ nos representa el incremento experimentado por la variable independiente x al pasar de x_1 a x_2, y como tal podemos designarla por:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

de donde obtenemos

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

y por consiguiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x}$$

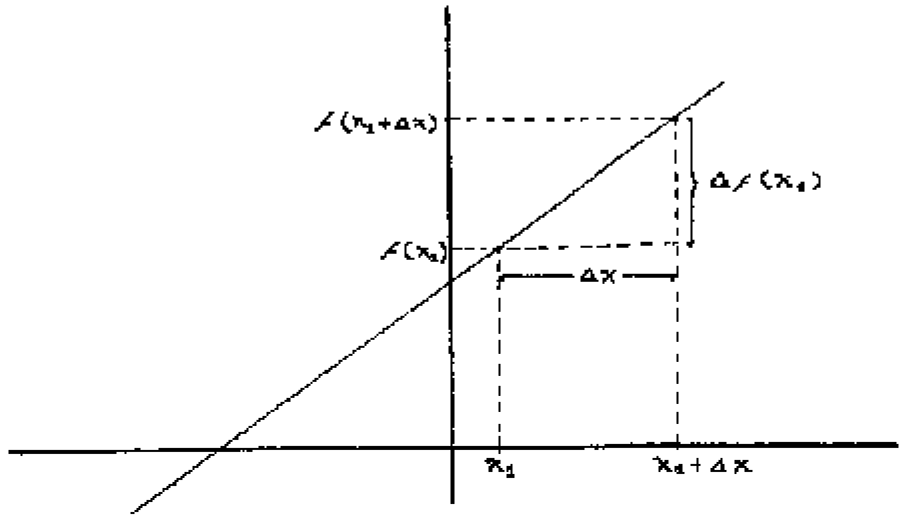


Figura 16

Ahora, como f es una función lineal, Δf es una función constante. Así que el incremento experimentado por $f(x)$ al pasar de x a $x+\Delta x$ siempre será el mismo para cualquier $x \in Df$. Y, ¿ésto a donde nos conduce?. Pués, sí:

$$\Delta f(x) = C \qquad \forall x \in Df$$

Como $x_1 \in Df$

$$\Delta f(x_1) = \Delta f(x)$$

y

$$m = \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \qquad (1')$$

Con lo cual hemos p :bado que la pendiente de L siempre será la misma, sea cual fuese los puntos que tomemos para calcularla, y que por lo tanto tiene sentido el hablar de la pendiente de una recta L.

Ejemplo 1.

Si $f(x) = 2x$. ¿Cuál es la pendiente de la recta que me determina $f(x)$?

Tomemos los puntos P_1: $(1, 2)$ y P_2: $((1+\Delta x), f(1+\Delta x))$

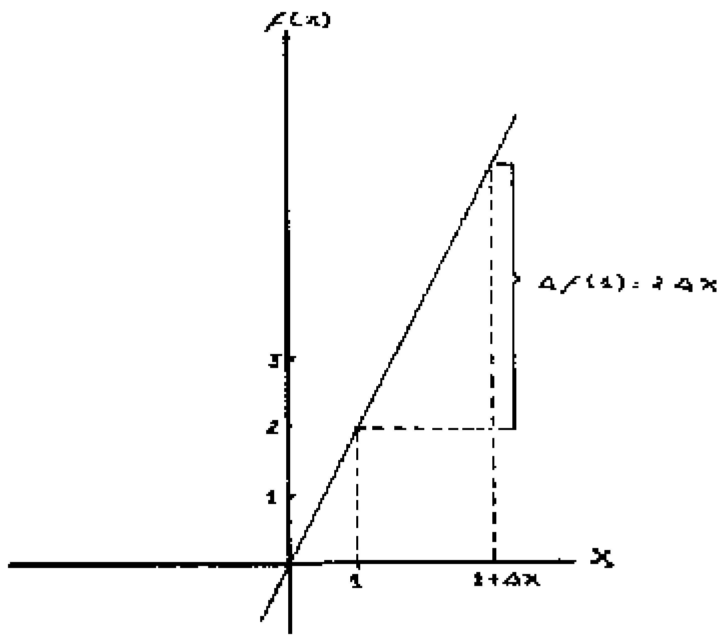


Figura 17

Como

$$\Delta f(x) = \Delta 2x$$
$$= 2\Delta x$$

En $x = 1$

$$\Delta f(1) = 2\Delta x$$

Y aplicando la fórmula (1'), obtenemos:

$$m = \frac{\Delta f\ (1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{2\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \quad 2$$

Observemos que el haber tomado los puntos (1, 2) y $((1 + \Delta x),\ f(1 + \Delta x))$ en nada inflyen nuestro resultado, además de esto el tamaño del Δx tampo interesa.

Ejemplo 2.

Hallar la pendiente de la recta que nos determina $f(x) = ax + b$.

Aplicando la definición de función diferencia, obtenemos:

$$\Delta f(x) = \Delta(ax + b) = \Delta ax + \Delta b$$

$$= a\Delta x + 0$$

$$= a\,\Delta x$$

Por lo tanto, si tomamos los puntos $(x_1,\ f(x_1))$ y $((x_1 + \Delta x),\ f(x_1 + \Delta x))$.

$$m = \frac{\Delta\ f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{a\Delta x}{\Delta x} = \quad a$$

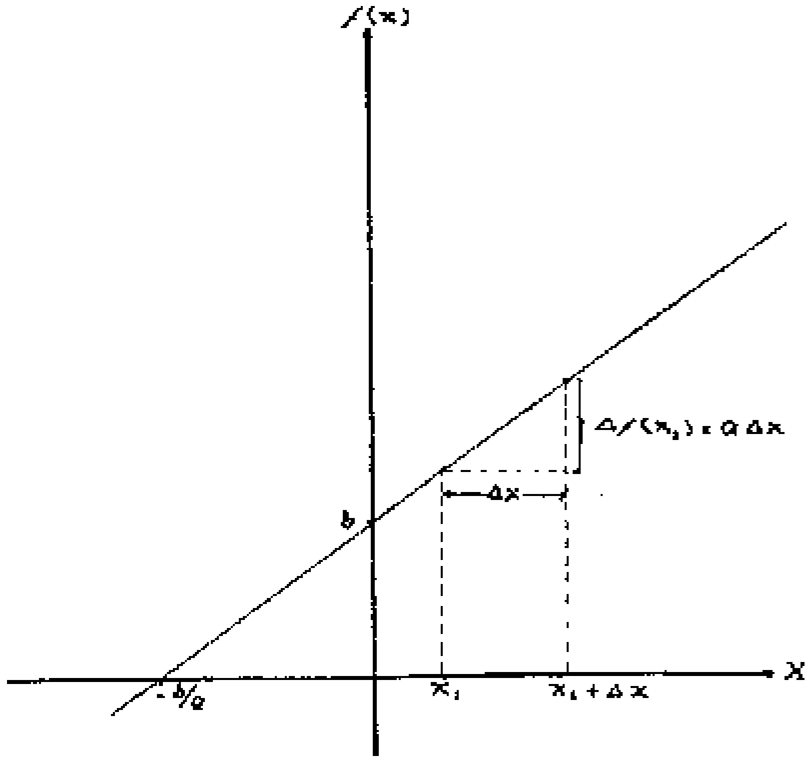


Figura 18

Observaciones:

1. El valor de la pendiente de una recta, es independiente de los puntos que tomemos para determinarla.

2. Si f es una función lineal definida por $f(x) = ax + b$, la pendiente de la recta que nos determina es el coeficiente de x.

Ahora nos preguntaríamos: ¿Podemos hablar de la pendiente de una curva? Analicemos este interrogante. Si la gráfica de f es una curva, f no es una función constante y $\Delta f(x)$ dependería del x que tomáramos (claro está, con un h fijo), por consiguiente, no tendría sentido el hablar de la pendiente de dicha curva, pues

$$m = \frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}$$

dependería del x_i que escogiéramos (Ver figura 19). Entonces,

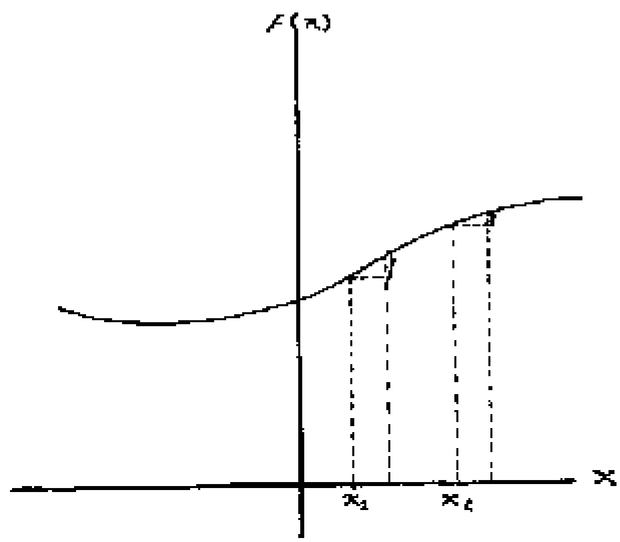


Figura 19

¿De qué hablaremos si la gráfica de f es una curva?. Pues bien, nosotros sabemos que si P es un punto de una circunferencia, existe una recta que es tangente a la circunferencia en este punto. Ahora preguntémonos: ¿Utilizando este mismo criterio podemos hablar de recta tangente a una curva, en un punto de ella? De hecho, no podemos hacerlo, pues como lo ilustra la figura 20, habría más de una recta tangente a dicha curva, en cada punto de ella.

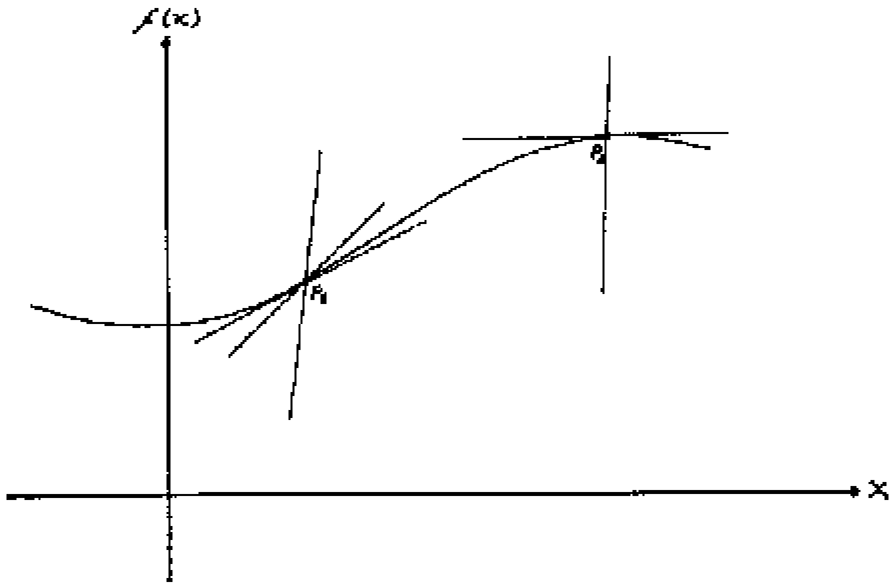


Figura 20

Seguidamente preguntemosnos : ¿Sucede lo mismo si tomamos una pequeña fracción de curva? Indudablemente, en tal caso, a la fracción de curva que tomemos podemos considerarla como un arco de una circunfrencia de radio r, y como tal, habrá una recta tangente a dicha fracción de curva, en cada punto de la misma. En este sentido intuiremos lo que es una recta tangente o una curva, en un punto suyo (Ver figura 21).

Considerando lo anterior, una buena respuesta a nuestro interrogante (¿De qué hablaremos si la gráfica de f es una curva?), sería la de decir

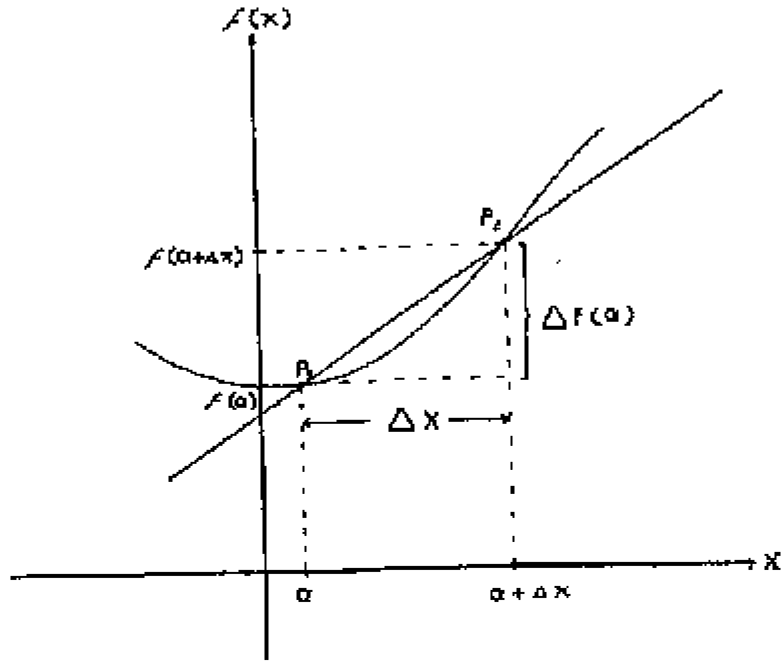


Figura 22

que podemos hablar de la pendiente de una curva en un punto P, cuyo valor sería el de la recta tangente a la curva, en el punto P, o no! y. ¿Cómo la calcularemos? a continuación escribiremos un método que nos permitirá establecer su valor aproximado.

2.2 PENDIENTE APROXIMADA DE UNA CURVA EN UN PUNTO

Consideremos una función f definida por f(x) y cuya gráfica (supuesta) aparece a continuación, además tomemos los puntos a y $a+\Delta x$ pertenecientes al dominio de f.

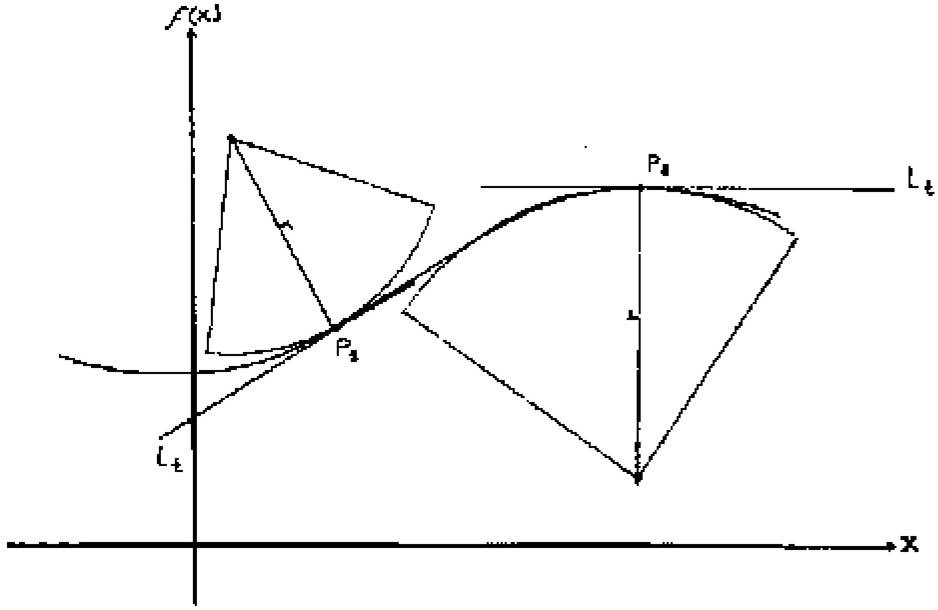


Figura 21

Designemos por P_1 y P_2 los puntos sobre la curva, de coordenadas (a, f(a)) y ((a + Δx), f(a + Δx)), respectivamente. A la recta $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ la llamaremos la secante a la curva f(x) en los puntos P_1 y P_2. Nuestro problema será el de determinar la pendiente aproximada de la recta tangente a la curva en el punto P_1, para ello, empecemos por encontrar la pendiente de $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$, la cual podemos encontrar mediante la aplicación de(1').

$$m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} \qquad (1')$$

de la cual obtenemos:

$$m = \frac{f\ (a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta f\ (a)}{\Delta x}$$

que sería la pendiente de la recta secante $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$; pero, si tomamos un Δx más pequeño, ¿Qué sucede? En tal caso, P_2 se aproximaría a P_1*(Ver figura 24) y la pendiente de la recta secante $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ estaría

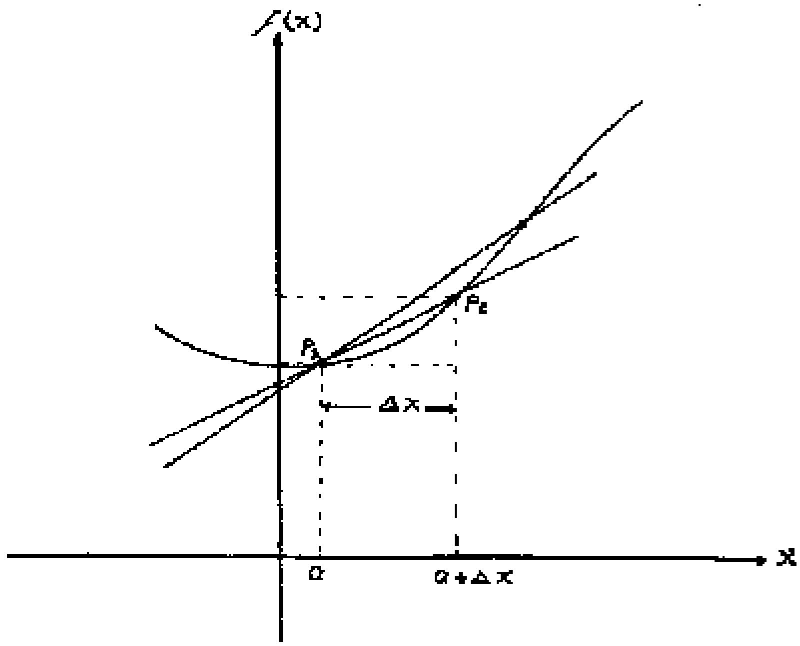


Figura 24

más próxima a la de la recta tangente a la curva en P . Y, si seguimos tomando un x, cada vez más y más pequeñito hasta llegar al punto

---

*Decir que P_2 se aproxima a P_1 , es equivalente a decir que $a + \Delta x$ se aproxima al punto a en que $a \approx a + \Delta x$ (Ver figura 23), ¿A donde habremos llegado? ¿Qué podemos decir al respecto? Indudablemente, si Δx es lo suficientemente pequeño, podemos decir que la expresión:

$$\frac{\Delta f\ (a)}{\Delta x}$$

Nos da de una manera muy aproximada el valor de la pendiente de la recta tangente (m_t) a la curca en el punto P_1 . con un error de aproximación* que puede ser tan pequeño como querramos.

$$^{**}m_t \approx \frac{f\ (a)}{x} \qquad (3)$$

Si Δx es lo suficientemente pequeño. (ver figura 25).

---

*Llamaremos error de aproximación a la diferencia entre el valor aproximado de m_t y su valor exacto.

**El valor que nos da (3), sigue siendo el de la pendiente de una recta secante; pero quepracticamente pasa por donde lo hace la recta tangente a la curva en el punto P_1 .

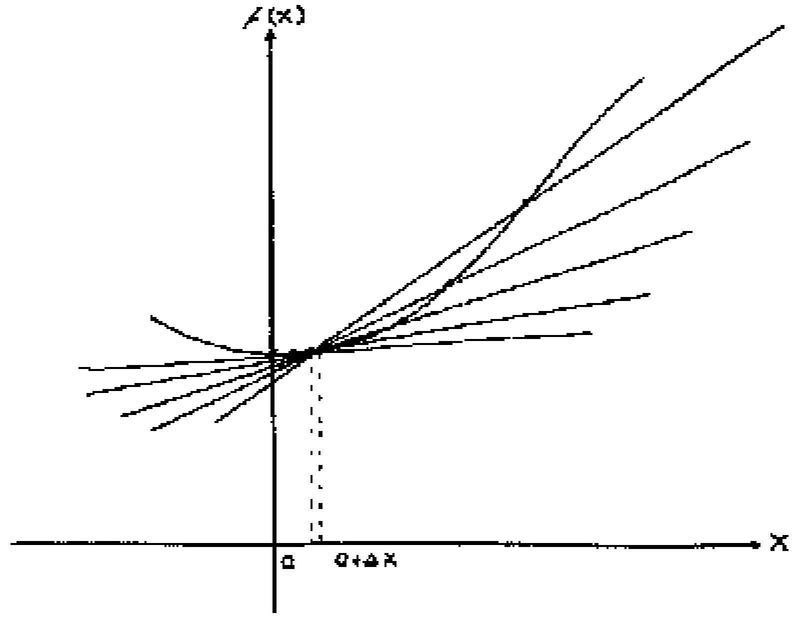


Figura 25

Ejemplo 1.

Hallar la pendiente aproximada de la curva $f(x) = x^2$, en $x = 1$.

En este caso $a = 1$, así que tomemos los puntos P :(1,1) y P :

$((1 + \Delta x), (1 + \Delta x)^2)$ y busquemos la pendiente (m) de la recta secante que pasa por dichos puntos.

Como

$$m = \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$$

Primero hallemos la función diferencia de f y luego calculemosla en $a = 1$.

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \Delta x^2 \\ &= (x + \Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x \, \Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

O sea que

$$\begin{aligned} \Delta f(1) &= 2 \cdot 1 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \\ &= 2 \, \Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} \\ &= \frac{2\Delta x + (\Delta x)}{\Delta x} \\ &= 2 + \Delta x \end{aligned}$$

Si tomamos un $\Delta x = 10^{-3}$, la pendiente (m) de la recta secante que pasa por $(1,1)$ y $((1 + 10^{-3}), (1 + 10^{-3})^2)$ es:

$$\begin{aligned} m_1 &= 2 + \Delta x \\ &= 2 + 10^{-3} = 2 + 0{,}001 \\ &= 2{,}001 \end{aligned}$$

Si $\Delta x = 10^{-4}$. ¿Cual será la pendiente de la recta secante que pasa por $(1,1)$ y $((1 + 10^{-4}), (1 + 10^{-4})^2)$? Pues , en tal caso:

$$m_2 = 2 + \Delta x$$
$$= 2 + 10^{-4} = 2 + 0{,}0001$$
$$= 2{,}0001.$$

Ahora observemos la tabla 10, en donde hemos ilustrado el valor de la pendiente de las rectas secantes a (1,1) y $((1+\Delta x), (1+\Delta x)^2)$, para diversos Δx muy pequeños (Ver figura 26).

Tabla 10

x	0,1	0,001	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
m	2,1	2,001	2,0001	2,00001	2,000001

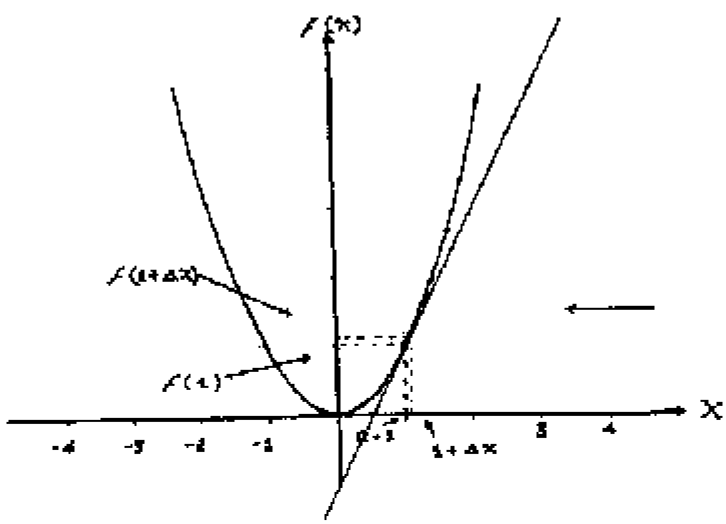


Figura 26

Según la tabla 10, ¿Cuál es el valor exacto de m_4? Además de esto nos preguntaríamos ¿Qué sucede si en lugar de tomar un Δx positivo, tomamos un Δx negativo? Dicho de otra manera, ¿Qué sucede si en lugar de que $1 + \Delta x$ se aproxime a 1, sea $1 - \Delta x$ el que se aproxime a 1? (Ver figura 27). Para tal efecto, tomemos un $x = - 10^{-5}$ y veamos qué su-

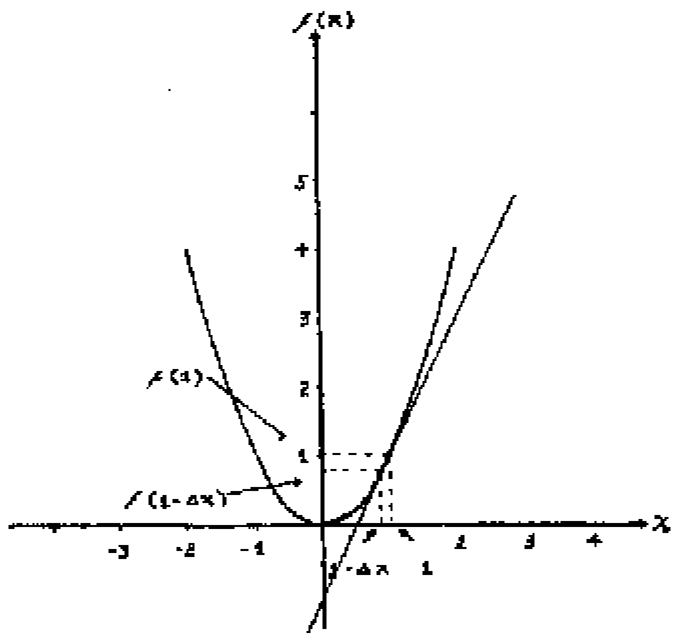


Figura 27

cede con la pendiente (m_5) de la recta secante que pasa por P : (1,1) y P : $((1-10^{-5}), (1 - 10^{-5})^2)$.

Aplicando (2), tendremos que:

$$m_3 = \frac{\Delta f\ (1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{2\ 1\ \Delta x+(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x\ (2+\Delta x\ \ )}{\Delta x}$$

$$= 2 + \Delta x = 2 + (-10^{-5})$$

$$= 2 - 0{,}001$$

$$= 1{,}999$$

Si escogemos los puntos (1,1) y $((1-10^{-4}), (1 - 10^{-4})^2)$. ¿Cuál es la pendiente (m_4) de la recta secante a dichos puntos?

$$m_4 = 2 + \Delta x$$

$$= 2 + (-10^{-4}) = 2 - 0{,}0001$$

$$= 1{,}9999$$

Ahora, veamos la tabla 11, en donde se ilustra el valor de las pendientes de las rectas secantes a (1,1) y $((1 - \Delta x), (1 - \Delta x)\ \ )$, para varios Δx (muy pequeños).

Table 11

x	-0,1	-0,001	-10^{-4}	-10^{-5}	-10^{-6}
m	1,8	1,999	1,9999	1,99999	1,999999

¿A qué valor se aproxima m ? ¿Cuál será el valor exacto de m_t? ¿Cuando obtenemos este valor? De hecho, y como lo habremos notado en las tablas 10 y 11, el valor exacto de m_t es el número al cual se aproxima m, o sea 2, valor este que obtendremos cuando Δx sea practicamente nulo. Seguidamente observemos la tabla 12, donde hemos comparado el valor exacto de m_t con los de las cuatro pendientes (m) que obtuvimos para las rectas secantes, muy proximas a la recta tangente a la curva, en x = 1.

Tabla 12

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	-10^{-3}	-10^{-4}	10^{-4}	10^{-3}
m	1,999	1,9999	2,0001	2,001
VALOR EXACTO DE m_t	2	2	2	2
ERROR DE APROX.	0,001	0,0001	0,0001	0,001

¿Podemos afirmar la expresión $m_t \simeq f(1)/\Delta x$, si Δx es muy pequeño? Indudablemente, como podemos verlo, si Δx es lo suficientemente pequeño, por medio del cociente $f(1)/\Delta x$ podemos obtener el valor de m_t con el error de aproximación que querramos. Por lo tanto, a cada una de las pendientes obtenidas podemos considerarles como un valor aproximado de m_t , desde luego con diferentes errores de aproximación.

Ejemplo 2.

Hallar la pendiente de la curva $f(x) = x^2$ en el punto $x = 1/2$, con un error de aproximación menor que 10^{-4}.

En este caso $a = 1/2$ y como $\Delta f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

En $x = 1/2$

$$\begin{aligned}\Delta f(\tfrac{1}{2}) &= 2 \cdot \tfrac{1}{2}\, \Delta x + (\Delta x) \\ &= \Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f\ (\tfrac{1}{2})}{\Delta x} &= \frac{\Delta x + (\Delta x)}{\Delta x} \\ &= 1 + \Delta x \qquad (4)\end{aligned}$$

Y si hacemos $\Delta x = 10^{-5}$, tendremos que :

$$\begin{aligned}m \quad & 1 + \Delta x = 1 + 10^{-5} \\ & 1{,}00001 \qquad (5)\end{aligned}$$

Pero, ¿Este valor está dentro del error de aproximación pedido? o más aún ¿Cómo haremos para saber cuál es el Δx que podemos tomar? Como puede verse en las expresiones (4) y (5), el error con que obtengamos a m_t depende del valor que le demos al sumando Δx, así que solo basta con que el Δx cumpla la condición.

$$\Delta x < 10$$

y como $10^{-5} < 10^{-4}$, el valor aproximado que obtuvimos para m_t está dentro del error pedido. Observese que también podemos tomar un $\Delta x = 10^{-6}$, pues:

$$10^{-6} < 10^{-4}$$

Ejemplo 3.

Hallar la pendiente aproximada de la curva $f(x) = x^2 + 2x$ en el punto $x = 1$, con un error de aproximación de 12 cienmilesimas.

Como

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \Delta (x^2 + 2x)\\ &= \Delta x^2 + \Delta 2x = \Delta x^2 + 2\Delta x\\ &= 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x\end{aligned}$$

En $x = 1$

$$\begin{aligned}\Delta f(1) &= 2\cdot 1\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x\\ &= 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x\\ &= 4\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

De modo que

$$\frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \quad (4 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 4 + \Delta x$$

En donde el sumando Δx, al igual que en el ejercicio anterior, nos determina el error de aproximación con que obtendremos a m_t . Entonces, ¿Qué Δx debemos tomar? Bastará con que tomemos un $\Delta x = 0{,}00012$. Con lo cual

$$m_t \approx 4 + \Delta x = 4 + 0{,}00012$$

$$4{,}00012$$

Para otros Δx, en la tabla 13 podemos ver el error de aproximación con que obtenemos a m_t .

Tabla 13

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0,00023	-10^{-5}	10^{-6}	0,00013
VALOR APROX. DE m	3,00077	3,99999	4,000001	4,00013
VALOR EXACTO DE m_t	4	4	4	4
ERROR DE APROXIMACION	- 0,00023	10^{-5}	10^{-6}	0,00013

Ejemplo 4.

Si $f(x) = x^3 + 3x^2$. Hallar la pendiente de la curva en $x = 2$, con un error de aproximación igual a 10^{-5}.

Primero encontremos a $\Delta f(x)$

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \Delta(x^3 + 3x^2) = \Delta x^3 + \Delta 3x^2 \\ &= \Delta x^3 + 3\Delta x^2 \\ &= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2\end{aligned}$$

En $x = 2$, su valor será:

$$\begin{aligned}\Delta f(2) &= 3\cdot 2^2 \Delta x + 3\cdot 2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 6\cdot 2\Delta x + 3(\Delta x)^2 \\ &= 24\Delta x + 9(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\ &= \Delta x(24 + 9\Delta x + (\Delta x)^2)\end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(2)}{\Delta x} &= \frac{\Delta x(24 + 9\Delta x + (\Delta x))}{\Delta x} \\ &= 24 + 9\Delta x + (\Delta x)\end{aligned}$$

En este caso, la suma

$$9\Delta x + (\Delta x)^2$$

nos determinará el error de aproximación con que obtendremos a m_t, de modo que como nos piden que este sea igual a 10^{-3}, hacemos

$$9\triangle x + (\triangle x)^2 = 10^{-3} \qquad (6)$$

Ecuación que no resolveremos, pues, si encontraos el valor de $\triangle x$, cuando hagamos las respectivas sustituciones en (6) nuevamente obtendremos 10^{-3}; claro que sería un buen ejercicio el saber qué valores de $\triangle x$ satisfacen la ecuación.

Por todo lo dicho

$$\begin{aligned} m_t &\simeq 24 + 9\triangle x + (\triangle x)^2 \\ &\simeq 24 + 10^{-3} \\ &\simeq 24,001 \end{aligned}$$

Pero, en caso de que nos hubiesen pedido un error de aproximación menor que 10^{-3}, ¿Que haríamos? En tal caso, sustituiríamos a $9\triangle x + (\triangle x)$ por cualquier número menor que 10^{-3}, por ejemplo: 10^{-4}, 10^{-5}; 10^{-6}, entre otros. Particularmente podríamos tomar a 10^{-6}, en cuyo caso

$$\begin{aligned} m_t &\simeq 24 + 10 \\ &\simeq 24,000001 \end{aligned}$$

Observaciones:

Para hallar el valor aproximado de m_t no es indispensable conocer el valor del Δx que tomaremos, solo bastará con saber qué error de aproximación deseamos, y el sumando o suma en donde aparezca Δx lo sustituiremos por el error de aproximación con que queremos el valor de m.

EJERCICIOS

1. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por:

1.1 (1, 3) y (2,4)

1.2 (-1,5) y (0,2)

1.3 (0,1) y (-3, -5)

2. Referente al punto anterior, grafique cada recta e indique las diferencias que calculó para obtener la pendiente (Ver figura 16).

3. Cual es la pendiente de la recta secante a la curva $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en los puntos (2,4) y $((2 + \Delta x), f(2 + \Delta x))$. Haga la gráfica de f y proceda como en el punto anterior (Ver figura 17).

3.1 Calcule la pendiente para Δx igual a :

3.1.1 0,1

3.1.2 0,002

3.1.3 10^{-5}

3.1.4 10^{-8}

3.1.5 -0,004

3.1.6 -0,0002

3.1.7 -10^{-5}

3.1.8 -10^{-6}

3.2 Usando los resultados del numeral anterior, complete la siguiente tabla

x	$-0,0001$	-10^{-5}	-10^{-6}	10^{-5}	$0,0002$	$0,004$
m						

3.3 ¿A qué valor se aproxima m?

3.4 ¿Cuál será el valor exacto de m_t?

3.5 Haga una tabla en donde se muestre el error de aproximación entre el valor exacto de m_t y los valores aproximados que obtendríamos al tomar los Δx que se dieron.

4. Usando los puntos del ejercicio anterior, determine la ecuación de la recta secante que pasa por cada par de puntos.

4.1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto $x = 2$ y $x = -2$

5. Con un error de aproximación igual a 0,00032, en el punto $x = 1$, encuentre la pendiente de la curva:

5.1 $f(x) = x^2$

5.2 $f(x) = (x+1)^2$

5.3 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$

5.4 $f(x) = \frac{1}{2}\, mx$

5.5 $f(x) = -kx^2$

5.6 $f(x) = 5x^3$

5.7 $f(x) = x^2 + 2$

5.8 $f(x) = v_o\, x + \frac{1}{2}\, gx^2$

5.9 $f(x) = mx^2$

5.10 $f(x) = x^4$

6 Referente al punto anterior dé el valor exacto de m_t en $x = 1$, para cada curva.

7. Con un error de aproximación menor que 10^{-6}, determine la pendiente de las curvas anteriores, en $x = -1$.

8. Haga lo mismo que hizo en el tercer ejercicio, numeral 3.1 a 3.5, para las curvas $f_1(x) = 3x^2 - 2x - 1$ y $f_2(x) = x^3$, en el punto $x = -2$ y $x = 1$, respectivamente.

8.1 Complete la siguiente tabla

x	-10^{-4}	-10^{-5}	-10^{-6}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}
$\Delta f_1(-2)$						
$\Delta f_2(1)$						

8.2. ¿A qué valor se aproximan los incrementos que experimenta $f_1(-2)$, a medida que x es más pequeño, sea positivo o negativo?.

8.3. Responde la misma pregunta para $f_2(1)$

9. Calcule la pendiente de la recta secante "a la curva" $f(x) = 1/X$, en los puntos $(a\ f(a))$ y $(a + \triangle x),\ f(a + \triangle x)$.

Sug: Para encontrar a $\triangle f(x)$, use la fórmula (a) del capítulo anterior.

9.1. Calcúlela para $a = \triangle x$, con $\triangle x$ igual a:

a. 10^{-4} d. -10^{-4}

b. 10^{-6} e. -10^{-6}

c. 10^{-8} f. -10^{-8}

9.2. ¿Cuál será la pendiente de la recta tangente a la "curva" en $x = 0$?.

9.3. ¿Qué problema se presenta?

9.4. ¿A qué se deberá éste problema?

9.5. Haga la gráfica de f.

9.6. Aparte de que f no es una función polinómica. ¿Cuál es la principal diferencia entre "la curva de f" y todas las que hemos considerado hasta ahora.

9.7. Complete la siguiente tabla.

$\Delta x = a$	-10^{-4}	-10^{-6}	-10^{-8}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
$\Delta f(a)$						

9.8. Los incrementos que experimenta $f(x)$, se aproximan a un valor específico, a medida que x es más pequeño?

9.9. Cuál es ese valor.

10. Haga la gráfica de la función f definida por $f(x)$ =

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ si } x \quad 0 \\ x, \text{ si } x \quad 0 \end{cases}$$

10.1. Dibuje la recta tangente a dicha curva en el punto $x=0$

10.2. Cuántas rectas tangentes podemos dibujar?.

10.3. Podemos determinar la pendiente de curva, en $x=0$

10.4. Determinar la función diferencia de f

$$f(x) = \begin{cases} \quad , \text{ si } x \quad 0 \\ \quad , \text{ si } x \quad 0 \end{cases}$$

10.5. Complete la siguiente tabla.

Δx	-10^{-4}	-10^{-6}	-10^{-8}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
$\Delta f(0)$						

10.6. Los incrementos que experimenta $f(x)$ se aproximan a un valor específico, a medida que x es más pequeño?.

11. Con base en las tablas de los ejercicios 8,9 y 10, para que una curva cualquiera definida por $f(x)$ no presente interrupciones en un punto $x = a \in Df$, ¿Qué condición se debe cumplir?.

11.1. Esta condición podría ser: Los incrementos que experimenta $f(x)$ al pasar de $x = a$ a $x = a+\Delta x$, deben aproximarse a cero, si los x que tomamos, ya sean positivos o negativos, son cada vez más y más pequeños?

2.3. RAZON DE CAMBIO

Consideremos un móvil que se desplaza a lo largo de una línea recta y supongamos que el espacio S recorrido por dicho móvil es una función de t.

$$S = f(t)$$

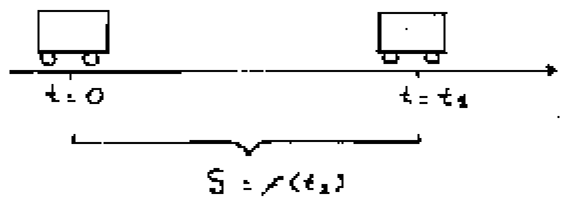


Figura 28

Si escogemos los puntos p_1 y p_2 del recorrido, para la S cuál es el tiempo transcurrido desde el momento de la partida es t1 y t2, respectivamente. ¿Cuál es la velocidad media* del cuerpo entre esos dos puntos? como sabemos:

$$\text{Velocidad Media} = \frac{\text{Espacio recorrido}}{\text{Tiempo Gastado.}}$$

Así que debemos determinar cual es el espacio recorrido entre dichos puntos y el tiempo que tarda en recorrerlo; pero, ¿Cómo lo haremos? para esto, observemos la figura 27, en donde podemos ver que:

$$\text{Espacio recorrido} = f(t2) - f(t1)$$

y

$$\text{Tiempo Gastado} = t2 - t1$$

---

* Cuando un cuerpo se mueve con velocidad variada, la velocidad media es la velocidad constante con que haría idéntico recorrido en el mismo tiempo; de ahí la forma como está definida.

Con lo cual

$$V_m = \frac{f(t2) - f(t1)}{t2 - t1}$$

Ahora, como $t2 - t1$ es el incremento experimentado por t, tendremos que:

$$t2 - t1 = \Delta t$$

De donde obtenemos

$$t2 = t1 + \Delta t$$

Y por consiguiente

$$V_m = \frac{f(t1 + \Delta t) - f(t1)}{t2 - t1}$$

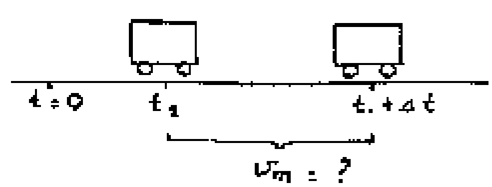
$$= \frac{\Delta f(t1)}{\Delta t}$$

Ejemplo 1.

Si un cuerpo que sigue una trayectoria rectilínea, en un tiempo t recorre un espacio S en metros dado por:

$$S = f(t) = 5t^2 + 3t$$

¿Cuál es su velocidad media entre los instantes $t1$ y $t2 = t1 + \Delta t$?.



Ante todo busquemos la función diferencia de f.

$$\Delta f(t) = \quad (5t^2 + \quad 3t)$$
$$= 5\Delta t \quad + 3\Delta t$$
$$= 5(2t\Delta t + (\Delta t)^2) + 3\Delta t$$
$$= 10t\Delta t + (\Delta t)^2 + 3\Delta t$$

O sea que:

$$\Delta f(t1) = 10t1\Delta t + (\Delta t) + 3\Delta t$$

y $$Um \quad = \frac{\Delta t + (10t1 + \Delta t + 3)}{\Delta t}$$

$$= (10t1 + \Delta t + 3) m/seg.$$

pero, si t= 3 y t1 = 4 seg. ¿Cuál es la velocidad media del cuerpo entre los instantes t1=4 seg. y t2= 7 seg. ?.

$$Um = (10 .. 4 + 3 + 3) \ m/seg.$$
$$= 46 \ m/seg.$$

Si t1 = 2 seg. y t2 = 5 seg., la velocidad media del cuerpo entre dichos instantes es:

$$Um = (10 \ . \ 2 + 3 + 3) \ m/seg.$$
$$= 26 \ m/seg.$$

Pues, $\Delta t = 5 - 2 = 3$

Si t1 = 8 seg. y t2 = 2.1 seg. ¿Cuál es la velocidad media del cuerpo entre estos instantes?.

Como $\Delta t = 0,1$

$$\begin{aligned} Um &= (10t1 + \Delta t + 3) \text{ m/seg.} \\ &= (10 \cdot 3 + 0{,}1 + 3) \text{ m/seg.} \\ &= 33.1 \text{ m/seg.} \end{aligned}$$

Pero, el cociente (10), además de darnos la velocidad constante con que el cuerpo recorrería el espacio entre los instantes t1 y t1+Δt en un tiempo t ¿Nos dice algo acerca de la función f (espacio recorrido)?. Pues bien, como pudimos notar, la velocidad media entre los instantes t1 y t1+Δt no siempre es la misma, la cual se debe a que los espacios que recorre el cuerpo entre dichos instantes no son iguales y dependen de ellos. Es así como entre aquellos instantes donde el espacio recorrido fue mayor, se debe recorrer un mayor espacio por segundo y entre aquellos instantes donde el espacio recorrido fue menor, se debe recorrer menor espacio por segundo o fracción de segundo (Ver 11). En consecuencia, por medio del cociente (10) podemos hacernos una idea de los cambios que experimenta a cada segundo o a cada fracción de segundo, el espacio recorrido por el cuerpo desde t1 hasta t1 + Δ t. Teniendo en cuenta esto y considerando que el espacio recorrido está dado por la función f, al cociente f(t1)/Δ t que es una razón* entre las magnitudes distancia y tiempo, la llamaremos razón media de cambio de f de t1 a t1+Δt, o también razón de cambio del espacio recorrido de t1 a t1+Δt.

En general, para cualquier función f, daremos la siguiente definición:

---

* Una razón es un cociente entre dos cantidades.

Definición:

Si la primera diferencia de una función f es Δf y $x \in Df$, al cociente

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \qquad (12)$$

Lo llamaremos razón media de cambio de f de $x = x_1$ a $x = x_1 + \Delta x$.

Notemos que independientemente de lo que represente f, la razón (12) nos da la forma de ir desde $f(x)$ hasta $f(x+\Delta x)$ por medio de incrementos constantes en el valor de $f(x)$, de ahí que la llamemos razón media.

Ejemplo 1.

Si una piedra se deja caer desde cierta altura. Hallar la razón media de cambio del espacio recorrido por la piedra entre los instantes t1 y t1 $+\Delta t$.

Como se trata de una caída libre, el espacio S recorrido al cabo de t segundos está dado por:

$$S = 1/2\ g\ t^2$$

Si tomamos g= 10m/seg., podemos considerar la función

$$f(t) = 5t^2$$

Función que nos dará el espacio S en metros que ha recorrido la piedra al cabo de t segundos, Así que:

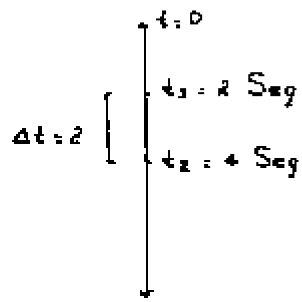
$$\Delta f(t) = \Delta 5t^2$$
$$= 5\Delta t^2$$
$$= 5(2t\Delta t + (\Delta t)^2)$$
$$= 10t\Delta t + 5(\Delta t)^2$$

y $$\Delta f(t_1) = 10\, t_1 \Delta t + 5(\Delta t)^2$$

De donde obtenemos:

$$V_m = \frac{10t\,\Delta t_1 + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} \qquad (13)$$
$$= 10t_1 + 5\Delta t$$

Expresión por medio de la cual podemos encontrar la velocidad media de la piedra entre cualquier par de instantes. Particularmente para t1= 2 seg. y t2 = 4 seg.



$$V_m = 10\, t1 + 5\Delta t$$
$$= (10 \,.\, 2 + 2.5) \text{ m/seg.}$$
$$= 30 \text{ m/seg.}$$

y, si tomamos los instantes t1= 2 seg y t2= 3 seg. ¿Cuál es la velocidad media de la piedra entre dichos instantes?.

$$Um = 10\ t1 + 5\Delta t$$
$$= (10\ .\ 2 + 5\ .\ 1)\ m/seg$$
$$= 25m/seg.$$

Pues, $t = 3-2 = 1$

Ahora, si tomamos un $t = 0.01$ seg, la velocidad media de la piedra entre los instantes $t1 = 2$ seg. y $t2 = 2.01$ seg. es:

$$Um = 10t1 + 5\Delta t$$
$$= (10\ .\ 2 + 5.\ 0,1)\ m/seg$$
$$= 20.5\ m/seg.$$

Como lo habremos notado, si x es muy pequeño, por medio del cociente (13) podemos obtener el valor aproximado de la velocidad de la piedra en el instante t1.

Ejemplo 3.

Sea f una función de población y $f(x) = 10x^2+10^3x$ un estimativo de la población que había o que habrá en el año X. Hallar la razón de cambio de la población del año X, al año $x1+\Delta x$. Notemos que x solo puede tomar valores dentro del conjunto de los enteros positivos.

$$f(x) = (10x^2 + 10^3 X)$$
$$= 10\Delta x^2 + 10^3\Delta x$$
$$= 10\ (2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 10^3\Delta x$$
$$= 20x\Delta x + 10\ (\Delta x)^2 + 10^3\Delta x$$

O sea que:

$$\Delta f(x1) = 20x_1\Delta x + 10(\Delta x)^2 + 10^3\Delta x$$

y por consiguiente, la razón media de cambio de la población del año X_1, al año $x_1+\Delta t$, es de:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta X} = \frac{20\,x_1\Delta x + 10\,(\Delta x)^2 + 10^3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x(20x_1 + 10\Delta x + 10^3)}{\Delta X}$$

$$= 20X_1 + 10\Delta x + 10^3$$

Según ésto, ¿Cuál fué la razón media de cambio de la población de 1982 a 1984?

$$\Delta f(1982) = 20 \cdot 1982 \,.\, 2 + 10 \cdot 2 + 10^3 . 2$$

$$= 79.280 + 40 + 2.000$$

$$= 81.320 \qquad (14)$$

Con la cual tendremos que la razón media de cambio fue de:

$$\frac{\Delta f(1982)}{\Delta X} = 81.320\ /2 = 40.660 \text{ habitantes} \quad (15)$$

Pero, ¿Qué interpretación le daremos a los resultados (14) y (15)? Pues, de acuerdo a estos resultados podemos decir que entre 1982 y 1984 la población se incrementó en 81.320 habitantes, con un promedio en el incremento, de 40.560 habitantes por año. ¿Quiere decir esto que f (1983) = f(1982) + 40.560? Veamos la tabla 14.

Tabla 14.

AÑO	POBLACION	DIFERENCIA DE P
1982	41.265.240	
		40.650
1983	41.305.890	
		40.670
1984	41.346.560	

Como podemos ver f(1983) $\neq$ f(1982) + 40.660 y 40.660 es solo un promedio del incremento anual que experimenta la población, del año 1982 al año 1984.

¿Cuál será la razón media de cambio de 1984 a 1990?

En este caso, x_1= 1984 y Δx= 6, así que como:

$$\frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x} = 20x_1 + 10\Delta x + 10^3$$

$$\frac{\Delta f(1984)}{\Delta x} = 20 \cdot 1984 + 10.6 + 10^3$$

$$= 40.740 \text{ habitantes}$$

La cual nos indica que de 1984 a 1990, la población se incrementará en un promedio de 40.790 habitantes por año.

Ejemplo 4.

Cierto país que se halla en dificultades económicas, en parte, debido a la poca devaluación que cada año sufre su moneda frente al dóllar, ha planeado devaluar su moneda durante el próximo decenio de tal modo que al final del año x de dicho decenio, la cotización de su moneda frente al dóllar esté dada por la función f, definida:

$$f(x) = 20x^2 - 40x + 100$$

Si la moneda oficial es el peso, ¿Cuál será la razón media de cambio del valor del peso frente al dóllar, del año X_1 al año $x_1+\Delta t$?.

Como $\qquad f(x) = 20x^2 - 40x + 100$

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \Delta(20x^2 - 40x + 100) \\
&= 20\Delta x^2 - 40\Delta x + \Delta 100 \\
&= 20\,(2X\Delta X + (\Delta x)^2) = 40\Delta x + 0 \\
&= 40x\Delta x + 20(\Delta x)^2 - 40\Delta x
\end{aligned}$$

Con lo cual tendremos que la razón media de cambio del valor del peso, será de:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \frac{40x\Delta x + 20(\Delta x)^2 - 40\Delta x}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta x(40x_1 + 20\Delta x - 40)}{\Delta x} \\
&= (40\,X_1 + 20\Delta x - 40) \text{ pesos}
\end{aligned}$$

Entre el segundo y el quinto año del decenio, ¿En cuántos pesos se incrementará el valor de 1 dóllar?. $\Delta f(x)$ nos da el incremento que experimenta el valor de un dóllar, del año x_1 al año $x_1+\Delta x$. Así que como:

$$x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = 5$$

Tendremos que $\Delta X = 3$

y

$$\Delta f(2) = 40 \,.\, 2 \,.\, 3 + 20 \,.\, 3^2 - 40 \,.\, 3$$
$$= 340$$

De modo que entre el segundo y el quinto año del decenio, el valor de un dóllar se incrementará en 340 pesos. y, ¿Al final del decenio, cuántos pesos costará un dóllar?. En este caso, primero debemos encontrar el incremento que experimentará el valor del dóllar desde el principio del decenio hasta el final del mismo. Para esto, debemos tomar $X_1 = 0$ y $\Delta x = 10$, de donde:

$$\Delta f(0) = 40 \,.\, 0 \,.\, 10 + 20 \,.\, 10^2 - 40 \,.\, 10$$
$$= 0 + 2.000 - 40$$
$$= 1.600$$

Lo que nos dice que al final del decenio, el valor de un dóllar se habrá incrementado en 1.600 pesos. Ahora busquemos el valor de un dóllar al principio del decenio: pero, ¿Cómo lo haremos? para tal efecto, calculemos a $f(x)$ en $x = 0$

$$f(x) = 20x - 40x + 100$$

$$f(0) = 20 - 0 - 40 - 2 + 100$$
$$= 100$$

O sea que al principio del decenio, el valor del dóllar era de 100 pesos y por consiguiente, al final de esto, su valor será de:

$$\$100 + \$1.600 = \$1.700$$

EJERCICIOS

1. En un cultivo de bacterias, el número de estas al cabo de un tiempo t está dado por:

$$f(x) = 3t^2 - 2t$$

Hallar la razón media de cambio del número de bacterias de t_1 a $t_1 + \Delta t$

1.2. Tomando $t_1 = 2$, calcúlela para Δt igual a:

a. 2 seg.	e. 10 seg.
b. 1 seg.	f. 10 seg.
c. 0.5 seg.	g. 10 seg.
d. 1/10 seg.	h. 10 seg.

1.3. Con los valores obtenidos en numeral anterior, complete la siguiente tabla:

Δt	0.5	1/100	1/1000	-10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$\frac{\Delta f(2)}{\Delta t}$						

1.4. A qué valor se apróxima la razón media de cambio.

1.5. ¿Cuál será la razón de cambio en el instante $t_1 = 2$ seg.

2. El desplazamiento verticar de un proyectil está dado por

$$y = f(t) = Uo \operatorname{Sen} \theta \; t - 1/2 \; g \; t^2$$

si $g = 10$ m/seg^2 , $\theta = 30°$ y $Uo = 40$ m/seg. Encuentre la velocidad media vertical (Umy) del proyectil, entre instantes:

a. t1 = 0 seg. y t2= 2 seg.

b. t1 = 1 seg. y t2= 3.5 seg.

c. t1 = 3 seg. y t2= 4.2 seg.

d. t1 = 2.3 seg. y t2= 2.4 seg.

2.1. Complete la siguiente Tabla:

t	0.1	1/100	1/1000	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$\frac{\Delta f(1)}{\Delta t}$						
$\frac{\Delta f(2)}{\Delta t}$						
$\frac{\Delta f(3)}{\Delta t}$						
$\frac{\Delta f(3.5)}{\Delta t}$						

2.2. Cuál será la velocidad vertical del proyectil en los instantes:

a. $t = 1$ seg. c. $t = 3$ seg.

b. $t = 2$ seg. d. $t = 3.5$ seg.

CONCLUSIONES

Las conclusiones respecto a este trabajo, solo podían ser sacadas después de su aplicación en un grupo de alumnos de grado 11.

BIBLIOGRAFIA

APOSTOL, M., TOM. Cálculos. Barcelona, Editorial Reverté, S.A., 1980

GOLDBERG, SAMUEL. Introducción a las ecuaciones en diferencias finitas. Barcelona, Marcombo, S.A., 1970.

THE OPEN UNIVERSITY. Diferencias finitas. Bogotá, Editorial McGraw Hill, 1978.