1-1-1986

Introducción a la lógica simbólica para limitados visuales

Marco Fidel Robayo Martinez
Universidad de La Salle, Bogotá

INTRODUCCION A LA LOGICA SIMBOLICA

(Para limitados Visuales)

MARCO FIDEL ROBAYO MARTINEZ

UNIVERSIDAD SOCIAL CATOLICA DE LA SALLE

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y FISICA

BOGOTA, 1986

INTRODUCCION A LA LOGICA SIMBOLICA

(Para limitados Visuales)

MARCO FIDEL ROBAYO MARTINEZ

Trabajo de Grado presentado como requisito para optar al Titulo de Licenciado en Ciencias de la Educación con Especialidad en Matemáticas y Fisica.

Director: FERNANDO RUIZ GUZMAN
Profesor Universidad de la SALLE.

UNIVERSIDAD SOCIAL CATOLICA DE LA SALLE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y FISICA
BOGOTA, 1986

Nota Aceptación.

Presidente.

Jurado.

Jurado.

BOGOTA, D.E. Junio 3 de 1986

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su agradecimiento :

A FERNANDO RUIZ GUZMAN, Profesor de Matemáticas de la Universidad de la SALLE y Director del Trabajo.

A GLORIA AMPARO RODRIGUEZ, Profesora Especializada en la Educación del Limitado Visual.

A ARGELIA VIBOYA, Profesora Especializada en la Educación del Limitado Visual.

A los Alumnos con alguna Limitación Visual.

A la UNIVERSIDAD DE LA SALLE.

A todas aquellas personas que en una u otra forma colaboraron en la realización del presente trabajo.

Esta obra es dedicada a:

ANA LUCIA RODRIGUEZ. 1986.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCION

AL ALUMNO

Siendo consciente del poco acceso que el alumno Discapacitado Visual tiene en Colombia, al material científico y teniendo en cuenta, que en la mayoría de los casos los alumnos desconocen las normas que un trabajo debe seguir, daremos a continuación el sistema utilizado en esta exposición.

Para cada división se utilizan los números arábigos, así: El primer número, indica el nombre el capitulo; el segundo, indica las divisiones de cada capítulo (o título); el tercero, indica las divisiones de cada título (o subtítulo); el siguiente número indica las divisiones de cada subtítulo y así sucesivamente, de tal forma que el lector ubique fácilmente la sección del texto donde se encuentra o donde ha suspendido su lectura, para retomarla nuevamente si cree necesario.

Por otra parte y teniendo en cuenta, que el estudiante con alguna dificultad visual es "integrado" en los colegios regulares (para videntes)! y con base en la experiencia de cuatro años en la educación del Invidente, el autor, pretende con este texto llevar a las manos del limitado visual una guía, donde el alumno pueda seguir y desarrollar los diferentes temas de manera sistemática; dando el contenido de una forma "discriminada", es decir, parte por parte y no de una forma "total", ya que resulta bastante diferente recibir información en forma tactil que visual.

Lo anterior se ha hecho mediante ejemplos de acuerdo con las necesidades del alumno y sin sacarlo en ningún momento de la realidad de la vida cotidiana, ni omitiendo temas o explicaciones por conciderarlas de difícil comprensión para él. Si no por el contrario tomándolas y ajustándolas a sus necesidades.

Este texto puede ser consultado por todos aquellos estudiantes que estén cursando algún grado de educación media o superior. Además es conveniente aclarar que en este trabajo, no se desarrolla la totalidad del estudio de la lógica, si no una introducción a la simbología como lo indica su título, faltando temas como: "Cuantificadores", "Silogismos", etc., por nombrar algunos, pero que para su estudio y comprensión requieren de un dominio total de los temas tratados en este.

Por último quiero manifestar, que si en algún momento un determinado tema no es de su comprensión, esto no se debe a que se posea un coeficiente intelectual más bajo que el de la persona vidente, se debe, a que no se tienen los materiales que se ajusten a sus necesidades. Sin embargo, es importante continuar adelante, cosechando triunfos, no tan rápido como quisiéramos, pero cosechándolos, no con las comodidades que todos quisiéramos, pero progresando poco a poco hasta superárnos, para así sentirnos orgullosos de nosotros y llegar a ser algún día útiles a nuestra sociedad.

AL PROFESOR

El texto pretende también ser una ayuda para las personas que están en tan difícil labor, un material de consulta, una guía, donde tanto el profesor como el alumno puedan consultar los diferentes ejemplos, el desarrollo de ejercicios, la simbología, la metodología y toda aquella aplicación que el docente y el alumno puedan encontrar. En éste, cada ejemplo ha sido cuidadosamente seleccionado, cada definición ha sido debidamente estudiada, todo con la intensión de que cada parte del libro se ajuste a las necesidades del estudiante Discapacitado Visual.

La metodología utilizada ha seguido el proceso deductivo; donde partiendo de ejemplos, aclaraciones, observaciones, llegamos a la formulación de las definiciones, para que luego éstas sean aplicadas en los ejercicios propuestos al final de cada capítulo y en todo el transcurso del estudio.

En cuanto se refiere a la simbología, es y debe ser de gran utilidad porque ya en teoría de conjuntos, este proceso es aplicado en la notación de unión, intersección, etc., y es aún de mayor importancia, cuando se inician cursos superiores, donde el conocimiento, comprensión y utilización correcta de la simbología, facilitan y ayudan al desarrollo de infinidad de problemas.

Pero no sólo en matemáticas la lógica es importante, también es aplicada al Derecho, la Computación, la Linguistica, la Filosofía y en muchos otros campos, donde el hombre ha logrado conocer a fondo las leyes que rigen su actividad pensante, sin pretender con ésta en ningún momento decir, que la importancia de la lógica es un simple instrumento de las demás ciencias, la lógica es una ciencia independiente y autónoma, con campo de investigación: "las formas del pensamiento", y con un objetivo: "determinar en que condiciones se puede concluir correctamente", en los dominios de cualquier otra ciencia.

Para finalizar es importante que el docente entienda, que a los alumnos invidentes les es muy difícil comprender, en libros diseñados para videntes. Ellos requieren útiles diseñados para su educación; pretender que ellos entiendan y sigan estos libros es como pretender "enseñarles a ver", cosa que resulta imposible. Partir del concepto "las estrellas brillan", cuando el alumno nunca ha visto una y mucho menos puede imaginarse el significado de brillar, resulta sumamente complicado para el alumno, es necesario entonces, primero darle a conocer el concepto de estrella y de alguna forma relacionarle a su vida el concepto de brillar. Otro ejemplo un poco más claro, es cuando en algebra y en sistema Braille le pedimos al alumno que escriba la siguiente expresión:

$$\frac{2x^2 + b}{a + 1}$$

De cúantas formas el alumno puede escribirla ?, dos de estas pueden ser:

$$2x2 + \frac{b}{a} + 1 \; ; \qquad \frac{2x^{2+b}}{a+1}$$

Que no tienen parecido alguno con el significado de la que pretendíamos escribiera, esto se debe a que hasta el momento no se ha desarrollado un sistema general, que se ajuste a las necesidades de los alumnos con alguna dificultad visual.

AL LECTOR

Debido a la importancia que las personas videntes tienen en la integración y formación académica del limitado visual, esta página está dedicada a informar algunos de los aspectos que constituyen la educación del limitado visual.

Empecemos por decir, que el alumno invidente tiene un sistema de escritura llamado "Braille", en honor a su inventor Luis Braille 1809-1852, Francia. Este consiste en un conjunto de seis puntos llamado "Signo Generador"(:::); donde cada punto y cada combinación de puntos representa una letra o un signo de puntuación; el sistema numérico está formado por las letras de la "a" hasta la "j", siendo la "a" el uno y la "j" el cero, y la distinción de las letras, se hace anteponiendo una combinación de puntos llamada "Signo Numérico" (.:).

La lectura se efectúa de forma táctil y en preferencia con el dedo índice. Para la escritura existen dos instrumentos a disposición del alumno: El primero recibe el nombre de "Pizarra", que por su comodidad y valor es el preferido por el alumno, pero su utilización es bastante complicada cuando se trata de ejercicios matemáticos. La segunda se realiza mediante máquina de escribir, pero que debido a su tamaño y al ruido que produce al ser utilizada, molesta cuando se encuentra el alumno en grupo, de todas formas el principal inconveniente es su costo ya que ésta y los demás materiales incluyendo el papel que se utiliza, son todos de importación.

También cuentan con una imprenta y una biblioteca de propiedad del estado, que es consultada básicamente para literatura ya que no cuenta con material en las demás áreas.

Para terminar analicemos el concepto que las personas tienen del Discapacitado Visual. El vidente en la mayoría de los casos supone, que Dios dá a las personas con alguna limitación, dotes especiales o sobrenaturales que suplen el sentido o miembro perdido; no negamos que Dios nos ayude e ilumine a todos, en especial a las personas con alguna limitación. Si bien es cierto, se desarrollan más algunos de los sentidos, como el oído y el tacto, pero que en ningún momento llegan a reemplazar el tan importante sentido de la vista, es diferente "Oir-Tocar-a ver".

Ilustremos èsto con un ejemplo: ha muchos nos pudo haber sucedido que por alguna circunstancia nos salga una protuberancia en alguna parte del cuerpo, donde la vista no tiene acceso inmediatamente; al darnos cuenta la examinamos mediante el tacto, creàndonos la impresión de que su tamaño es bastante grande, pero que al ser observado en un espejo descubrimos que es un pequeño, pero muy pequeño abultamiento, del cual tal vez no debamos preocuparnos.

I. PROPOSICIONES

Objetivos

Al finalizar esta unidad el alumno debe mostrar que está en capacidad de :

- Enumerar las características de una proposición.
- Identificar las partículas que constituyen conectores.
- Escribir la simbología de los diferentes conectores.
- Leer y expresar por escrito la lectura de expresiones lógicas.
- Escribir las expresiones lógicas correspondientes a esquemas lógicos.
- Simbolizar gráficamente el valor de verdad "verdadero y falso".
- Describir y desarrollar los pasos que se deben seguir para la elaboración de los valores de verdad de cada uno de los conectores.
- Identificar a que tabulación pertenece cada una de las diferentes series de valores de verdad.
- Identificar cuando dos expresiones son equivalentes y

explicar que significa.

1. PROPOSICION

La Proposición, es el concepto fundamental del cálculo de proposiciones; éste concepto, es común a todas las ramas del conocimiento.

Que puede ser común, a todas las ramas del conocimiento ?. Bueno: afirmaciones, enunciados, aserciones o declaraciones acerca de objetos arbitrarios.

Y que pueden tener de común ?. Lo único común, que en general encontramos, es que dentro de cualquier ciencia, éstas pueden ser falsas o verdaderas; y que corresponden o no a lo que los hechos muestran, independiente del sujeto que decide sobre la certeza o falsedad de éstas afirmaciones.

En todo párrafo o discurso linguistico, podemos discriminar partes como: oraciones, palabras, signos de puntuación, etc.. Pero, desde el punto de vista lógico, las partes de mayor interés son los enunciados o proposiciones. Los enunciados son aquellas expresiones de las cuales tiene sentido predicar "Verdad" o "Falsedad".

Quedando por fuera de este conjunto de preposiciones los sustantivos, los adjetivos, los verbos, los adverbios, etc.; como también las preguntas, las órdenes, las exclamaciones; lo mismo que expresiones como: x es mayor que y, $x + y = 5$, etc., por no poder decir si son verdaderas o falsas.

Una Proposición, no es lo mismo que la frase u oración que la formula, es decir, no podemos confundir proposición, con los símbolos que la enuncian. Una proposición es independiente al idioma que se use, porque ésta forma no nos indica su valor de verdad o falsedad. La verdad o falsedad puede predicarse únicamente respecto del significado de dicha proposición.

Aunque una proposición no debe confundirse con los símbolos que la enuncian; no es posible expresarla o transmitirla sin símbolos, ya sean orales, escritos o mímicos. Estos símbolos deben seguir una estructura apropiada, por ejemplo: "casa Juan río", "ratón gato corre" no son símbolos que expresen proposiciones, si no simplemente cosas sin sentido, que obedezcan a algún código especial.

Luego para que los símbolos enuncien una proposición, deben tener un orden y un significado.

Las proposiciones tampoco deben identificarse con las partes concretas que las forman, ya sean objetos, cosas o sucesos. En el ejemplo, "la tierra gira alrededor del sol", la proposición no solamente es la "tierra", ni el "sol", si no la relación que se establece entre ellas, es decir, sólo se obtienen proposiciones, discriminando dentro de una situación, las relaciones existentes entre los elementos que encontramos en ella. También existen proposiciones que nos hacen pensar a veces tienen valor de verdad "Verdadero" y a veces valor de verdad "Falso"; "hoy es domingo", es verdadera para cierto día, pero no siempre, ésto debido a que la frase "hoy es domingo" presupone una fecha para determinar su valor de verdad. Es decir, si tomamos una o varias fechas, encontramos proposiciones de valor de verdad "Verdadero", o también de valor de verdad "Falso".

En general, lo que queremos dar a entender, es que los enunciados cotidianos rara vez contienen todas las especificaciones necesarias para determinar si lo que decimos tiene valor de verdad "Verdadero" o valor de verdad "Falso", es decir a veces entendemos algunas de éstas, pero en otras ni siquiera las imaginamos. Cuando decimos que una expresión tiene a veces valor de verdad "Verdadero" y a veces "Falso"; sólo podemos significar con ello que es posible completar nuestras expresiones de ciertas maneras que traducen proposiciones de valor de verdad "Verdadero" y de ciertas otras, que traducen proposiciones de valor de verdad "Falso". Existe otra clase de proposiciones que tienen la cualidad de tener valor de verdad siempre "Verdadero", (Tautologías "T"), o valor de verdad siempre "Falso", (Antilogías "⊥"); es el caso de:

- "El hombre es mortal"
- "El hombre es inmortal"

Son proposiciones que conservan su valor de verdad, no importa el lugar donde se diga, ni el idioma que se use.

Es conveniente aclarar, que éstas expresiones en cualquier ciencia, reciben el nombre de "Leyes".

DEFINICION

Proposición es una afirmación, con valor de verdad único.

Aclaración :

Con único se quiere decir, que el valor de verdad, es independiente del juez, (persona que la juzgue), e independiente del tiempo, (la hora, el día, etc., que se diga).

En conclusión:

Decimos que una proposición, es una expresión que posee las siguientes cualidades :

1.- Es afirmativa.

2.- Posee valor de verdad.

3.- El valor de verdad es único.

 a. Es independiente del juez.

 b. Es independiente del tiempo.

Ejemplos:

1.- Bolivar nació en Caracas ?

 Dios mío !.

2.- Buenos días

 Saludos en casa.

3.- a. Bogotá es una ciudad fría.

 Las cerezas son sabrosas.

 b. Hoy es domingo.

 Está lloviendo.

4.- El hombre es un animal irracional

El agua moja.

El ejemplo, "Bolivar nació en Caracas ?", no es una proposición, por no ser afirmativa.

El ejemplo, "Buenos dias" aunque es afirmativa, no es proposición, por cuanto no podemos asignar su valor de verdad.

El ejemplo, "Bogotá es una ciudad fria", aunque es afirmativa, y posee valor de verdad, no es independiente de la persona que la juzgue.

El ejemplo, "Hoy es domingo", no es una proposición, ya que su valor de verdad depende del dia que se diga.

Los ejemplos de la parte cuatro (4) son proposiciones.

Aclaración :

Aunque los ejemplos de la parte 3-b., no son proposiciones, en adelante serán tratadas como si lo fueran.

Los siguientes ejemplos también son proposiciones, y son estudiados en la sección 2.3..

5.- Pedro tiene dos años y Juan tiene cuatro años.

6.- Està lloviendo o hace frio.

7.- Si el salmòn es un pez, entonces, vive en el agua.

8.- Hèctor tiene màs edad que Juan, es lo mismo que, Juan es menor que Hèctor.

1.1. PROPOSICIONES SIMPLES

Las proposiciones simples, son enunciados, que no pueden ser descompuestos en partes, que a su vez sean proposiciones.

Nota:

En la mayoria de los textos, las proposiciones simples reciben el nombre de "Proposiciones Atòmicas".

Ejemplos :

1.- Bogotà es la capital de Colombia.

2.- Hoy es domingo.

3.- Europa es un continente.

4.- Cuatro es un nùmero mayor que tres.

5.- La reuniòn es hoy a las tres en punto.

1.1.1. Notación de Proposiciones Simples.

La notación o simbolización, es un proceso que consiste en reemplazar ciertas expresiones en otras de manejo y aplicación más sencillos, pero de igual significado. En nuestro caso, las expresiones a sustituir son las proposiciones simples y para ello utilizaremos las letras minúsculas p, q, r, s, ..., por ser las de mayor comodidad en la escritura Braille.

Ejemplo 1.

Para notar la proposición "Bogotá es la capital de Colombia", procedemos :

p : Bogotá es la capital de Colombia.

Esto significa que a continuación y mientras no cambiemos de ejemplo, cada vez que encontremos la letra "p", debemos pensar que se trata de la expresión "Bogotá es la capital de Colombia".

Ejemplo 2.

"Hoy es domingo", llamaremos ésta proposición "q" y notamos :

q : Hoy es domingo.

1.1.2. Negación de Proposiciones Simples

En lógica, el símbolo "~" que se lee "No", al ser antepuesto a una proposición representa su negación, y hace que automáticamente su valor de verdad cambie, en español encontramos las palabras "No", "Ni", "Nada", "Ningún", "Nadie", etc., que representan la negación de una expresión. En éste texto trataremos lo referente a la palabra "No".

Ejemplo 1.

Si asumimos, la proposición "Está lloviendo" como cierta, entonces, su negación "No está lloviendo" es falsa, y sucederá lo mismo en caso contrario.

Ahora bien: "está lloviendo", es una proposición escrita en español, simbolizada lógicamente será :

p : Está lloviendo.

Es importante recordar, que siempre que encontremos "p", estaremos diciendo "Está lloviendo", hasta que no se cambie de contexto.

Apliquemos ahora, la palabra "No" al ejemplo: "No está lloviendo".

"~p", será su notación, y se lee "no p". Esto es:

~p : No está lloviendo.

Ejemplo 2.

La palabra "No", también suele encontrarse dentro de las proposiciones. "Hoy no es domingo", su notación es :

~p : Hoy no es domingo.

Ejemplo 3.

A veces encontramos expresiones como:

"No es cierto que no está lloviendo".

Esta expresión se puede notar como una sola proposición. Pero aconsejamos tratarla de la siguiente manera:

p : Esta lloviendo

Siempre tomando la forma afirmativa.

Aclaración:

Al decir; de la forma afirmativa, no significa que la expresión, sea verdadera, porque con mucha frecuencia, afirmamos expresiones que son falsas.

~p : No está lloviendo.
~~p : No es cierto que no esté lloviendo.

Esta última será la notación y debe leerse "No..., no p".

Ahora, si suponemos que "p" tiene valor de verdad "Verdadero", entonces, "~p" será falso y "~~p", será verdadero.

El alumno debe observar que el valor de verdad de "p" es el mismo que, el valor de verdad de "~~p"; es decir, afirmar "p", es lo mismo que afirmar "~~p".

Ejemplo 4.

También encontramos expresiones como:

"No ocurre que no sea cierto que no esté lloviendo".

Aquí encontramos tres negaciones y el proceso de notación es:

p : Está lloviendo. (Se toma siempre la forma afirmativa)

~p : No está lloviendo.

~~p : No es cierto que no esté lloviendo.

~~~p : No ocurre que no sea cierto que no esté lloviendo.

Si asumimos que "p" tiene valor de verdad "Falso"; cómo será "~~~p" ?. Compare este valor de verdad con el de "~p".

Aunque expresiones como las de nuestro ejemplo, rara vez ocurren en lengua castellana, en lógica son expresiones que se trabajan con mucha frecuencia.

Nota:

Las palabras "Ocurre que", "es cierto que" son únicamente auxiliares que utiliza nuestra lengua, para facilitar lectura, pero en lógica no tienen ningún significado. De todas formas en el capitulo III, daremos un trato más especial a éstas palabras.

Ejemplo 5.

Con mucha frecuencia la palabra o palabras que representan una negación, son interpretados como expresiones de
~~~

valor de verdad "Falso".

a. Los hombres no son mortales.

b. Los hombres no son inmortales.

En el ejemplo a.; La proposición tiene valor de verdad "Falso", coincidiendo con la aplicación de la palabra "No".

Para el ejemplo b.; el valor de verdad es verdadero, independiente de la palabra "No".

Por otra parte, el afirmar la expresión "Los hombres son mortales", nos induce a pensar erróneamente que su negación es "Los hombres son inmortales. Esto se debe a que literariamente significan lo mismo; pero lògicamente no. Su negación es como ya lo dijimos, "Los hombres no son inmortales".

Para màs claridad veamos el siguiente ejemplo:

Si asumimos la expresión "Pedro estudia todo el día" como cierta; su negación es; "Pedro no estudia todo el día" que es falsa; y en ningún momento puede ser "Pedro trabaja todo el día" o "Pedro estudia medio día" que también tienen valor de verdad "falsos".

1.2. PROPOSICIONES COMPUESTAS

En lógica existen símbolos que nos permiten unir proposiciones. Estos símbolos reciben el nombre de "Conectores" o "Enlaces Lógicos" y son:

Conectivo	Nombre lógico	Símbolo
1. No...	Negación	$\sim$
2. ...Y...	Conjunción	$\wedge$
3. ...O...	Disjunción Incluyente	$\vee$
	Disjunción Excluyente	$\underline{\vee}$
4. Sí..., Entonces...	Implicación o Condicional	$\longrightarrow$
		$\longleftarrow$
5. ...Sí y solo sí...	Doble implicación o Bi-condicional	$\longleftrightarrow$

Nota:

1. Los puntos suspensivos en cada conector indican que estas partes van proposiciones.
2. La expresión "...Sí y solo si...", es utilizada con

frecuencia en Matemáticas, y en español la encontramos como "Solamente si...", "...Es lo mismo que...", "...Equivalente a...", etc.

En la tabla anterior, encontramos en la primera columna, la palabra o palabras escritas en nuestro idioma; al frente y en la segunda columna el nombre lógico, que es el que utilizamos en lo que resta del texto, y por último, los símbolos que ayudarán y facilitarán el manejo de futuros cálculos.

1.2.1. Conjunción "/\"

En español, la palabra "Y", es utilizada de dos formas:

- Pedro se baña y se seca, ("Y" Secuencial o Atemporal)
- Pedro canta y baila, ("Y" Asecuencial o Atemporal)

La expresión, "Pedro se baña y se seca",, aunque en español es muy común, desde el punto de vista lógico no tiene sentido, ya que son acciones que no pueden suceder a la vez, es decir, no sucede que, "Pedro se bañe y se seque" al mismo tiempo, mientras, la expresión "Pedro canta y baila" si tiene sentido lógico, porque Pedro puede cantar y bailar a la vez, en otras palabras, el conector "Y", que la lógica estudia, es aquel, que indica la simultaneidad de dos o más hechos.

Por otra parte: existen además, de las expresiones mencionadas en la tabla, otras que indican la presencia de conectores así, por ejemplo: en lugar de enlace "Y", podemos encontrar las palabras: "...e...", "...pero...", "mientras...", "todos...", "...con...", etc., y los signos de puntuación "coma" o "punto".

Ejemplo 1.

Está lloviendo y hace frío.

p: Está lloviendo

q: Hace frío

$p \wedge q$

Ejemplo 2.

Pedro es juicioso e inteligente.

p: Pedro es juicioso

q: Pedro es inteligente.

$p \wedge q$

Ejemplo 3.

Pedro es juicioso pero no es inteligente

p: Pedro es juicioso

q: Pedro es inteligente

~q: Pedro no es inteligente

p /\ ~q

Ejemplo 4.

Pedro estudia mientras Juan juega.

p: Pedro estudia

q: Juan juega

p /\ q

Ejemplo 5.

Todos: Juan, Pedro, Héctor son profesores.

p: Juan es profesor

q: Pedro es profesor

r: Héctor es profesor

p /\ q /\ r

Ejemplo 6.

Pedro es juicioso, inteligente y buen hijo.

p: Pedro es juicioso

q: Pedro es inteligente

r: Pedro es buen hijo.

p /\ q /\ r

Ejemplo 7.

Pedro juega. Pedro canta. Pedro corre

p: Pedro juega

q: Pedro canta

r: Pedro corre

$p \wedge q \wedge r$

Nota:

Las proposiciones de los ejemplos 5, 6, 7, son estudiadas en el Capítulo II.

1.2.2. Disjunción "$\underline{\vee}$" "$\vee$"

En español, la palabra "o" es utilizada de dos formas, que son estudiadas por la lógica y reciben el nombre de: "O-Excluyente", "O-Incluyente". Veamos:

- Pedro es vidente o invidente, (O-Excluyente).
- Pedro canta o baila, (O-Incluyente).

En el ejemplo, "Pedro es vidente o invidente", es una "O" excluyente, ya que permite la ocurrencia de una de las dos proposiciones, y en ningún caso la ocurrencia simultánea de ambas.

En el ejemplo, "Pedro canta o baila", es una "O" incluyente; ya que permite que: "Pedro cante y baile" al mismo tiempo, o que "Pedro cante y no baile", o que "Pedro baile y no cante", es decir, permite la ocurrencia simultánea, o la ocurrencia de cada proposición por separado.

Por otra parte; en español, en lugar de enlace "...O...", podemos encontrar: "...u...", "Cualquiera entre...", "Alguno entre...", etc.

Ejemplo 1.

Está lloviendo o hace frío.

p: Está lloviendo

q: Hace frío

$p \vee q$

Ejemplo 2.

Cualquiera entre Juan, María o José va al paseo.

p: Juan va al paseo

q: María va al paseo

r: José va al paseo

$p \underline{\vee} q \underline{\vee} r$

Ejemplo 3.

Hoy no es sábado u hoy no es domingo

p: Hoy es sábado

~p: Hoy no es sábado

q: Hoy es domingo

~q: Hoy no es domingo

$\sim p \ \underline{\vee}\ \sim q$

1.2.3. Implicación o Condicional "--->" "<---"

En español, el enlace "Si...entonces...", se encuentra de dos formas:

- Si Juan nace en Bogotà, entonces, es colombiano, (Implicación fuerte o Condición Suficiente).
- Si Juan se acuesta, entonces, se duerme, (Implicación débil o Condición necesaria).

En el ejejmplo, "Si Juan nace en Bogotà, entonces, es colombiano", nos basta afirmar que "Juna nació en Bogotà", para concluir que es "colombiano", o que es "latinoamericano" o que es "americano", etc., es decir, es "Condición Suficiente" afirmar que "Juan nació en Bogotà" para implicar una conclusión de éstas; en particular que es "colombiano".

En el ejemplo, "Si Juan se acuesta, entonces se duerme", decir que "Juan se acuesta", no es suficiente para concluir que "se ha dormido"; es necesario además, dar otras indicaciones, por ejemplo, "está cansado", "tiene sueño", "ronca", etc..

Además, en español, en lugar del enlace -"Si...entonces...", encontramos "Si...,...", "...,Si...", "...es consecuencia de...", "...se deduce de...", "...se desprende...", etc.

Ejemplo 1.

Si la paloma es un ave, entonces, tiene alas.

p: La paloma es un ave.

q: La paloma tiene alas.

p ---> q

Ejemplo 2.

Si Pedro canta a sus familiares, es extrovertido.

p: Pedro canta a sus familiares.

q: Pedro es extrovertido.

p ---> q

Ejemplo 3.

Pedro canta a sus familiares, si es extrovertido.

p: Pedro canta a sus familiares.

q: Pedro es extrovertido.

p <--- q

Ejemplo 4.

Pedro no puedo ir al trabajo, como consecuencia de , se resfriô.

p: Pedro no pudo ir al trabajo.

q: Pedro està resfriado.

p <--- q

Nota:

Es conveniente introducir, dos nuevos conceptos "Antecedente" y "Consecuente"; en el ejemplo 1, y siempre que aparezca el enlace "Si...entoces...", el "Antecedente" es la proposiciôn que se encuentra acompañada por la palabra "Si" y la otra proposiciôn se llama "Consecuente". Lo mismo sucede para los ejemplos 2 y 3.

Para el ejemplo 4, el antecedente es la proposiciôn que se encuentra despuès del enlace, la otra proposiciôn es el consecuente, es decri:

En "p ---> q", "p" es el antecedente y "q" es el concecuente.

En "p <--- q", "p" es el concecuente y "q" es el antecedente.

El alumno debe observar, que afirmar "p ---> q", es diferente que afirmar "p <--- q".

1.2.4. Doble Implicación o Bi-Condicional. "<-->".

Existe una relación muy estrecha entre los significados de "Condicional" y "Bi-Condicional", veamos; en lógica, decir "p <--> q" equivale a decir "p ---> q /\ p <--- q", y su significado en español es el siguiente:

En el ejemplo "Pedro está vivo, sólamente si camina", afirmar que "Pedro está vivo", es una condición necesaria, para decir que "Pedro camina"; y afirmar que "Pedro camina", es una condición suficiente, para concluír que "Pedro está vivo".

Por lo tanto, el conector "...Si y solo si...", nos indica una condición "Necesaria y Suficiente", mientras el conector "Si...entonces..." nos indica una condición "Necesaria o Suficiente". Es decir, la aparición simultánea de las condiciones "Necesaria y Suficiente" en una proposición, es indicada mediante el conector "...Si y sólo si...".

Como ya se ha dicho el enlace "...Si y sólo si..." es utilizado en Matemáticas, y en español lo encontramos como: "...Solamente si...", "...es lo mismo que...", "...es decir...", "...como se dice comúnmente...", "...quiere decir...", "...dicho en otras palabras...", "...esto es...", "...equivale a...", etc.

Ejemplo 1.

Gabriel va al paseo, solamente si, tiene dinero.

p: Gabriel va al paseo

q: Gabriel tiene tinero

p <--> q

Ejemplo 2.

Decir: El perro tiene cuatro patas, es lo mismo que decir, es cuadrúpedo.

p: El perro tiene cuatro patas

q: El perro es cuadrúpedo

p <--> q

Ejemplo 3.

Son las 19 horas, es decir, son las 7 de la noche.

p: Son las 19 horas

q: Son las 7 de la noche

p <--> q

1.3. VALOR DE VERDAD DE UNA PROPOSICION COMPUESTA (De dos proposiciones simples)

Al igual que las proposiciones simples, una Proposición Compuesta tiene un ûnico valor de verdad.

Ahora bien, si una proposición simple, tiene un ûnico valor de verdad, Què sucederà con las proposiciones compuestas?. Veamos: Sea nuestra proposición compuesta "p * q". Cuàl serà su valor de verdad ?.

La proposición "p", puede ser verdadera o falsa, lo mismo sucede con la proposición "q". Analicemos todas las posibles combinaciones entre los valores de verdad de "p" y "q", resulta:

1. p sea verdadera, q sea verdadera
2. p sea verdadera, q sea falsa
3. p sea falsa, q sea verdadera

4. p sea falsa, q sea falsa.

El alumno puede observar fàcilmente, que con dos proposiciones, suceden ùnicamente las cuatro anteriores combinaciones de sus valores de verdad. Contestemos ahora la pregunta! Cuàl serà el valor de verdad de la proposiciòn Compuesta "p * q" ?. Para mayor facilidad dividiremos el estudio en cuatro partes.

1.3.1. La Conjunciòn.

Es importante recordar que la "Y" que la lògica estudia es la "Y-Asecuencial o Atemporal". Comocemos el estudio de la siguiente expresiòn: "Marìa va a preparar cafè con leche". Puede suceder, entonces, las siguientes cuatro posibilidades:

1. Que Marìa tenga el cafè y tenga la leche.
2. Que Marìa tenga el cafè y no tenga la leche
3. Que Marìa no tenga el cafè y tenga la leche.
4. Que Marìa no tenga el cafè y no tenga la leche.

Ahora preguntemos: En cuàl de los casos, Marìa puede preparar cafè con leche ?.

Indiscutiblemente en el caso 1., donde tanto tiene el café, como tiene la leche; mientras en los casos 2 y 3, podrá preparar café, o podrá preparar leche, pero en ningún caso café con leche, en el caso 4, no podrá preparar café con leche, puesto que no tiene, ni café, ni leche.

Por tanto, la conjunción tiene valor de verdad "Verdadero", cuando se cumplen simultáneamente las dos proposiciones que la conforman.

DEFINICION:

La conjunción es aquel conector, que al actuar sobre dos proposiciones dá lugar a una nueva proposición, cuyo valor de verdad es "Verdadero", sólamente si, cada proposición a su vez tiene su valor de verdad "Verdadero".

El razonamiento anterior es simbolizado lógicamente de la siguiente manera:

Escribimos la proposición "p /\ q". Debajo y en columna de cada proposición simple colocamos sus posibles valores de verdad, "Verdadero v" y "Falso f". Así:

p	/\	q
v		v
v		f
f		v
f		f

Luego se realiza el anàlisis correspondiente y el resultado se coloca debajo y en columna del conector, asì:

p	/\	q
v	v	v
v	f	f
f	f	v
f	f	f

La tabulaciòn anterior en lògica recibe el nombre de "Tabla de los valores de verdad" de "p /\ q". Y a pesar de que cada par de proposiciones, tiene cuatro ùnicas posibilidades de combinaciòn para ejemplos especìficos (en la vida real), solo sucede una y sòlo una de las cuatro posibilidades estudiadas.

El alumno antes de memorizar esta tabla, debe intentar entender el desarrollo de la misma para facilitar la comprensiòn de lo que resta del texto.

Por otra parte somos concientes, que el desarrollo de esta tabla en una pizarra es un poco complicado, mas no imposible, con un poco de pràctica los alumnos lograràn un fàcil manejo y una forma pràctica y sencilla de desarrollar los distintos ejercicios de lògica. Para ello daremos las siguientes indicaciones:

1. Escribimos la proposiciòn "p /\ q" en el cuarto renglòn de la pizarra.

2. Despendemos la pizarra y la bajamos al siguiente espacio de tal forma que pueda leerse por el revès de la hoja la proposiciòn "p /\ q".

3. Colocamos los valores de verdad de cada proposiciòn, como son cuatro las posibles combinaciones, se acomodan perfectamente al nùmero de renglones de la pizarra, asi:

p	/\	q
v		v
v		f
f		v
f		f

4. Desprendemos la pizarra y resolvemos la tabla mentalmente de la siguiente forma:

"v" y "v" es "v"

"v" y "f" es "f"

"f" y "v" es "f"

"f" y "f" es "f"

Memorizamos la respuesta hallada, esta es v, f, f, f.

5. Colocamos nuevamente la pizarra y escribimos el resultado en la columna corresondiente, esto es, debajo del conector "/\" así:

p /\ q

v v v

v f f

f f v

f f f

Nota:

El alumno podía preguntar, si hemos sacado los valores de verdad teniendo en cuenta la relación entre los significados de las proposiciones simples consideradas. Para nuestro ejemplo sí; pero ésto se ha hecho únicamente para dar mayor claridad. En lógica no se requiere que el contenido de la proposiciones, tengan relación entre sí, hubiéramos podido tomar "3+2=5" y la tierra es redonda, pero tal vez no hubiéramos logrado claridad en la explicación. En otras palabras, queremos decir, que la definición de conjunción se cumple siempre para cualquier par de proposiciones.

1.3.2. La Disjunción

Como ya se ha dicho, en español la "O" puede ser "INCLUYENTE" o "EXCLUYENTE", veamos las siguientes expresiones:

- Se necesita secretaria que sepa francés o inglés. (Incluyente).
- Pedro está muerto o vivo, (Excluyente).

Para el primer caso tenemos:

1. Sabe francés o inglés
2. Sabe francés o no sabe inglés
3. No sabe francés o sabe inglés
4. No sabe francés o no sabe inglés

Ahora preguntamos, Cuándo la aspirante es aceptada ?.

Para el primer caso, donde tanto sabe francés como inglés, la aspirante es aceptada.

Para el segundo caso, donde sabe uno de los dos idiomas, la aspirante, también es aceptada.

Para el caso cuarto, la aspirante no es aceptada, ya que no sabe ninguno de los dos idiomas. Por tanto, la disjunción "Incluyente", tiene valor de verdad "Falso", cuando no se cumplen ninguna de las dos proposiciones que la conforman.

DEFINICION

La disjunción "Incluyente", es aquel conector que al actuar sobre dos proposiciones, dà lugar a una nueva proposición, cuyo valor de verdad es "Falso", solamente si, cada proposición a su vez tiene valor de verdad Falso, y se simboliza por "\/".

A la segunda proposición "Pedro està vivo o muerto", podemos decir:

- Que Pedro està muerto, o
- Que Pedro està vivo.

Pero en ningûn caso se puede decir, que a la vez "Pedro està muerto o vivo", o que "No està ni muerto, ni vivo". Por tanto la

disjunción "Excluyente", tiene valor de verdad "Verdadero", cuando se cumplen una de una de las dos proposiciones que la conforman.

DEFINICION

La disjunción "Excluyente", es aquel conector, que al actuar sobre dos proposiciones, dá lugar a una nueva proposición cuyo valor de verdad es "Verdadero", sólamente si, una de las dos proposiciones que la conforman tiene valor de verdad "Verdadero" y la otra tiene valor de verdad "Falso" y viceversa; se simboliza por "$\veebar$".

Los casos "O-Incluyente", y "O-Excluyente", son simbolizados mediante tablas de la siguiente manera:

O-Incluyente

p	\/	q
v	v	v
v	v	f
f	v	v
f	f	f

O-Excluyente

p	$\veebar$	q
v	f	v
v	v	f
f	v	v
f	f	f

1.3.3. Implicación o Condicional.

Recalquemos que el "Si...entonces..." se encuentra de dos formas, "Implicación fuerte o Condición suficiente" e "Implicación débil o Condición necesaria". Veamos el siguiente ejemplo:
"Si Pedro es inocente, entonces, será dejado en libertad". Puede suceder que:

1. Si Pedro es inocente, entonces, sea dejado en libertad.
2. Si Pedro es inocente, entonces, no será dejado en libertad
3. Si Pedro no es inocente, entonces será dejado en libertad.
4. Si Pedro no es inocente, entonces, no será dejado en libertad.

Preguntemos, En cuál de los casos el proceso es justo ?

Para el caso 1, donde Pedro es inocente y es dejado en libertad, el proceso ha sido justo; lo mismo sucede en el caso 4, donde no es inocente, y por tanto no es dejado en libertad.

Para el caso 2, donde Pedro es inocente y no es dejado en libertad, el proceso es injusto.

Para el caso 3, donde Pedro no es inocente y es dejado en libertad, el proceso es justo, ya que la ley dice, que una persona es inocente, mientras no se demuestre lo contrario, èsto es: no se han reunido las pruebas suficientes para condenar a Pedro. Por lo tanto, la implicación tiene valor de verdad "Falso", ûnicamente, cuando el antecedente tiene valor de verdad "Verdadero", y el consecuente, valor de verdad "Falso".

DEFINICION

La implicación o Condicional, es aquel conector, que al actuar, sobre dos proposiciones, dâ lugar a una nueva proposición, cuyo valor de verdad es "Falso", sôlamente si, el antecedente tiene valor de verdad "Verdadero", y el consecuente valor de verdad "Falso".

Simbolizado Lógicamente:

p	--->	q
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f

1.3.4. Doble-Implicación o Bi-Condicional.

Debemos recordar, que el conector "...Solamente si...", representa una condición "Necesaria y Suficiente", mientras el "Si...entonces...", representa una condición

"Necesaria o Suficiente". Ahora preguntemos:
Cuándo la siguiente expresión es cierta ?.
"Pedro es ciego, sòlamente si no ve".
Es claro: que para que "Pedro sea ciego", es necesario que no vea. Y es suficiente que "no vea", para que sea "Ciego"; por lo tanto, el conector "...solamente si..." es cierto, cuando ambas proposiciones son ciertas.

Ahora: si "Pedro no es ciego", es porque "Ve" y si "Ve", es porque "No es ciego", por lo tanto, la expresión también es cierta cuando ambas proposiciones tinen valor de verdad falsos.
Mientras, es falso decir que "Pedro es ciego y ve", o que "Pedro no es ciego y no ve". En conclusión, el enlace "...Solamente si...", es cierto, cuando ambas proposiciones son ciertas, o cuando ambas proposiciones son falsas.

DEFINICION:

La Doble-Implicación o Bi-Condicional, es aquel conector, que al actuar sobre dos proposiciones, dà lugar a una nueva proposición, cuyo valor de verdad es "Verdadero", sòlamente si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Su tabulación es:

p	<-->	q
v	v	v
v	f	f
f	f	v
f	v	f

1.4. PROPOSICIONES EQUIVALENTES

Dos proposiciones se dicen "Equivalentes", si al realizar sus tablas de verdad, éstas tienen igual valor de verdad y la simbolizamos "≡".

Ejemplo 1.

Hoy es domingo, es equivalente con, no es cierto que hoy es domingo.

Notado:

p: Hoy es domingo

~p: Hoy no es domingo

~~p: No es cierto que hoy no es domingo

Entonces "p≡ ~~p". Veamos:

"p", tiene valor de verdad "Verdadero", o valor de verdad "Falso".

Ahora bien:

Si "p" tiene valor de verdad "Verdadero", "~p" tendrá valor de verdad "falso" y "~~p" tendrá valor de verdad "verdadero".

Si "p", tiene valor de verdad "Falso", "~p" tendrá valor de verdad "Verdadero" y "~~p" valor de verdad "Flaso", que son los mismos valores de verdad de "p".

Para más claridad construyamos su tabla de verdad de la misma forma que en la sección 1.3.1. .

1. Colocamos la expresión "p ≡ ~~p", en el último renglón de la pizarra.
2. Desprendemos la hoja y bajamos la pizarra.
3. Escribimos los valores posibles de "p", así:

   p ≡ ~~p

   v   v

   f   f
4. Desprendemos la hoja y aplicamos la primer negación, memorizando su respuesta, ésta es "f, v".

5. Colocamos la pizarra y escribimos debajo del enlace correspondiente, así:

p ≡ ~~p

v   fv

f   vf

6. Desprendemos nuevamente la pizarra y aplicamos la segunda negación, esta es "v, f".

7. Colocamos la pizarra y escribimos el resultado, así:

p ≡ ~~p

v   vfv

f   fvf

Comparando la columna de la segunda negación, con la columna de "p", encontramos que son iguales, (con iguales queremos decir, que los valores de verdad están en el mismo orden), si ésto sucede, entonces podemos concluir que "p" es "Equivalente" con "~~p", (p ≡ ~~p).

Ejemplo 2.

Se ha dicho, que afirmar "p <--> q", es lo mismo que afirmar "p ---> q /\ p <--- q", es decir,
"p <--> p ≡ p ---> q /\ p <--- q", ésto significa que la tabulación de "p <--> q" debe ser igual a la tabulación de "p ---> q /\ p <--- q", veamos:

"p ---> q", tiene como tabla:

p	--->	q
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f

Y "p <--- q", tiene como tabla:

p	<---	q
v	v	v
v	v	f
f	f	v
f	v	f

Aclaraciòn:

La proposiciòn "p <--- q", nos indica, que para su tabulaciòn debemos partir de los valores de "q", hacia los valores de verdad de "p", teniendo en cuenta la definiciòn del conector "Si...entonces...", (es falso ùnicamente cuando el antecedente es "v", y el concecuente es "f"), como se ha hecho en la tabulaciòn anterior.

Juntando "p ---> q" con "p <--- q", mediante el conector "/\" tenemos:

p ---> q	/\	p <--- q
v		v
f		v
v		f
v		v

Aclaración:

Esta tabla contiene únicamente los resultados de las tablas "p ---> q", y "p <--- q", para mayor facilidad del lector.

Por lo tanto y como se ha dicho la tabulación de la Doble-Implicación, debe ser la consecuencia de unir estos resultados, mediante el conector "/\", veamos:

p ---> q	/\	p <--- q
v	v	v
f	f	v
v	f	f
v	v	v

El resultado de la tabla, es la columna que se encuentra debajo del enlace "/\", que es identica a la columna de la tabulación de la Doble-Implicación antes ayada. Por lo tanto "p ---> q /\ p <--- q ≡ p <--> q" o viceversa.

1.3. RESUMEN

Empecemos por observar y según todo lo que se ha dicho, cualquier proposición es por definición una afirmación con valor de verdad único, que puede ser expresada mediante una letra minúscula. Por otra parte, una proposición simple es aquella que no puede ser descompuesta en partes que a su vez sean proposiciones; y que al aplicarle el conector negación, éste, hace que automáticamente su valor cambie. Además, se ha dicho que uniendo proposiciones simples mediante conectores, se obtienen más proposiciones llamadas compuestas y son expresiones que también poseen valor de verdad "Verdadero" o valor de verdad "Falso" y aunque, éstos valores han sido hallados en función de la relación, entre los significados de las proposiciones simples que las conforman; en lógica, "No" es necesario que los significados tengan relación. Por último; se ha dicho, que si dos proposiciones tienen idéntica tabulación de sus valores de verdad, ellas reciben el nombre de "Proposiciones Equivalentes".

1.6. RESUMEN DE TABULACIONES

Tabla de una proposición simple y sus "Negaciones"

p	~p	~~p	~~~p
v	fv	vfv	fvfv
f	vf	fvf	vfvf

Tabla de la Conjunción "/\"

p	/\	q
v	v	v
v	f	v
f	f	v
f	f	f

Tabla de la Disjunción Incluyente "\/"

p	\/	q
v	v	v
v	v	f
f	v	v
f	f	f

Tabla de la Disjunción Excluyente "\/"

p	$\underline{\vee}$	q
v	f	v
v	v	f
f	v	v
f	f	f

Tabla de la Implicación o Condicional "--->" "<---"

p	--->	q
v	v	v
v	f	f
v	v	v
f	v	f

p	<---	q
v	v	v
v	v	f
f	f	v
f	v	f

Tabla de la Doble-Implicación o Bi-Condicional "<-->"

p	<-->	q
v	v	v
v	f	f
f	f	v
f	v	f

Observación:

Existe otra forma práctica y sencilla de resumir las anteriores tabulaciones, esta forma la indicamos a continuación :

p	q	/\	\/	<u>\/</u>	--->	<---	<-->
v	v	v	v	f	v	v	v
v	f	f	v	v	f	v	f
f	v	f	v	v	v	f	f
f	f	f	f	f	v	v	v

En la tabulación anterior, encontramos en las columnas de "p" y "q", las posibles combinaciones de sus valores de verdad, luego encontramos los conectores que han unido éstas proposiciones; debajo y en columna de cada uno de ellos, se encuentra el resultado de su aplicación.

EJERCICIOS

A. Según la definición de proposición, diga cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones, cuáles no, diga porque y simbolicelas.

1. Juan se casó con María
2. Esta es la llave de la puerta de mi casa
3. El amor nace en el corazón
4. El día 22 de octubre de 1972 fué martes
5. ¡Ajá!
6. Mañana es miercoles
7. La primera letra del alfabeto es la "t"
8. Hay animales que no son aves
9. El rio más largo de Colombia es el Magdalena
10. Gracias a Dios

B. Quitando la parte "3-b" de la definición de la proposición, diga cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones, cuáles no, diga porque y simbolicelas.

1. $x + 5 = 3$
2. Hoy es 24 de diciembre

3. Està de noche

4. Antonio Nariño fuè el precursor de los Derechos del Hombre

5. Prohibido fumar

6. $2 + 2 = 4$

7. Hace frio

8. Tengo sueño

9. !Oh! Gloria inmarcesible

10. Tarde triste

C. Simbolice las siguientes proposiciones

1. Vamos a patinar, si hiela esta noche

2. Ernesto tiene titulo o experiencia

3. La culebra es un reptil o no

4. Nos casamos y terminamos el noviazgo

5. Caracas no es una ciudad colombiana, pero Medellin y Bogotà si lo son.

6. Podemos ir al cine o a la fiesta

7. Si Hèctor no es sano, entonces no es apto para el servicio militar

8. El animal salvaje ataca ùnicamente si tiene hambre

9. Estoy parado, sentado o acostado

10. No es verdad que haga frio en Barranquilla

11. Si hay escasez, los precios suben, si suben hay

inflación.

12. Carlos y José no viajan a Cali

13. Juan es viejo pero tiene el corazón joven

14. No es cierto que no estoy trabajando

15. Iré al estadio, sólamente si hace buen tiempo

D. Sea p: Hace buen tiempo

q: Vamos al paseo

r: Raúl canta

Escriba el significado de las siguientes expresiones:

1. $q \longrightarrow p$

2. $p \longrightarrow q \longrightarrow \sim r$

3. $p \longleftrightarrow r$

4. $\sim\sim\sim r \wedge p \wedge q$

5. $\sim p \longleftrightarrow r$

6. $q \vee q$

7. $\sim p \wedge q$

8. $q \veebar \sim r$

9. $r \veebar \sim\sim q \veebar r$

10. $\sim p \vee \sim q$

E. Diga el valor de verdad que corresponde a cada una de las siguientes combinaciones de los valores de verdad de "p" y "q" (el alumno debe tratar de resolver esta parte tratando de no consultar las tabulaciones del capítulo).

p q

1. v /\ v

2. f <u>\/</u> v

3. v <--> v

4. v /\ f

5. f <u>\/</u> f

6. v <--> f

7. v \/ v

8. v /\ v

9. v \/ f

10. f \/ f

11. f ---> f

12. f ---> v

13. v <u>\/</u> v

14. v <u>\/</u> v

15. v ---> v

16. f <--- f

17. v <u>\/</u> f

18. f <--- v

19. f /\ v

20. v ---> f

21. v <--- v

22. f \/ v

23. f <--> v

24. v <---> v

25. f <--- v

26. f <---> f

27. v ---> f

28. v <--- f

29. f \/ f

30. f /\ f

F. Si "p", tiene valor de verdad v, "q", valor de verdad f, y "r" valor de verdad f, diga el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1. r <---> r

2. p \/ ~~~r

3. p /\ ~r

4. p <---> ~~q

5. q \/ r

6. p /\ p

7. ~q \/ ~~p

8. q <---> r

9. ~~p <--- ~~q

10. q \/ r

11. r \/ p

12. ~~r \/ ~~~r

13. p ---> ~p

14. p <---> p

15. $\sim\sim p \wedge p$

16. $p \leftarrow p$

17. $\sim\sim\sim q \rightarrow r$

18. $p \rightarrow q$

19 $\sim p \leftarrow \sim r$

20. $q \underline{\vee} q$

G. Cuàles de las subsiguientes proposiciones son Equivalentes y cuàles no, diga porquè y construya sus tablas de verdad.

1. $p \wedge p \equiv p \vee p$
2. $p \underline{\vee} p \equiv p \vee p$
3. $p \leftarrow q \equiv p \rightarrow q$
4. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
5. $p \vee q \equiv q \vee p$
6. $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
7. $p \underline{\vee} q \equiv q \underline{\vee} p$
8. $p \leftrightarrow p \equiv p \underline{\vee} p$
9. $p \wedge q \equiv q \vee p$
10. $p \leftarrow p \equiv p \leftrightarrow p$

II. MAS SOBRE CONECTORES

Objetivos:

Al finalizar ésta unidad el alumno debe mostrar que está en capacidad de:

- Identificar las expresiones idiomáticas que constituyen conectores.
- Escribir la simbología de los diferentes conectores
- Describir y desarrollar los pasos que se deben seguir para la elaboración de los valores de verdad de cada conector.
- Identificar el dominio implícito del explícito de cada conector
- Leer y expresar por escrito expresiones lógicas
- Identificar a qué conectivos pertenecen las diferentes series de valores de verdad dadas en una tabla.
- Identificar cuándo una proposición es tautología, cuándo es antilogía y explicar que significa en cada caso.

2. MAS SOBRE CONECTORES

Los conectores que trataremos en ésta parte son:

El "O no..., o no...", el "Ni..., ni...", el "Si..., pero no..." y el "No..., pero si...", como lo indica el siguiente cuadro.

Nombre	Símbolo
1. O no..., o no...	/X
2. Ni..., ni...	X/
3. Si..., pero no...	-/->
4. No..., pero si...	<-/-

Nota:

Los conectores "O no..., o no..." y "Ni..., ni..." reciben también el nombre de conectores Shefferianos.

2.1. CONECTORES "O no..., o no..."

Consideremos la siguiente frase rutinaria:

"María va a preparar café con leche"

Preguntémonos ahora: Cuándo María no puede preparar café con leche ?.

Es claro que, "María no puede preparar café con leche", cuando "O no tiene el café, o no tiene la leche", es decir cuando no posee ambos, o uno de los dos componentes que constituyen un café con leche, mientras, podrá preparar café con leche, cuando posee tanto el café como la leche. Por tanto, el conector "O no..., o no..." tiene valor de verdad "Falso", cuando se cumplen simultáneamente las dos proposiciones que la conforman y se simboliza "p /X q".

DEFINICION:

El "O no..., o no...", es aquel conector, que al actuar sobre dos proposiciones, dà lugar a una nueva proposición, cuyo valor de verdad es "Falso", sólamente si, cada proposición a su vez tiene valor de verdad "Verdadero".

El razonamiento anterior es simbolizado lògicamente de la siguiente manera:

p	/X	q
v	f	v
v	v	f
f	v	v
f	v	f

2.2. CONECTOR "Ni..., ni...".

Consideremos la siguiente expresiòn:

"Se necesita secretaria que sepa inglès o francès".

Preguntemos, Cuàndo Maria no es aceptada?

Maria no es aceptada, cuando no sabe ninguno de los dos idiomas, es decir, cuando no sabe "ni inglès, ni francès", mientras obtendrà el puesto, cuando sepa uno de los dos idiomas, o cuando sepa ambos. Por tanto, el conector "Ni..., ni...", tiene valor de verdad "Verdadero", cuando no se cumpla ninguna de las dos proposiciones que la conforman y se simboliza "p X/ q".

DEFINICION:

El "Ni..., ni..." es aquel conector, que al actuar sobre dos proposiciones, dà lugar a una nueva proposición, cuyo valor de verdad es "Verdadero", sólamente si, cada proposición a su vez tiene valor de verdad "Falso".

Todo lo anterior es simbolizado de la siguiente manera:

p	X/	q
v	f	v
v	f	f
f	f	v
f	v	f

2.3. CONECTOR "Si..., pero no..."

Consideremos la expresión:
"Si Pedro es inocente, entonces, es dejado en libertad"
Preguntemos, Cuándo el proceso es injusto?

Es claro, que es injusto cuando siendo Pedro inocente no es dejado en libertad, es decir, cuando se sabe que Pedro "si es inocente, pero no es dejado en libertad", mientras será justo: cuando siendo inocente, es dejado en libertad; o cuando no siendo inocente, es dejado en libertad, (este último por no haberse reunido las pruebas suficientes). Por tanto el conector "Si..., pero no...", tiene valor de verdad "Verdadero", únicamente, cuando el antecedente tiene valor de verdad "Verdadero" y el consecuente valor de verdad "Falso", y se simboliza "p-/-> q".

DEFINICION:

El "Si..., pero no...", es aquel conector, que al actuar sobre dos proposiciones dà lugar a una nueva proposición, cuyo valor de verdad es "Verdadero", solamente si, el antecedente tiene su valor de verdad "Verdadero" y el consecuente valor de verdad Falso".

Simbolizado lògicamente:

p	-/->	q
v	f	v
v	v	f
f	f	v
f	f	f

2.4. CONECTOR "No..., pero si..."

Consideremos la expresión:

Pedro es dejado en libertad, si es inocente.

Cuándo el proceso es injusto?

Es claro que es injusto, cuando Pedro no es dejado en libertad, siendo inocente, es decir cuando "No es dejado en libertad, pero si es inocente", mientras es justo: cuando siendo inocente, es dejado en libertad; o cuando no siendo inocente, no es dejado en libertad; o cuando no siendo inocente es dejado en libertad, ("este último por falta de pruebas).

Por tanto, el conector "No..., pero si...", tiene valor de verdad "Verdadero" únicamente cuando el consecuente tiene valor de verdad "Falso" y el antecedente valor de verdad "Verdadero", se simboliza "p <-/- q".

DEFINICION:

El "No..., pero si...", es aquel conector que al actuar sobre dos proposiciones dà lugar a una nueva proposición cuyo valor de verdad es "Verdadero", sólamente sí, el consecuente tiene valor de verdad "Falso" y el antecedente valor de verdad "Verdadero".

Simbolizado lógicamente:

p	<-/-	q
v	f	v
v	f	f
f	v	v
f	f	f

Nota:

Si comparamos èstas tabulaciones, con las halladas en el capitulo anterior para la Conjunciòn, la Disjunciòn Incluyente y la Implicaciòn respectivamente, observamos: que sus columnas de respuestas son contraries, este hecho en lògica tambièn recibe el nombre de "Negaciòn" del respectivo conector. El alumno puede preguntar, què sucede con la Disjunciòn Excluyente y la Doble-Implicaciòn. Bueno, si observamos sus tabulaciones en el capitulo anterior, notaremos que es una negaciòn de la otra y viceversa.

2.5. PESO DE LOS CONECTORES

Asì como en español, utilizamos signos como la coma, el punto, la admiraciòn, los parèntesis, etc., para lograr mayor comprensiòn en la lectura y escritura de un pàrrafo; en lògica, tambièn nos valemos de ciertos signos como las letras minúsculas y los conectores, que nos proporcionan una mayor agilidad, exactitud y comprensión de cierto escrito.

Los conectores "~", "/\", "\/", "$\underline{\vee}$", "——>", "<——", "<-->", debido a su dominio dentro de una proposición, se clasifican de dos formas que son:

- Dominio Implícito
- Dominio Explícito

De acuerdo a su mayor "Dominio Implícito", se ordenan en forma creciente de la siguiente manera:

2.5.1. La Negación.

Es el conector de menor dominio dentro de una proposición y hasta el momento, sólo lo hemos aplicado a proposiciones simples "~p", pero también puede ser aplicado a proposiciones compuestas como lo veremos en 2.8.1.

2.5.2. La Conjunción y la Disjunción.

Estos le siguen en valor al conectar negación y hasta ahora han unido dos proposiciones simples, en el caso de "p /\ q", "p \/ q", "p \/ ~q", etc.

2.5.3. La Implicación y la Doble-Implicación.

La Implicación y la Doble-Implicación respectivamente, son los conectores de mayor dominio dentro de una proposición compuesta que además de unir dos proposiciones simples como "p ---> q", "~p <--> q", también nos conectan expresiones como "p \/ q ---> r", "p /\ q <--> r", "p ---> ~q <--> r", etc.

Pero los conectores no sólo facilitan la lectura y comprensión de un ejercicio, sino que son la herramienta indespensable en la tabulación de los valores de verdad de una proposición. Por ejemplo, el caso de "p \/ ~q", procedemos:

Sabemos que el enlace "\/", tiene mayor dominio que el enlace "~", entonces, tabulamos primero el conector de menor domimio, èste es "~q"; èste resultado lo tabulamos con la columna de posibilidades de "p", mediante el conector de mayor dominio "\/", y èsta columna es el resultado de la tabulación de la proposición "p \/ ~q".

En el ejemplo, "p /\ q ---> r" nos indica que primero debemos tabular la Conjunción "p /\ q", ya que su dominio es menor que el de la Implicación, luego este resultado lo tabulamos con la columna de "r" mediante el conector "--->", terminando así el ejercicio.

Nota:

El alumno no debe preocuparse por lo complicado que pueda parecer lo anteriormente expuesto, ya que en lo que resta de éste capítulo daremos algunos ejemplos; además en el capítulo III, nos encargaremos de dar una explicación más detallada y ejercicios suficientes, sobre la forma de tabulación de las proposiciones de éste tipo y de otras, que aún parecieran más complicadas, con el fin de que el alumno adquiera sistemáticamente la habilidad necesaria.

Por otra parte y además de los conectores, existen otros signos que llamaremos "Signos de Agrupación" que a continuación estudiaremos:

2.6. SIGNOS DE AGRUPACION

Podemos decir que los signos de agrupación nacen de la necesidad de indicar el "Dominio Explícito" de los conectores en una proposición. Así cuando un conector domina sobre los demás de manera implícita, no se necesita signo de agrupación, pero si se quiere indicar el "Dominio Explícito" prima sobre el tácito o implícito de cada conector, entonces recurrimos a los signos de agrupación.

Los signos de agrupación que utilizaremos son:

1. Paréntesis "()"
2. Paréntesis angular "[]"
3. Corchetes "{}"

2.7. LA NEGACION COMO ENLACE DOMINANTE EN UNA PROPOSICION SIMPLE

Recordemos lo visto sobre negación en el capítulo anterior con los siguientes ejemplos:

1. Está lloviendo
2. No está lloviendo
3. No ocurre que esté lloviendo
4. No es cierto que esté lloviendo
5. No ocurre que no es cierto que no esté lloviendo

El ejemplo 1, es una proposición simple en forma afirmativa, se simboliza:

p: Està lloviendo

El ejemplo 2, es una negaciòn de la forma que hasta el momento hemos estudiado, se simboliza "p", èsto es :

p: Està lloviendo

~p: No està lloviendo

Si analizamos los ejemplos 3 y 4, detectamos la presencia de varias palabras auxiliares, que son "...ocurre que...", "... es cierto que..."; èstas palabras que son utilizadas en español con mucha frecuencia, en lògica son reemplazadas por los signos de agrupaciòn.

Para èste ejemplo utilizaremos el parèntesis y la simbolizaciòn es:

~(p): No ocurre que estè lloviendo

~(p): No es cierto que estè lloviendo

Nota:

El alumno debe observar que la simbolizaciòn es la misma, y la ùnica diferencia es el indicador del signo de agrupaciòn.

Para màs claridad en la simbolizaciòn anterior, el "No" es reemplazado por el símbolo "~", las palabras "...ocurre que..." y "...es cierto que..." por el paréntesis, y por último "p" que significa la proposición en forma afirmativa "Está lloviendo", de ésta manera la proposición ha quedado perfectamente determinada.

De todas formas y aunque las proposiciones han quedado perfectamente determinadas, en lo que resta del texto, optaremos por la notación utilizada en el ejemplo 2, para las proposiciones de los ejemplos 3 y 4, ésto es:

- No está lloviendo
- No ocurre que esté lloviendo
- No es cierto que esté lloviendo

Serán simbolizadas indistintamente por "~p", ésto debido a que el conector negación se refiere a una proposición.

En el ejemplo 5:

" No ocurre que no es cierto que no esté lloviendo", la notación correcta es "~[~(~p)]", quedando así perfectamente determinada la proposición. Una ventaja de ésta notación, es la indicación del dominio de cada conector "Negación" para efectos de tabulación de sus valores de verdad; debe ser claro, y según la notación anterior "~[~(~p)]", el conector de menor dominio es el que afecta a "p"; el que le sigue en dominio, es el conector que afecta a "(~p)", y por último el de mayor dominio es el que afecta a "[~(~p)]".

De todas formas y de acuerdo a las aclaraciones dadas con anterioridad, la notación que utilizaremos en lo que resta del texto es "~~~p".

2.8. INDICADORES DE ENLACES DOMINANTES EN UNA PROPOSICION SIMPLE

En una expresión escrita en español, existen palabras que nos indican el "Dominio Explícito" de un determinado conector, en lógica éste dominio es indicado mediante el uso de los signos de agrupación, como veremos a continuación:

2.8.1. La negación como Enlace Domianante

La negación es una proposición compuesta, indica su mayor dominio, mediante la utilización de las palabras "No ocurre que..."., "No es cierto que...", etc.

Ejemplo 1.

No es cierto que Pedro cante y baile.

p: Pedro canta

q: Pedro baila

~(p /\ q).

Nota:

El signo de agrupación nos indica, que el enlace de mayor dominio es la "Negación", luego para efectos de tabulación, desarrollamos primero la conjunción "p /\ q" por tener menor dominio; y ésta le aplicamos el conector negación, siendo ésta la respuesta del ejemplo.

Observación.

Preguntamos : Que es lo que no hace Pedro ?

"Pedro o no canta o no baila", y ésta expresión puede ser simbolizada por "~p \/ ~q", o "p /X q", por lo tanto:

~(p /\ q) = ~p \/ ~q ≡ p /X q

Ejemplo 2.

No es cierto que María sepa francés o ingés.

p: María sabe francés

q: María sabe inglés

$\sim(p \vee q)$

Observación.

Preguntamos. Què es lo que no sabe Maria?

"Maria no sabe inglès y no sabe francès", o lo que es lo mismo "Ni sabe francès, ni sabe inglès", que pueden ser simbolizados respectivamente por: "$\sim p \wedge \sim q$" o "$p \mathbin{X/} q$" por lo tanto:

$\sim(p \vee q) \equiv \sim q \wedge \sim p \equiv p \mathbin{X/} q$

Nota:

El hecho de que "$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ " y "$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$", recibe el nombre de "Leyes de De Morgan".

Ejemplo 3.

No ocurre que Pedro estè muerto o estè vivo

p: Pedro està muerto

q: Pedro està vivo

$\sim(p \mathbin{\underline{\vee}} q)$

Observe que:

$\sim(p \underline{\vee} q) \equiv p \longleftrightarrow q$

Ejemplo 4.

No es cierto que si Pedro trabaja, entonces, le pagan.

p: Pedro trabaja

q: Pedro le pagan

$\sim(p \longrightarrow q)$

Observe que:

$\sim(p \longrightarrow q) \equiv p \not\longrightarrow q \equiv p \wedge \sim p$

Ejemplo 5.

No ocurre que Pedro sea ciego, sólamente si no ve

p: Pedro es ciego

q: Pedro no ve

$\sim(p \longleftrightarrow q)$

Observe que:

$\sim(p \longleftrightarrow q) \equiv p \underline{\vee} q$

2.8.2. La Conjunción como Enlace Dominante.

En español podemos detectar que "...Y..." es el enlace que domina, cuando al comienzo de la proposición encontramos las palabras "A la vez...".

Ejemplos:

Simbolizar las siguientes expresiones:

1. A la vez Pedro juega y hace un gol o no clasificamos
2. A la vez Pedro juega y si hace un gol, clasificamos
3. A la vez Pedro juega, hace un gol y clasificamos
4. A la vez Pedro juega, y Marta estará feliz sólamente si clasificamos.

p: Pedro juega

q: Pedro hace gol

r: Clasificamos

s: Marta estará feliz

Ejemplo 1. p /\ (q \/ r)

Ejemplo 2. p /\ (q ---> r)

Ejemplo 3. p /\ (s <--> r)

Ejemplo 4. p /\ (q /\ r)

Observe que:

p /\ (q /\ r) ≡ (p /\ q) /\ r

2.6.3. La Disjunción como Enlace Dominante

En español podemos detectar que "...O...", es el enlace que domina, cuando al comienzo de la proposición encontramos la letra "O".

Ejemplos:

Simbolizar las siguientes expresiones:

1. O llevamos a María y vamos a cine, o llevamos a Carlos.
2. O vamos a cine si María viene, o vamos al teatro.
3. O vamos a cine, solamente si llevamos a María o no vamos.
4. O llevamos a María, a Carlos o a Héctor.

p: Llevamos a María.

q: Vamos a cine.

r: Llevamos a Carlos.

s: María viene.

t: Vamos a teatro.

u: Llevamos a Héctor.

Ejemplo 1. $(p \wedge q) \vee r$

Ejemplo 2. $(q \longleftarrow s) \underline{\vee} t$

Ejemplo 3. $(q \longleftrightarrow p) \underline{\vee} \sim q$

Ejemplo 4. $(p \vee r) \vee u$

Observar que:

$(p \vee r) \vee u \equiv p \vee (r \vee u)$

$(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r \equiv p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$

2.8.4 La implicación como enlace Dominante.

En Español podemos detectyar que el "si...entonces..." es el enlace que domina, cuando al comienzo de la proposición encontramos la palabra "Si".

Ejemplos.

Simbolizar las siguientes expresiones:

1. Si hoy es lunes, entonces, hay clase, es decir, vamos al colegio.
2. Si hoy el lunes, entonces, hay clase; si hay clase, entonces, vamos al colegio.

p: Hoy es lunes.

q: Hay clase.

r: Vamos al colegio.

Ejemplo 1.

$p \longrightarrow (q \longleftrightarrow r)$

Ejemplo 2.

$p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$

Observe que :

$p \longrightarrow (q \longrightarrow r) \equiv (p \longrightarrow q) \longrightarrow r$

2.8.5 La doble implicación como enlace Dominante.

Por lo visto en "2.3.", el conector de mayor dominio es la Doble Implicación, por lo cual, es el ûnico que no requiere de los signos de agrupación para indicar su dominio sobre los demâs enlaces; tan solo requiere de ellos, cuando quiere indicar su dominio sobre sí mismo, es decir, cuando el dominio implícito es igual al explícito, esto es:

Ejemplo:
Pedro es ciego, solamente si no ve, es decir, los ciegos no ven.

p: Pedro es ciego.

q: Pedro no ve.

r: Los ciegos no ven.

$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r$

Observe que :

$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r \equiv p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r)$

Nota:

Las tabulaciones de los valores de verdad de proposiciones del tipo de "2.8.2., Hasta 2.8.5." serán tratadas en el capítulo III.

2.9. TAUTOLOGIAS Y ANTILOGIAS.

Una proposición es una "Tautología", cuando su valor de verdad es siempre "Verdadero"; y es "Antilogía", cuando su valor de verdad es siempre "Falso".

Veamos los siguientes ejemplos de proposiciones simples:

- La Tierra gira alrededor del Sol (Tautología).
- La Capital de Colombia es Quito (Antilogía).

Una proposición compuesta es una tautología, cuando para cualquier valor de verdad de sus componentes, se obtiene un valor de verdad siempre "Verdadero", es decir, cuando su columna de respuestas es toda "Verdadera"; y es antilogía, cuando su columna de respuestas es toda "Falsa".

Ejemplo 1.

Demostrar que la proposición "p ---> p", es una tautología y que su negación "~(p ---> p)", es una antilogía.

1. Escribamos "p ---> p" en el último renglón de la pizarra.

2. Coloquemos los valores posibles de "p", así:

p ---> p

v v

f f

3. Apliquemos el conector.

p ---> p

v v v

f v f

Como la columna de respuestas, es toda verdadera, concluímos que "p ---> p" es una "Tautología".

Ahora debemos mostrar que "~(p ---> p)" es una antilogía.

1. Escribimos la proposición ~(p ---> p), en el último renglón de la pizarra.

2. Sabemos que "p ---> p" es una tautología, ésto es:

~(p ---> p)

v v v

f v f

3. Negamos la columna de respuesta de "p ---> p", como lo indica el ejercicio y obtenemos una "Antilogía", así:

~(p ---> p)

f v v v

f f v f

Ejemplo 2.

Demostrar que la siguiente proposición "~p /\ p" es una contradicción o antilogía.

1. Escribimos la proposición; los valores posibles de "p", y aplicamos el conector de menor dominio, así:

~p /\ p

fv v

vf f

2. Aplicamos el conector de mayor dominio, y su columna debe ser toda falsa.

~p /\ p

fvf v

vff f

El alumno debe probar que su negación ~(~p /\ p), es una tautología.

Ejemplo 3.

Demostrar que la proposición "~~p <--> p", es una tautología.

1. Escribimos la proposición en el último renglón de la pizarra y los valores posibles de "p", así:

   ~~p <--> p
   v v
   f f

2. Aplicamos el conector de menor dominio, que es el que afecta a "p" y el que le sigue en valor es la negación que afecta a "~p", ésto es:

   ~~p <--> p
   vfv v
   fvf f

3. Ahora aplicamos "<-->", por ser el de mayor dominio, así:

   ~~p <--> p
   vfv v v
   fvf v f

El alumno debe probar que la negación de este ejemplo es una contradicción.

Observación:

La negación de toda "Tautología" es una "Antilogía" y veceversa.

Nota:

El construir tautologías, es un trabajo sencillo, basta con cambiar el signo a las proposiciones "Equivalentes", por el conector "<-->".

2.10. RESUMEN

Este capítulo ha sido dividido en tres partes. En la primera se estudia la negación de los conectores vistos en el primer capítulo y su simbología, donde:

- El "o no..., o no...", es la negación de la conjunción y se simboliza "p /X q".
- El "ni..., ni...", es la negación de la O-Incluyente y se simboliza "p X/ q".
- El "Si..., pero no..." y el "No..., pero si...", son la negación de la implicación y se simbolizan respectivamente así: "p -/-> q" y "p <-/- q".

También se ha dicho, que la O-Excluyente, es la nagación de la Doble-Implicación y viceversa.

En la segunda parte introducimos el concepto de signo de agrupación, para diferenciar el "Dominio Implícito" del "Dominio Explícito", dentro de una proposición. Es importante que el lector observe que en este punto también se negaron los conectores del capítulo I, así:

- La negación de "$p \wedge q$", se simboliza

  $\sim(p \wedge q) \equiv p \not\wedge q \equiv \sim p \vee \sim q$
- La negación de "$p \vee q$", se simboliza

  $\sim(p \vee q) \equiv p \not\vee q \equiv \sim p \wedge \sim q$
- La negación de "$p \underline{\vee} q$", se simboliza

  $\sim(p \underline{\vee} q) \equiv p \longleftrightarrow q$
- La negación de "$p \longrightarrow q$", se simboliza

  $\sim(p \longrightarrow q) \equiv p \not\longrightarrow q \equiv p \wedge \sim q$
- La negación de "$p \longleftarrow q$", se simboliza

  $\sim(p \longleftarrow q) \equiv p \not\longleftarrow q \equiv \sim p \wedge q$
- La negación de "$p \longleftrightarrow q$", se simboliza

  $\sim(p \longleftrightarrow q) \equiv p \underline{\vee} q$

Por último, hemos dicho que una tautología, es toda proposición cuyo valor de verdad es siempre "Verdadero" y que una antilogía, es toda proposición cuyo valor de verdad siempre "Falso"; donde la negación de toda tautología es una antilogía y viceversa.

Por otra parte, observemos que el conector negación se refiere a una proposición o a una expresión encerradas dentro de un paréntesis a que sea inmediatamente antepuesto, caso en que su acción afecta toda la expresión encerrada en tal paréntesis.

Los conectores diferentes de la negación, se situan entre dos letras, o entre una letra y una expresión entre paréntesis, o entre dos paréntesis, o entre dos expresiones encerradas entre paréntesis, extendiendo su radio de acción, a las expresiones comprendidas por los pares de paréntesis correspondientes e inmediatamente contiguos a la derecha y a la izquierda respecto a dichos conectores.

En concreto, podemos decir que el conector de la negación sólo puede ser seguido de una letra o de un paréntesis y que los otros conectores sólo pueden tener a su derecha una letra o un paréntesis. Esto basta para hacernos comprender que la simbolización de la lógica que ahora estamos estableciendo podrá dar lugar a expresiones del tipo siguiente:

$\sim p$

$\sim (p \wedge q)$

$p \vee q$

$p \longleftarrow \sim q$

$p \longrightarrow q \longrightarrow r$

$(q \longleftrightarrow p) \; \underline{\vee} \; (p \longrightarrow q)$

(q ---> r) /\ ~(q \/ ~s)

y otras semejantes.

Por el contrario no se darán nunca expresiones de este tipo:

p~

(~ \/ p)

(p ---> q) ~s

r /\ q \/ <--> r

(r~ /\ q) ~(---> q)

y similares.

2.11. RESUMEN DE LAS TABULACIONES

p	q	/X	X/	-/->	<-/-	T	$\perp$
v	v	f	f	f	f	v	f
v	f	v	f	v	f	v	f
f	v	v	f	f	v	v	f
f	f	v	v	f	f	v	f

2.12. RESUMEN DE LAS TABULACIONES DEL CAPITULO I Y II

~p	p	~q	q	/\	\/	⊻	---->	<----	<-->	/X	X/	-/->	<-/-	T	⊥
f	v	f	v	v	v	f	v	v	v	f	f	f	f	v	f
f	v	v	f	f	v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f
v	f	f	v	f	v	v	v	f	f	v	f	f	v	v	f
v	f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	v	f	f	v	f

EJERCICIOS

A. Diga el valor de verdad que corresponde a cada una de las siguientes combinaciones de los valores de verdad de "p" y "q".

p * q

1. v /X v
2. f -/->v
3. f <-/-v
4. v -/->f
5. v /X f
6. f -/->f
7. v -/->f
8. v -/->v
9. f /X v
10. v <-/-v
11. f X/ f
12. f /X f
13. f X/ v
14. v <-/-f
15. v /X v

16. v X/ f

17. f <-/-f

18. v X/ v

19. f <-/-v

20. f X/ v

B. Simbolice las siguientes expresiones

1. No es verdad que no estoy estudiando

2. No ocurre que si dos es menor que tres y tres es menor que cuatro, entonces, cuatro es menor que dos.

3. A la vez los seres perfectos pueden vivir son leyes y los hombres no son perfectos, entonces, los hombre no pueden vivir sin leyes.

4. O el libro fué robado o yo lo extravié y lo necesito esta noche.

5. Està cansado o no

6. Si hay escasez, entonces los precios suben, si suben, entonces hay inflación.

7. Si Carlos no corre, entonces José es primero, sólamente si no està lesionado.

8. El pueblo vota por mi si y sólo si propongo buenas soluciones, entonces debo buscarlas.

9. Da lo mismo decir, Pedro es labrador y Carlos carpintero que, Carlos es carpintero y José labrador.

11. El gato, el perro, la vaca y la ballena son animales

mamiferos.

12. No es cierto; no voy al paseo y no voy a la fiesta.

13. No es verdad que una proposición sea falsa sólamente si es verdadera.

14. A la vez lloverá hoy, sólamente si, el viento arrastra las nubes y debemos llevar paraguas.

15. A la caja es muy pesada o a Luis se le olvidó o no la trajo por perezoso.

16. O Pedro es pobre y no tiene dinero o es rico.

17. Si es cierto que María y Carlos no fueron al colegio, debo llamarles la atención.

18. No es lo mismo decir, Juan sacó su permiso y condujo diez años, que decir, condujo diez años y sacó su permiso.

19. La gente vote por mi sólamente si propongo soluciones, es decir, debo buscar buenas soluciones.

20. A está a la derecha de B, sólamente si B está a la izquierda de A y viceversa.

21. Si, Pedro me invitó pero no puedo ir.

22. Si Pedro no llega hoy, es porque o no pudo tomar el avión o no va a venir.

23. No es cierto que una persona esté feliz o triste únicamente.

24. No es cierto que Pedro trabaje y estudie

25. Carlos, María y Roberto, fueron primero, segundo y

tercero respectivamente.

26. O usted se dá prisa y entonces llega a tiempo a la reunión o lo deja el autobus.

27. O esta es el aula cuatro o Carlos se equivocó, o es el aula de Física.

28. La luna gira alrededor de la tierra, y la tierra gira alrededor del sol, entonces la luna gira alrededor del sol.

29. Si no estamos allí a tiempo, entonces perderemos el voto o debemos hacer fila.

30. Esta chica es mi hermana y yo soy su hermano, mejor dicho, somos hermanos.

31. Juan y Maria deben ganar sus encuentros, si se preparan a conciencia

32. Vamos al paseo si te portas bien, si tengo tiempo o si tengo dinero.

33. No voy, ni a la fiesta ni al paseo.

34. A la vez hoy es sábado o domingo y no hay clase

35. No podemos decir si es culpable o inocente

36. No voy a estudiar, o no voy a trabajar o voy donde Maria.

37. O Luis es buen jugador, solamente si, gana este partida o es muy afortunado

38. O es soltero o es casado, si es casado, entonces debe trabajar.

39. Si pierdo el autobus, debo caminar o tomar un taxi.

40. Está vivo si sólamente tiene pulso o respira

41. Vamos a jugar, o sino vamos a jugar, estudiemos

42. Si José quiere construí su casa entonces debe comprar ladrillo, arena y cemento

43. No tengo hambre, pero si le recibo un tinto

44. A la vez Carlos corre y hace ejercicio o está sentado

45. No se pudo terminar el reportaje hoy y lo necesito para mañana.

46. Esta expresión, es una proposición simple o compuesta, o no es proposición.

47. Voy al estadio sólamente si el equipo obtiene buenos resultados

48. Bueno; o nos vamos por el norte o nos vamos por el sur, si nos vamos por el norte, tardamos 2 horas, si nos vamos por el sur tardamos el doble.

49. Si todas las personas son hombres o mujeres entonces yo soy hombre o mujer.

50. Este libro es de inglés o de francés, sólamente si, lo trajo Carlos

C. Sea p: Mi frente está caliente

q: Debo ir al médico

r: Estoy enfermo

Escriba el significado de las siguientes expresiones.

1. $(r \wedge q) \wedge (q \rightarrow r)$
2. $p \wedge (q \wedge r)$
3. $p \wedge q \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
4. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \underline{\vee} \sim p)$
5. $\sim p \vee (p \rightarrow \sim r)$
6. $\sim(q \leftarrow r)$
7. $p \leftarrow (q \leftrightarrow r)$
8. $(p \rightarrow r) \rightarrow q$
9. $(\sim r \underline{\vee} r) \wedge q$
10. $(r \rightarrow q) \underline{\vee} \sim(r \rightarrow q)$

D. Si "p" es falso, "q" es verdadero y "r" es verdadero, diga el valor de verdad de las expresiones del ejercicio anterior.

E. Cuàles de las siguientes proposiciones son tautologias, cuàles antilogias, diga porque y construya sus tabulaciones.

1. $p \underline{\vee} q \leftrightarrow q \underline{\vee} p$
2. $p \underline{\vee} q \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
3. $p\ X/\ q \leftrightarrow \sim(p \wedge q)$
4. $(p \leftarrow q) \wedge \sim(p \leftarrow q)$
5. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \underline{\vee} q)$

```
6.  p \/ q <--> q \/ p

7.  p ---> q <--> q ---> p

8.  p -/-> q <--> p /\ ~q

9.  (p \/ q) \/ (p \/ q)

10. p /X q <--> ~p \/ ~q
```

III. VALOR DE VERDAD DE UNA PROPOSICION COMPUESTA

Objetivos.

Al finalizar esta unidad el alumno debe mostrar que está en capacidad de:

- Representar los valores de verdad asignables a una proposición.
- Señalar y apuntar las posibles combinaciones de los valores de verdad de dos o más proposiciones conectadas entre sí.
- Escribir las tabulaciones de los diferentes conectores, comenzando por los de menor dominio, para terminar con los de mayor dominio que definen el total de una expresión.

3. VALORES DE VERDAD DE UNA PROPOSICION COMPUESTA

(de tres o màs proposiciones simples)

Empecemos por rsumir lo visto en los capitulos anteriores, sobre proposiciones compuestas, en cuanto a la tabulación de los valores de verdad se refiere, con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.

Tabular la proposición "p <--> q)

1. Colocamos "p <--> q" en el último renglón de la pizarra y la bajamos al siguiente espacio.
2. Colocamos los posibles valores de "p" y "q" asì:

p	<-->	q
v		v
v		f
f		v
f		f

3. Conectamos estos valores mediante el enlace y éste resultado lo colocamos debajo y en columna del conector "<-->", y éste es el resultado.

p <--> q

v v v

v f f

f f v

f v f

Ejemplo 2.

Tabular la proposición "p \/ ~q"

1. Colocamos la proposición en el último renglón de la pizarra y la bajamos.

2. Colocamos los posibles valores de verdad de "p" y "q".

p \/ ~q

v v

v f

f v

f f

3. Observamos cual es el conector de menor dominio; en nuestro caso es la negación.

p \/ ~q

v fv

v vf

f fv

f vf

4. Aplicamos el conector que le sigue en dominio a la negación, este es "\/", que por no haber más conectores es el de mayor dominio en la proposición, por lo tanto su columna es la respuesta.

p	\/	~q
v	v	fv
v	f	vf
f	f	fv
f	v	vf

Ejemplo 3.

Tabular la proposición "~(p/\q) <--> ~p \/ ~q", y observar que es una tautología.

1. Colocamos la proposición en el último renglón de la pizarra y la bajamos.

2. Colocamos los posibles valores de verdad de "p" y "q"

~(p	/\	q)	<-->	~p	\/	~q
v		v		v		v
v		f		v		f
f		v		f		v
f		f		f		f

3. Desarrollamos el conector de menor dominio

Observación:

El enlace de mayor dominio es el "<-->" que nos divide la proposición en dos partes; la expresión que está antes del conector "<-->" o "Miembro de la izquierda", y la expresión que se encuentra después de "<-->" o "Miembro de la derecha".

Observemos que el miembro de la izquierda, el enlace de menor dominio es "/\" y en el miembro de la derecha el enlace de menor dominio son las negaciones de "p" y "q". Luego, estos tres enlaces se constituyen como los conectores de menor dominio en la proposición y pueden aplicarse simultáneamente ya que el resultado de ellos no se afectan entre sí, veamos:

~(p/\q)	<-->	~p	\/	~q
v v v		fv		fv
v f f		fv		vf
f f v		vf		fv
f f f		vf		vf

4. Aplicamos el conector o conectores que siguen en dominio, éstos para el miembro de la izquierda la negación, y para el miembro de la derecha la disjunción, y pueden desarrollarse simultáneamente, así:

~(p/\q)	<-->	~p	\/	~q
f v v v		fv	f	fv
v v f f		fv	v	vf
v f f v		vf	v	fv
v f f f		vf	v	vf

5. Aplicamos el conector de mayor dominio, para el ejemplo es "<-->" y se aplica a las dos columnas halladas en el paso anterior, siendo la respuesta una tautologia.

~(p/\q)	<-->	~p	\/	~q
f v v v	v	fv	f	fv
v v f f	v	fv	v	vf
v f f v	v	vf	v	fv
v f f f	v	vf	v	vf

Ahora, veamos que sucede con las proposiciones compuestas de tres o màs proposiciones simples diferentes.

Ejemplo 4.

Tabular la proposición "p /\ q ---> r".

El proceso es idèntico al tratado hasta ahora, solamente se diferencia en el nùmero de combinaciones de los valores de verdad, veamos.

Como son tres proposiciones simples diferentes, entonces pueden suceder únicamente las siguientes ocho combinaciones de sus valores de verdad.

1. "p" sea verdadera, "q" sea verdadera, "r" sea verdadera
2. "p" sea verdadera, "q" sea verdadera, "r" sea falsa
3. "p" sea verdadera, "q" sea falsa, "r" sea verdadera
4. "p" sea verdadera, "q" sea falsa "r" sea falsa
5. "p" sea falsa,"q" sea verdadera, "r" sea verdadera
6. "p" sea falsa, "q" sea verdadera, "r" sea falsa
7. "p" sea falsa, "q" sea falsa, "r" sea verdadera
8. "p" sea falsa, "q" sea falsa, "r" sea falsa

Y para su tabulación procedemos así:

1. Escribimos la proposición "p /\ q" ---> r", en el último renglón de la pizarra y la bajamos.

2. Colocamos las posibilidades debajo de cada proposición simple así:

p /\	q<—>r	
v	v	v
v	v	f
v	f	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f
f	f	v
f	f	f

3. Aplicamos el conector de menor dominio.

p	/\	q	---> r
v	v	v	v
v	v	v	f
v	f	f	v
v	f	f	f
f	f	v	v
f	f	v	f
f	f	f	v
f	f	f	f

4. Aplicamos al resultado del conector "/\", con la proposición "r", mediante el conector "--->", siendo esta columna la respuesta del ejercicio.

p	/\	q	--->	r
v	v	v	v	v
v	v	v	f	f
v	f	f	v	v
v	f	f	v	f
f	f	v	v	v
f	f	v	v	f
f	f	f	v	v
f	f	f	v	f

En resumen; para una proposición simple, tenemos dos posibilidades de combinación; para dos proposiciones simples, diferentes tenemos cuatro posibilidades, (el doble del anterior); para tres proposiciones simples, ocho posibilidades, (el doble del anterior); haciendo un análisis similar, encontramos que para cuatro posibilidades de combinación, (el doble del anterior), para cinco proposiciones diferentes habrá teinta y dos, etc.

Este proceso lo podemos resumir así:

- Para 1, proposición $2^1 = 2$ combinaciones
- Para 2, proposiciones diferentes $2^2 = 4$ combinaciones
- Para 3, proposiciones diferentes $2^3 = 8$ combinaciones
- Para 4, proposiciones diferentes $2^4 = 16$ combinaciones

.   .

.   .

.   .

.   .

-Para k, proposiciones diferentes 2^k combinaciones.

Donde "k", puede tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5,...,k, respectiamente.

Esta es una forma práctica y sencilla de saber cuantos posibles valores de verdad encontramos para cualquier número de proposiciones dadas. Sin embargo, no basta solo con saber cuantas son las combinaciones posibles de los valores de verdad de las proposiciones simples, si no que también importa anotarlas efectivamente todas, y para ello es aconsejable el siguiente procedimiento:

- Para una proposición: sabemos que tiene únicamente dos combinaciones de sus valores de verdad, entonces procedemos, llenando la primera mitad de la columna con valores de verdad "verdaderos", y la segunda mitad, con valores de verdad "Falsos", ésto es: un "v", un "f", así:

p
v
f

- Para dos proposiciones diferentes: sabemos que tiene el doble de posibilidades que para una proposición, esto es, cuatro posibles combinaciones de sus valores de verdad, entonces procedemos, llenando la columna de la primera proposición encontrada en el ejercicio con valores de verdad "Verdaderos", la primera mitad, y con valores de verdad "Falsos", la segunda mitad, esto es, dos "v", dos "f"; ahora continuamos con la siguiente proposición diferente del ejercicio, llenando su columna, con la mitad de sus valores de verdad de la primera proposición, esto es un "v", y un "f", hasta agotar todas las cuatro posibilidades así:

p	*	q
v		v
v		f
f		v
f		f

- Para tres proposiciones diferentes: sabemos que tienen el doble de posibilidades que para dos proposiciones, esto es, ocho posibles combinaciones de sus valores de verdad, entonces procedemos:

A la primera proposición le corresponde la primera mitad de su columna en valores de verdad "Verdadero", y a la segunda mitad en valores de verdad "Falsos", es decir, cuatro "v", y cuatro "f".

A la segunda proposición diferente, le corresponde, la mitad de los valores de verdad "Verdaderos" y a la mitad de los valores de verdad "Falsos" de la primera proposición, es decir, dos "v" seguidos de dos "f", hasta agotar todas las posibilidades de su columna.

A la tercera proposición diferente, le corresponde, la mitad de los valores de verdad "Verdaderos", y la mitad de los valores de verdad "Falsos" de la segunda proposición, es decir, un "v", seguido de un "f", hasta agotar todas las posibilidades de su columna. Veamos todo lo anterior en la siguiente tabla:

p	*	q	*	r
v		v		v
v		v		f
v		f		v
v		f		f
f		v		v
f		v		f
f		f		v
f		f		f

Esta regla puede parecer un poco extenuante, pero siendo más bien raro en la práctica, el caso de encontrarse con más de tres proposiciones simples diferentes, el lector puede limitarse a tener presente los casos de una, dos y tres proposiciones que hemos ofrecido aquí.

Ahora bien, si por casualidad hubiera de manejarse una expresión dotada de una cuarta proposición diferente, según la regla antes mencionada, su primera columna constaría de ocho valores de verdad "Verdaderos" seguidos de ocho valores de verdad "Falsos"; si todavía hubiese otra proposición diferente, su primera columna constaría de dieciseis valores de verdad "Verdaderos" y otro número igual de valores de verdad "Falsos" y así sucesivamente, de manera que siempre la primera mitad de los valores de verdad de la primera proposición son "Verdaderos" y la segunda mitad "Falsos"; para la segunda proposición diferente le corresponde la mitad de los valores de verdad de la primera proposición, hasta agotar todas las posibilidades; la tercera proposición diferente le corresponderá la mitad de los valores de verdad de la segunda proposición hasta agotar sus posibilidades y así sucesivamente, hasta agotar todas las columnas de las proposiciones diferentes del ejercicio.

Por otra parte, es importante observar que si en un determinado ejercicio encontramos repetidas dos o más proposiciones, estas deben tener todas igual valor de verdad.

Ejemplo 5.

Tabular la proposición "p /\ ~p <--> q ---> r"

1. Escribamos la proposición en el último renglón de la pizarra y la bajamos.

2. Analizamos el número de proposiciones, existen tres proposiciones diferentes y una repetida.

3. Colocamos los posibles valores de "p", "q", y "r", así:

p /\ ~p <--> q ---> r

v	v	v	v
v	v	v	f
v	v	f	v
v	v	f	f
f	f	v	v
f	f	v	f
f	f	f	v
f	f	f	f

4. Aplicamos el conector o conectores de menor dominio:

en nuestro caso, encontramos en el miembro de la izquierda la negación y en el miembro de la derecha la implicación, y los podemos desarrollar simultáneamente, así:

p	/\ ~p	<-->	q --->	r
v	fv	v	v	v
v	fv	v	f	f
v	fv	f	v	v
v	fv	f	v	f
f	vf	v	v	v
f	vf	v	f	f
f	vf	f	v	v
f	vf	f	v	f

5. Aplicamos el conector o conectores que siguen en dominio: en nuestro caso encontramos el conector conjunción del miembro de la izquierda.

p	/\	~p	<-->	q	--->	r
v	f	fv		v	v	v
v	f	fv		v	f	f
v	f	fv		f	v	v
v	f	fv		f	v	f
f	f	vf		v	v	v
f	f	vf		v	f	f
f	f	vf		f	v	v
f	f	vf		f	v	f

6. Aplicamos el conector o conectores que siguen en dominio; en nuestro caso resta aplicar el de menor dominio que es la "Doble Implicación" a las columnas de la conjunción y la implicación, así:

p	/\	~p	<-->	q	--->	r
v	f	fv	f	v	v	v
v	f	fv	f	v	f	f
v	f	fv	f	f	v	v
v	f	fv	f	f	v	f
f	f	vf	f	v	v	v
f	f	vf	f	v	f	f
f	f	vf	f	f	v	v
f	f	vf	f	f	v	f

Obsevemos que es una contradicción.

Ejemplo 6.

Tabular la siguiente proposición "~[~p⊻(~q--->p)]".

1. Escribimos la proposición en el último renglón de la pizarra y la bajamos.

2. Analizamos el número de proposiciones existentes; existen dos proposiciones diferentes.

3. Colocamos los posibles valores

~[~p⊻(~q--->p)]

v	v	v
v	f	v
f	v	f
f	f	f

4. Aplicamos el conector conectores de menor dominio; podemos desarrollar simultáneamente las negaciones de "p" y "q".

~[~p⊻(~q--->p

fv	fv	v
fv	vf	v
vf	fv	f
vf	vf	f

5. Aplicamos el conector o conectores que sigue en dominio; la implicación.

~[~p$\underline{\vee}$(~q--->p

fv	fv	v	v
fv	vf	v	v
vf	fv	v	f
vf	vf	f	f

6. Aplicamos el conector o conectores que siguen en dominio; la o-excluyente.

~[~p$\underline{\vee}$(~q--->p

fv	v	fv	v	v
fv	v	vf	v	v
vf	f	fv	v	f
vf	v	vf	f	f

7. Aplicamos el conector o conectores que siguen en dominio: la negación que afecta toda la expresión.

~[~p$\underline{\vee}$(~q--->p

f	fv	v	fv	v	v
f	fv	v	vf	v	v
v	vf	f	fv	v	f
f	vf	v	vf	f	f

Esta última columna es la respuesta al ejercicio, por ser este el enlace de mayor dominio.

EJERCICIOS

Construya las siguientes tabulaciones.

1. p--->p \/ q

2. (p /\ p) /\ p

3. p --->(q -/-> q)

4. (p /X q) \/ (p <-/-q)

5. (p <-/- ~q) -/-> q

6. (~p /X q) X/ p

7. ~(~p ---> ~p \/ q)

8. p /\ ~q <--> ~q /\ p

9. ~p /\ q <--> p X/ q

10. ~{[(p \/ ~q) /\ q] ---> p}

11. [(p <--> q) <--> r] <--> [p <-->(q <--> r)]

12. (p <--> q) <--> [(p ---> q) /\ (p<----q)]

13. p ---> (q ---> r) <--> (p---> q) ---> r

14. p \/ (q \/ r) <--> (p \/ q) \/ r

15. ~p \/ ~[~(p \/ r) /\ (~r ---> p)]

IV. LEYES DE INFERENCIA

Objetivos :

Al finalizar esta unidad el alumno debe mostrar que está en capacidad de:

- Definir y explicar que es una inferencia.
- Describir, ejemplificar y simbolizar los esquemas de las siguientes inferencias.

Modus Ponenendo Ponens.
Modus Tollendo Ponenens.
Modus Ponendo Tollens.
Ley de Adjunción.
Ley de Simplificación.
Ley de Adición.
Silogismo Hipotético.
Silogismo Disjuntivo.
Teorema de deducción.

- Resolver, aplicando las reglas de las inferencias, problemas lògicos sacando conclusiones a partir de premisas dadas.

- Resolver, apicando los mètodos de demostraciòn, problemas lògicos sacando conclusiones a partir de premisas dadas.

4. LEYES DE INFERENCIA

En los capitulos anteriores, hemos estudiado el concepto de proposición, su simbolización y hemos hallado su valor de verdad. Ahora bien, conociendo el significado de "p ---> q" podemos pasar hacia la parte de la lògica formal "Inferencia y Deducciòn", paralelo trataremos las "Reglas o leyes de inferencia" que rigen el uso de los tèrminos de enlace y que son muy simples.

Para entender un poco màs sobre las palabras "Inferencia y Deducciòn" tomaremos el siguiente ejemplo.

En un colegio regular, un grupo de alumnos està presentando un exàmen, un alumno cualquiera recibe su exàmen y contesta todas las preguntas corrctamente y por lo tanto obtiene la mayor calificación. Pensemos ahora que antes de que se termine el exàmen, otro alumno tambièn ha desarrollado el exàmen, pero ha copiado a su compañero. Por supuesto, el profesor tuvo que invalidar ese exàmen o bajar la calificaciòn ya que el proceso utilizado por èste no fuè el correcto, aunque hubiera obtenido un valor en el exàmen igual al compañero que lo presentò siguiendo todas las reglas o leyes que se requieren para un exàmen.

En nuestro estudio de lògica nos veremos en situaciones muy similares; al igual que en el exàmen hay muchas formas para obtener la mejor calificaciòn del curso, en lògica hay tambièn mùltiples formas de verificar un argumento, solo que como hay medios vàlidos, tambièn hay no vàlidos, en nuestro texto nos dedicaremos a mostrar el conjunto de procedimientos vàlidos; para ello introduciremos los siguientes conceptos.

PREMISAS:

Es un conjunto de proposiciones de valor de verdad verdaderos, de donde partiremos para obtener otra proposiciòn de valor de verdad verdadera, que llamaremos "conclusiòn".

CONCLUSION:

Es la consecuencia lògica de las premisas, es vàlida, si cada paso que se da para llegar a ella està permitido por una "Ley de Inferencia", por una definiciòn o un teorema anteriormente demostrado.

LEY DE INFERENCIA:

Las leyes de inferencia junto con los teoremas y definiciones son las reglas que nos permiten pasar de premisas de valor de verdad verdadero, a conclusiones de valor de verdad verdadero. Estas reglas representan las leyes naturales por las cuales se rige nuestro pensamiento.

Veamos ahora las reglas que nos permiten la aplicación de los conceptos antes expuestos.

4.1 MODUS PONENDO PONENS

Significa que en una implicación afirmando (ponendo) el antecedente deducimos la afirmación (ponens) del consecuente, que simboliza "pp".

Ejemplo.

Premisa 1. Si nazco en Bogotà, entonces, soy Colombiano.
Premisa 2. Nací en Bogotà.
Conclusión: Soy Colombiano.

Simbolización:

p: Nazco en Bogotá.

q: Soy Colombiano.

1. p ---> q

2. p

|--- q

La premisa 1, dice que "si nazco en Bogotá, entonces, soy Colombiano; y afirmo que: "Nací en Bogotá", entonces, es obvio que la conclusión es: "Soy Colombiano".

Tomemos otro ejemplo:

Premisa 1. Si Pedro no respira, entonces, está muerto.

Premisa 2. Pedro no respira.

Conclusión: Pedro está muerto.

Simbólicamente:

p: Pedro respira.

~p: Pedro no respira.

q: Pedro está muerto.

1. ~p ---> q

2. ~p

|--- q

En cada uno de los ejemplos, la regla permite pasar de dos premisas a la conclusión, y diremos que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas, es decir, que siempre que las premisas son ciertas la conclusión es también cierta.

En conclusión la regla de inferencia Modus Ponendo Ponens, permite demostrar "q" a partir de "p ---> q" y "p"; donde tanto los antecedentes como los consecuentes que se utilizan pueden ser proporciones simples o compuestas.

4.1.1 Demostración en dos pasos.

Algunas veces no se puede ir directamente de las premisas a la conclusión por un solo paso, pero esto no impide poder llegar a la conclusión. Para facilitar los ejercicios notaremos las premisas con la letra mayúscula "P", lo indica el Ejemplo siguiente:

Nos piden demostrar "r", partiendo de:

1. p ---> q   P
2. q ---> r   P
3. p   P

Los numerales 1, 2 y 3, nos indican la cantidad de premisas dadas: los números que colocamos a continuación y en columna, indican los pasos que hemos utilizado; debajo de las premisas colocaremos la conclusión; la "P" nos indica cuales de los numerales son premisas, debajo de ella y en la columna colocaremos el nombre de la regla que utilizamos en cada paso de la deducción esto se aclara desarrollando el ejemplo.

1.	p ---> q	P
2.	q ---> r	P
3.	p	P
4.	q	PP13
|---	r	PP24

Partiendo de las premisas hemos utilizado cinco pasos para hacer el ejercicio y el último se llama conclusión las letras "PP" que encontramos luego de cada conclusión nos indica que hemos utilizado la regla Modus Ponendo Ponens "PP", en los renglones 1, 3 y 2, 4.

Es decir, para el paso 4, aplicamos "PP" a los renglones 2, 4 y obtuvimos "r" como conclusión.

Recomendamos trabajar estos ejercicios en máquina, pero para aquellas personas que cuentan únicamente con pizarra daremos las siguientes indicaciones:

1. Colocamos la pizarra. Escribimos las premisas en la misma forma que las hemos escrito en el ejemplo anterior.

2. Desprendemos la pizarra, damos la vuelta a la hoja y la colocamos nuevamente de tal forma que las premisas puedan leerse por el revêz de la hoja.

3. Procedemos a desarrollar el ejercicio, esto es leyendo por el revêz los datos y escribiendo los resultados que vamos obteniendo, en el renglon correspondiente.

Como a veces encontramos ejercicios bastante extensos, debemos repetir este proceso hasta encontrar el resultado pedido, es importante tambiên de que algunos de nuestros resultados queden dentro de la pizarra; para ello debemos ir memorizando cada resultado, ya que seguramente este lo utilizaremos inmediatamente despuês de hallado.

Intentemos aplicar el proceso aquí desarrollado al siguiente ejemplo:

Demostrar ~t. A partir de las siguientes premisas :

1. p ---> s P.

2. s ---> r P.

3. r ---> ~t P.

4. q ---> p P.

5. q P.

1. Escribimos los datos.
2. Desprendemos la pizarra y damos vuelta a la hoja.
3. Colocamos nuevamente la pizarra de tal forma que pueda leerse por el respaldo de la hoja.
4. Resolvemos y vamos escribiendo el resultado hallado, asi:
5. p PP54
6. Memorizamos "p", ahora bien, "p" lo podemos aplizar al renglon 1, Obteniendo "s", asi:
7. s PP16
8. Memorizamos "s" y lo aplizamos al renglon 2 obteniendo "r".
9. r PP27
10. Memorizamos "r" y lo aplizamos al renglon 3 obteniendo el resultado pedido "~t", entonces concluimos, asi:

    |-- ~t PP38

Ahora escribimos el ejercicio en forma compacta:

Demostrar "~t"

1. p ---> s P

2. s ---> r P

3. r ---> ~t P

4. q ---> p P

5. q P

6. p PP45

7. s PP16

8. r PP27

|-- ~t PP38

4.1.2 Doble negación.

Este teorema nos permite pasar de una premisa única a la conclusión y notaremos "DN".

Ejemplo:

"No ocurre que Pedro no tiene màquina Braille".

Que podemos concluir de est premisa ?, evidentemente podemos concluir que:

"Pedro tiene màquina Braille", esto es:

Premisa 1. No ocurre que Pedro no tiene màquina Braille.

Conclusión : Pedro tiene máquina Braille.

Simbolizado :

1. ~~p P

|-- p DN1

También de una premisa "p" podemos concluir "~~p", así:

1. p P

|-- ~~p DN1

Veamos un ejemplo combinado de Modus Ponendo Ponens "PP" y doble-Negación "DN".

Demostrar "q".

1. p ---> ~~q P

2. p P

3. ~~p PP12

|-- q DN3

4.2. MODUS TOLLENDO TOLLENDS

Afirma que en una implicación negando (Tollendo) el consecuente, deducimos la negación (Tollendo) del antecedente y simbolizamos "TT".

Ejemplo.

Premisa 1. Si nazco en Bogotà, entonces, soy Colombiano.

Premisa 2. No soy Coombiano.

Conclusiòn: No nacì en Bogotà.

Simbolizado:

1. p ---> q   P

2. ~q   P

|-- ~p   TT12

Realicemos un ejemplo donde se componen los casos vistos hasta ahora, esto es, Modus Ponendo Ponens "PP", Modus Tollendo Tollends "TT", y el teorema de la Doble Negaciòn "DN".

Demostrar "~r"

1. p ---> ~~q   P

2. r ---> ~q   P

3. ~~p   P

4. p   DN3

5. ~~q   PP14

|-- ~r   TT25

4.3 MODUS TOLLENDO PONENS

Afirma que en una disjunción incluyente negando (Toliends) uno de los componentes, afirmamos (Ponens) la otra componente y simbolizamos "TP".

Ejemplo:

Premisa 1. Carlos es profesor o abogado.

Premisa 2. Carlos no es abogado.

Conclusión: Carlos es profesor.

Simbólicamente:

1. p \/ q P

2. ~p P

|-- q TP12

O también:

Premisa 1. Carlos es profesor o abogado.

Premisa 2. Carlos no es abogado.

Conclusión: Carlos es profesor.

Simbólicamente:

1. p \/ q P

2. ~q P

|-- p TP12

4.4. MODUS PONENDO TOLLENS

Afirma que en una disjunción excluyente, afirmando (Ponendo) una de las componentes, negamos (Tollens) la otra, se simboliza "PT".

Ejemplo.

Premisa 1. José es vidente o invidente.

Premisa 2. José es vidente

Conclusión: José no es vidente

Simbólico:

1. $p \veebar q$ P

2. p P

$\vdash \sim q$ PT12

4.5. LEY DE ADJUNCION

Afirma que dos proposiciones verdaderas se pueden conectar por medio del enlace "Y", obteniendo una nueva proposición con valor de verdad verdadero y se simboliza "A".

Ejemplo:

Premisa 1. Bogotá es la capital de Colombia

Premisa 2. Paris es la capital de Francia.

Coclusión: Bogotá es la capital de Colombia y Paris es la capital de Francia.

Simbolizado:

1.   p   P

2.   q   P

|-- p /\ q   A12

4.6. LEY DE SIMPLIFICACION

Afirma que la verdad de la conjunción se deduce la verdad de cualquiera de las proposiciones que la componen. Se simboliza por "S".

Ejemplo:

Premisa 1.   Cali y Medellín son ciudades Colombianas

Conclusión: Cali es una ciudad Colombiana.

O también:

Conclusión: Medellín es una ciudad Colombiana.

Simbólicamente:

1. p /\ q	P		1. p /\ q	P
|-- p	S1	ó	|-- q	S1

4.7. LEYES DE ADICION

Afirma que si una proposición es cierta, entonces la disjunción de aquella proposicón con otra cualquiera ha de ser también cierta, se simboliza por "LA".

Ejemplo:

Premisa 1. Bolivar nació en Caracas

Conclusión : Bolivar nació en Caracas o los elefantes tienen alas.

Simbolizado:

1.	p	P
2.	p \/ q	LA1

4.8. SILOGISMO HIPOTETICO.

Afirma que si una proposición implica otra proposición, y esta implica una tercera, podemos decir que la primera proposición la tercera y simbolizamos "SH".

Ejemplo:

Premisa 1. Si trabajo, entonces, me pagan.

Premisa 2. Si me pagan, entonces, cancelo mis deudas.

Conclusión: Si trabajo, entonces, cancelo mis deudas.

Simbólicamente.

1. p ---> q P

2. q ---> r P

|-- p ---> r SH12

Observación:

Para aplicar la regla del silogismo hipotético, debemos tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Se hace una inspección general para comprobar que se tienen dos implicaciones requeridas.
2. Se comprueba que el consecuente de una de las premisas sea el antecedente de la otra premisa.
3. Se concluye una implicación cuyo antecedente, es el antecedente de la primera premisa y cuyo consecuente es el consecuente de la segundo.

4.9. SILOGISMO DISJUNTIVO

Afirma que una disjunciòn da valor de verdad verdadero donde sus componentes son a la vez antecedentes, se deduce la disjunción de sus consecuentes.

Ejemplo:

Premisa 1. Hace frío o está lloviendo.

Premisa 2. Si hace frío, entonces, voy a correr.

Premisa 3. Si está lloviendo, entonces, voy a estudiar.

Conclusión: Voy a correr o voy a estudiar.

Simbólicamente:

1. p \/ q P
2. p ---> r P
3. q ---> s P

|-- r \/ s SD123

Observación:

Antes de aplicar la regla del silogismo disjuntivo debemos observar:

1. Que se tienen las dos condicionales y la disjunción requeridas.
2. Que los antecedentes de las dos implicaciones son precisamente los miembros de la disjunción.
3. Concluimos una disjunción cuyos miembros son precisamente los dos consecuentes de las implicaciones.

4.10. TEOREMA DE DEDUCCION

Si "q" se deduce de "p" y otras proposiciones, entonces, de las otras proposiciones se deduce "p ---> q".

Simbólicamente:

$p_1, p_2, p_3 \ldots p_n, p \vdash q$, entonces de
$p_1, p_2, p_3 \ldots p_n, \vdash p \rightarrow q$.

Ejemplos:

Demostrar "r" a partir de:

1. p ---> q   P
2. q ---> r   P

Demostración.

1. p ---> q   P
2. q ---> r   P
3. p   T.Deducción
4. q   PP13

|-- r   PP24

4.11. METODO DE DEMOSTRACION

Un método de demostración es toddo raciocinio válido con el cual podamos deducir una conclusión a partir de un conjunto de proposiciones, sin embargo, lo que usualmente se entiende por métodos de demostración son los siguientes raciocinios válidos. Los cuales aparecen con sus nombres más comunes.

4.11.1. Demostración Trivial.

De una hipótesis (proposición) de valor de vardad falso es válido deducir cualquier proposición.

4.11.2. Demostración Directa.

Si podemos establecer una cadena de implicaciones de tal manera que las hipótesis (antecedentes) de cada una están formadas por los consecuentes de las proposiciones precedentes, podemos deducir que el primer antecedente implica el último consecuente.

Simbólicamente:

$h \dashrightarrow p_1 ; p_1 \dashrightarrow p_2 \dashrightarrow p_3 ;\ldots; p_n \dashrightarrow t, \vdash h \dashrightarrow t$

Ejemplo:

Nos piden demostrar la implicación:

"Si Juán es mudo, entonces, no es integrante del coro de Bogotá". Procedemos:

Si Juán es mudo, entonces, Juán es cantante.

Si juán no es cantante, entonces, Juán no forma parte de ningún coro.

Si Juán no forma parte de ningún coro, entonces, Juán no es integrante del coro de Bogotá.

Simbólicamente sería:

h: Juán es mudo.

t: Juán no es integrante del coro de Bogotá.

p_1: Juán no es cantante.

p_2: Juán no forma parte de ningún coro.

Esto es:

Nos piden demostrar h ---> t.

$h \longrightarrow p_1$

$p_1 \longrightarrow p_2$

$p_2 \longrightarrow t$

Conclusión: $h \longrightarrow t$

4.11.3. Demostración Indirecta.

Del hecho de que la negación de una proposición "q" implique la negación de una proposición "p", es válido concluir que la proposición "p" implica la proposición "q".

Simbólicamente:

$\sim q \longrightarrow \sim p$

$\vdash p \longrightarrow q$

Ejemplo:

Demostrar que si a, b son enteros positivos y ab e un número impar, entonces a, y b, son impares.

Demostración:

Supongamos que a y b no son impares, entonces uno de ellos es par, digamos, "a" es par, es decir, $a = 2n$ y por tanto $ab = 2nb$ que es un número par.

Nota:

En la anterior demostración se utilizaron los siguientes conceptos:

1. $Z^{+} = \{1,2,3,\ldots\}$ Enteros positivos.
2. $a = 2n$, un número par se puede expresar de esta forma
3. $ab = 2nb$, en una igualdad se puede multiplicar sus miembros por un mismo número y la igualdad no se altera, y todo número multiplicado por 2 es un número par por tanto ab es par.

4.11.4. Reducción al Absurdo.

Si al conjunto de premisas se le agrega la negación de la conclusión y si de ésto se deduce una contradicción, es válido concluir que el conjunto de premisas dado inicialmente se deduce de la conclusión.

Simbólicamente:

$p_1, p_2, \ldots, p_n, \sim t \vdash \perp$ (Contradicción), entonces,
$p_1, p_2, \ldots, p_n, \vdash t$

Ejemplo:

Demostrar el silogismo Disjuntivo.

1.	$p \vee q$	P
2.	$p \rightarrow r$	P
3.	$q \rightarrow s$	P
4.	$\sim(r \vee s)$	R. Absurdo
5.	$\sim r \wedge \sim s$	T. De Morgan
6.	$\sim r$	SS
7.	$\sim s$	SB
8.	$\sim p$	TT26
9.	$\sim q$	TT37
10.	q	PT19
11.	$q \wedge \sim q$	A910

12. 1 Contradicción.

Nota:

Teorema de Morgan, ver Cap. II., numeral 2.8.1. en la página 85.

4.11.5. Contraejemplo.

Algunas veces se presenta una proposición de la forma: para todo elemento "x" de un universo "U" se cumple la propiedad "P".

Queremos saber si la proposición tiene valor de verdad verdadera, entonces, si logramos encontrar algún "x" que no cumple la propiedad "P", habremos demostrado que la proposición es falsa.

Ejemplo:

Sea la proposición:

Todos los números enteros positivos son pares.

La proposición es falsa porque, por ejemplo, el número 3 es un número entero positivo y no es par.

Nota:

La expresión anterior también puede expresarse en forma de implicación de la siguiente manera:

Si "x" es un número entero positivo, entonces es par.

4.12. RESUMEN

4.12.1. Modus Ponendo Ponens "PP".

1.	$p \longrightarrow q$	P
2.	p	P
$\vdash$	q	PP12

4.12.2. Modus Tollendo Tollens "TT".

1.	$p \longrightarrow q$	P
2.	$\sim q$	P
$\vdash$	$\sim q$	TT12

4.12.3. Modus Tollendo Ponens "TP".

1.	$p \vee q$	P	1.	$p \vee q$	P
2.	$\sim q$	P	2.	$\sim p$	P
$\vdash$	p	TP12, o,	$\vdash$	q	TP12

4.12.4. Modus Ponendo Tollens.

1.	$p \vee q$	P	1.	$p \vee q$	P
2.	q	P	2.	p	P
$\vdash$	$\sim p$	PT12, o,	$\vdash$	$\sim q$	PT12

4.12.5. Ley de Adjunción "A".

1.	p	P
2.	q	P
|--	p /\ q	A12

4.12.6. Ley de Simplifaicación "S".

1.	p /\ q	P	1.	p /\ q	P
|--	p	S1, o,	|--	q	A1

4.12.7. Ley de Adición "LA".

1.	p	P
|--	p \/ q	LA1

4.12.8. Silogismo Hipotético "SH".

1.	p ---> q	P
2.	q ---> r	P
|--	p ---> r	SH12

4.12.9 Silogismo Disjuntivo "SD".

1. p \/ q P

2. p ---> r P

3. q ---> s P

|-- r \/ s BD123

4.12.10. Teorema de deducción.

$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, p|--q, entonces
$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ |--p--->q

EJERCICIOS.

A. Complete las siguientes demostraciones.

1. Demostrar "~r".

1.	~p ---> q	P
2.	p ---> ~r	P
3.	~q	P
4.		TT13
5.		DN5
!--		PP25

2. Demostrar "q /\ ~s"

1.	p \/ q	P
2.	q \\/ s	P
3.	~p	P
4.		TP13
5.		PT25
!--		A45

3. Demostrar "r"

1.	p /\ q	P
2.	p \/ s--->r	P
3.		S1
4.		LA3
|--		PP24

4. Demostrar "r \/ s".

1.	p ---> q	P
2.	q ---> s	P
3.	r ---> t	P
4.	p \/ r	P
5.		SH12
|--		SD345

5. Demostrar "q /\ r".

1.	r \/ t--->q	P
2.	s ---> t	P
3.	q \/ s	P
4.	q ---> r	P
5.		SD234
6.		PP15
7.		PP46

|-- A67

6. Demostrar "q".

1. p ---> q P

2. p /\ r P

3. p

|-- q

7. Demostrar "~p \/ q".

1. r /\ s P

2. r ---> ~p P

3. r

4. ~p

|-- ~p q

8. Demostrar "~p /\ ~t".

1. ~p P

2. q \/ p P

3. t ---> ~q P

4. q

5. ~t

|-- ~p /\ ~t

9. Demostrar "t".

1. q /\ r P

2. s \/ q--->t P

3. q

4. s \/ q

|--- t

10. Demostrar "~p".

1. p ---> q P

2. q ---> ~r P

3. r

4. p ---> ~r

|-- ~p

B. Desarrollar las siguientes demostraciones.

1. Demostrar "~p \/ q".

1. ~r \/ s P

2. ~r ---> ~p P

3. n ---> ~s P

4. t /\ n P

2. Demostrar "~s /\ ~q".

1. p \/ q P

2. ~q

3. p ---> ~s P

3. Demostrar "p /\ s".

1. r ---> p P

2. q \/ ~s P

3. s /\ r P

4. Demostrar "q".

1. p ---> s P

2. s \/ p P

3. t ---> q P

4. s ---> t P

5. Demostrar "t".

1. k \/ l P

2. m \/ h--->p\/q P

3. l ---> h P

4. k ---> m P

5. q ---> t P

6. p--->~(m \/ h) P

6. Demostrar "~r".

1. ~p P

2. p ---> q P

3. q \/ r P

7. Demostrar "r \/ p".

1. q \/ s P
2. s ---> t P
3. q ---> w P
4. t \/ w--->~k P
5. k \/ r P

8. Demostrar "z".

1. p \/ ~q P
2. r /\ q P
3. p /\ r--->z P

9. Demostrar "s \/ t".

1. k \/ r P
2. r ---> p P
3. k ---> q P
4. q \/ r--->~n P
5. n \/ s P

10. Demostrar "(~s /\ q)\/(~r /\ ~q).

1. q ---> r P

2. ~q ---> r P

3. (q ---> s) ~s P

4. r ---> s P

BIBLIOGRAFIA

AGAZZI, Evandro. La lógica Simbólica. Barcelona, Herder, 1979.

ARRAMBIDE, Moisés Introducción a la lógica Matemática. México, McGraw-Hill, 1976.

COHEN, Morris y NAGEL, Ernest, Introducción a la lógica y el Método Científico. Buenos Aires, Amorrortu, 1983.

MARQUINEZ, Germán y SANZ, Juan. Lógica. Colombia, USTA 1986.

ROMERO, Francisco. Lógica. Ps Buenos Aires. Losada. 1973.

SUPPES. P. y Hill. S. Introducción a la lógica Matemática. Colombia. Reverte. 1976.