

2019

Desarrollo de una estrategia de control predictivo aplicado a un péndulo invertido, que permita la estabilización de imágenes en robots para exploración agrícola

David Mateo Rojas Vallejo
Universidad de La Salle, Bogotá

Follow this and additional works at: https://ciencia.lasalle.edu.co/ing_automatizacion



Part of the [Controls and Control Theory Commons](#), and the [Electronic Devices and Semiconductor Manufacturing Commons](#)

Citación recomendada

Rojas Vallejo, D. M. (2019). Desarrollo de una estrategia de control predictivo aplicado a un péndulo invertido, que permita la estabilización de imágenes en robots para exploración agrícola. Retrieved from https://ciencia.lasalle.edu.co/ing_automatizacion/272

This Trabajo de grado - Pregrado is brought to you for free and open access by the Facultad de Ingeniería at Ciencia Unisalle. It has been accepted for inclusion in Ingeniería en Automatización by an authorized administrator of Ciencia Unisalle. For more information, please contact ciencia@lasalle.edu.co.

Desarrollo de una estrategia de control predictivo aplicado a un péndulo invertido, que permita la estabilización de imágenes en robots para exploración agrícola.

David Mateo Rojas Vallejo

Universidad de La Salle
Ingeniería en automatización
Bogotá, Colombia

2018

Desarrollo de una estrategia de control predictivo aplicado a un péndulo invertido, que permita la estabilización de imágenes en robots para exploración agrícola.

David Mateo Rojas Vallejo

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Ingeniero en automatización

Director:

Profesor José Fabián Salazar Cáceres

Universidad de La Salle

Ingeniería en automatización

Bogotá

2018

Dedicatoria

Dedicado a mis padres, y a toda aquella persona que en cualquier magnitud aportó durante el proceso.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres en su función de educadores, desde ahí empieza el desenlace de una serie de eventos que forjaron el ahora y proyectan el mañana.

Resumen

La robótica es un campo de estudio tan amplio, que se puede extender prácticamente a cualquiera de las labores humanas; una de estas actividades es la agricultura, aunque para que esto se logre, primero se deben considerar factores mas específicos de un sistema robótico como: visión artificial, estructuras robóticas, control de sistemas, entre otros.

En este proyecto se desarrolla una estrategia de control para una plataforma de péndulo invertido, que emula el sistema mecánico en donde se posicionaría la cámara de un robot agrícola. El sistema consiste en un péndulo invertido rotativo, y la estrategia de control que se implementó es un controlador predictivo basado en el modelo MPC (Model Predictive Control), esta estrategia de control toma como base el modelo matemático exacto del sistema, lo replantea en función de los estados futuros y con esta información resuelve un problema de optimización que genera el voltaje necesario para lograr la estabilización del péndulo.

Los algoritmos del controlador se embebieron en la tarjeta de adquisición de QUANSER y se programaron mediante la interfaz de "hardware in the loop" que ofrecen para MATLAB.

Palabras clave: MPC, Control, Péndulo invertido.

Índice

1. Introducción	1
2. Teoría de control MPC (Model Predictive Control)	3
2.1. Control MPC en tiempo discreto	3
2.1.1. Espacio aumentado con integrador.	3
2.1.2. Control predictivo con una ventana de optimización.	5
2.1.3. Optimización.	8
2.2. Control MPC en tiempo discreto implementando funciones de Laguerre	10
2.2.1. Redes discretas de Laguerre.	10
2.2.2. Funciones de Laguerre en el diseño de control MPC discreto.	13
3. Modelo dinámico “Rotatory Inverted Pendulum”	14
3.1. Base giratoria SRV02.	14
3.2. Péndulo invertido.	20
3.2.1. Modelado por Euler-Lagrange	21
3.2.2. Linealización	28
3.3. Análisis del modelo matemático.	36
3.3.1. Autovalores y estabilidad	36
3.3.2. Controlabilidad y observabilidad	39

4. Diseño e implementación del controlador MPC	41
4.1. Validación del controlador MPC	54
5. Conclusiones	62

Lista de Figuras

1.	Esquema eléctrico de un motor.	14
2.	Esquema mecánico del tren de engranajes del motor.	15
3.	Esquema del péndulo invertido giratorio.	21
4.	Grafica de los polos en el plano real-imaginario.	38
5.	Graficas del comportamiento del sistema a 100Hz.	46
6.	Graficas del comportamiento del sistema a 1000Hz.	47
7.	Esquema del hardware utilizado para la implementación.	50
8.	Diagrama de un controlador MPC clásico.	51
9.	Resultados del controlador implementado en la planta para las posiciones angulares.	52
10.	Resultados del controlador implementado en la planta para las velocidades angulares.	53
11.	Señal de la entrada de voltaje sobre el motor del péndulo invertido.	54
12.	Señal de ruido blanco utilizada como perturbación.	55
13.	Señal voltaje como entrada al motor, ante la perturbación.	56
14.	Señal de ruido sinusoidal utilizada como perturbación.	57
15.	Señal voltaje como entrada al motor, ante la perturbación.	57
16.	Señal voltaje como entrada al motor, ante la perturbación.	58
17.	Señal voltaje como entrada al motor, ante la perturbación.	58

18. Resultados del controlador por state feedback. 60

Lista de Tablas

1.	Tabla de especificaciones del SRV02	19
2.	Tabla de especificaciones del INVERTED PENDULUM	34
3.	Parámetros utilizados para el diseño del controlador.	44

1. Introducción

En un futuro los robots serán fundamentales para el desarrollo de una gran cantidad de procesos, en el campo agropecuario esto no sera la excepción, por lo tanto es importante que las estructuras robóticas desarrolladas posean la robustez necesaria para manejar los adversos terrenos que se presentan en entornos rurales, esta robustez se puede lograr a nivel mecánico, reforzando y mejorando el hardware de los robots, pero además el software también es una herramienta para este objetivo, con la evolución de las estrategias de control se pueden lograr reducciones en el consumo de energía y aumentos en la precisión de los actuadores.

La teoría de control hace referencia a la regulación de sistemas físicos, se basa en el análisis dinámico para describir matemáticamente el comportamiento de estos fenómenos; dentro de la teoría de control es común encontrar sistemas no lineales [[Arevalo-Castiblanco et al., 2017](#)], que son aquellos cuyo comportamiento se convierte impredecible o en algunos casos caótico. Los sistemas pendulares, como la plataforma de péndulo invertido, son sistemas que se consideran altamente no lineales e inestables [[Seman et al., 2013](#)], la dinámica de este sistema se obtiene aplicando la teoría dinámica de estructuras robóticas llamada Euler-Lagrange. El péndulo invertido ofrece una complejidad atractiva para la implementación de nuevas estrategias de control, lo que ha despertado un gran interés entre los investigadores, buscando probar, evaluar y comparar diferentes técnicas de control moderna. En el campo de la ingeniería a de control trabajar con plataformas pendulares robustas permite validar diversos controladores de acuerdo a aplicaciones específicas. Como el caso de la robótica y los

sistemas de transporte, donde han aparecido aplicaciones de control en sistemas pendulares [Nawawi, 2006]. En la robótica humanoide el equilibrio del cuerpo se puede ver como un problema de control pendular. Como también, las nuevas formas de transporte unipersonal, las cuales usan el principio del péndulo invertido, el SegWay utilizado para vigilancia y diversión, es un ejemplo, junto con la bicicleta de una sola rueda, entre otras aplicaciones [Back and Lee, 2016], [Pousti and Bodur, 2008], [Wahyudi, 2010]. En la actualidad se habla de control discreto, ya que los dispositivos para implementar estas técnicas son tecnologías basadas en computadores, el control discreto es la extensión de la teoría de control a sistemas de datos muestreados, es decir dispositivos que reciban y envíen datos con un intervalo de tiempo entre ellos [Kuo, 1997]. Dentro del estudio de la teoría de control existe una rama denominada control moderno, son aquellas técnicas que toman como referencia los postulados de la teoría de control, y junto con teorías actuales de computación o inteligencia artificial generan estrategias de control robustas y óptimas. Una de estas estrategias, aplicada sobre sistemas discretos, es el control predictivo basado en el modelo, que tiene en cuenta la dinámica del sistema para optimizar la trayectoria futura de la planta [Wang, 2009].

2. Teoría de control MPC (Model Predictive Control)

2.1 Control MPC en tiempo discreto

2.1.1 Espacio aumentado con integrador.

El control predictivo basado en el modelo (MPC), es una estrategia de control predictivo, cuya esencia se encuentra en el modelo matemático del sistema, es decir, utilizando la teoría de control predictivo y considerando la matemática del sistema, se plantea la estrategia de control MPC, a continuación se explicará como se aplica esta teoría teniendo como referencia el libro de [Wang, 2009]. Un controlador puede ser diseñado tanto en el dominio del tiempo (sistemas continuos), como en el dominio discreto (sistemas muestreados), para el desarrollo de la propuesta y la implementación de los resultados se diseña en el dominio discreto, asumiendo un sistema de la siguiente forma:

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m u(k) \quad (2.1)$$

$$y(k) = C_m x_m(k) \quad (2.2)$$

Donde x_m corresponde a los estados del sistema y pertenece al espacio R_n ; A_m, B_m y C_m corresponden a las matrices discretas que representan el sistema en espacio de estados; y es la salida del sistema y u corresponde a la entrada del sistema.

Con la intención de añadir un integrador al sistema, se aplica un operador de diferencias al

sistema discreto y se obtiene lo siguiente

$$x_m(k+1) - x_m(k) = A_m(x_m(k) - x_m(k-1)) + B_m(u(k) - u(k-1))$$

Denotando las diferencias con el operador Δ y realizando un desplazamiento de atraso en el dominio discreto se obtiene que:

$$\Delta x_m(k+1) = x_m(k+1) - x_m(k); \quad \Delta x_m(k) = x_m(k) - x_m(k-1)$$

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$

Esta transformación define incrementos del vector de estados; se puede reescribir el sistema de la siguiente manera.

$$\Delta x_m(k+1) = A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u(k) \quad (2.3)$$

Para relacionar $\Delta x_m(k+1)$ con la salida $y(k)$ se concatenan estas variables creando un nuevo vector de estados de la forma:

$$x(k) = [\Delta x_m(k+1)^T y(k)]^T \quad (2.4)$$

Donde el superíndice T hace referencia a la transpuesta del vector. Calculando la salida para el operador en diferencias y reemplazando con 2.3 se tiene que:

$$y(k+1) - y(k) = C_m \Delta x_m(k+1) \quad (2.5)$$

$$y(k+1) - y(k) = C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) \quad (2.6)$$

Reconstruyendo el espacio de estados para 2.3 y 2.6 obtenemos:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix}}^{x(k+1)} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_m & 0_m^T \\ C_m A_m & 1 \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}}^{x(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix}}^B \Delta u(k) \quad (2.7)$$

$$y(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0_m & 1 \end{bmatrix}}^C \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Donde $0_m = \overbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 0]}^{n_1}$. A esta nueva representación en variables de estado se le denomina **Espacio aumentado**, y es la representación con la cual se diseña el control predictivo.

2.1.2 Control predictivo con una ventana de optimización.

El siguiente paso en el diseño del control predictivo es calcular la predicción de la salida en función de la trayectoria futura de la señal de control, para esto se asume k_i como el instante de tiempo actual, N_p como el horizonte de predicción y N_c como el horizonte de control para definir la trayectoria futura de control como:

$$\Delta u(k_i), \Delta u(k_i + 1), \dots, \Delta u(k + N_c - 1)$$

N_c define el número de parámetros que se considerarán de la trayectoria futura de control, N_p el número de muestras y la longitud de la ventana de optimización.

Teniendo en cuenta lo anterior, para un vector de estados x_{k_i} se predicen los estados futuros para un número de muestras N_p , por lo tanto se pueden denotar los estados futuros de la

siguiente manera:

$$x(k_i + 1|k_i), x(k_i + 2|k_i), \dots, x(k_i + m|k_i), \dots, x(k_i + N_p|k_i)$$

Donde $x(k_i + m|k_i)$ representa la predicción del estado $x(k_i + m)$ con respecto a la información actual de la planta ($x(k_i)$).

Introducido el concepto de horizonte de predicción (N_p) y horizonte de control (N_c), se prosigue con el siguiente paso en el diseño de control predictivo, para este método se toma como base el espacio aumentado presentado en 2.7 y 2.8 y se calculan los estados para una secuencia como se muestra a continuación:

$$x(k_i + 1|k_i) = Ax(k_i) + B\Delta u(k_i)$$

$$\begin{aligned} x(k_i + 2|k_i) &= Ax(k_i + 1|k_i) + B\Delta u(k_i + 1) \\ &= A^2x(k_i) + AB\Delta u(k_i) + B\Delta u(k_i + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(k_i + 3|k_i) &= Ax(k_i + 2|k_i) + B\Delta u(k_i + 2) \\ &= A^3x(k_i) + A^2B\Delta u(k_i) + AB\Delta u(k_i + 1) + B\Delta u(k_i + 2) \end{aligned}$$

\vdots

$$x(k_i + N_p|k_i) = A^{N_p}x(k_i) + A^{N_p-1}B\Delta u(k_i) + A^{N_p-2}B\Delta u(k_i + 1) + \dots + A^{N_p-N_c}B\Delta u(k_i + N_c - 1) \quad (2.9)$$

Por sustitución de $x(k_i + m|k_i)$ en 2.8 obtenemos la predicción de la salida con respecto a

los estados futuros de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
y(k_i + 1|k_i) &= Cx(k_i + 1|k_i) \\
&= CAx(k_i) + CB\Delta u(k_i) \\
y(k_i + 2|k_i) &= Cx(k_i + 2|k_i) \\
&= CA^2x(k_i) + CAB\Delta u(k_i) + CB\Delta u(k_i + 1) \\
&\vdots \\
y(k_i + N_p|k_i) &= CA^{N_p}x(k_i) + CA^{N_p-1}B\Delta u(k_i) + CA^{N_p-2}B\Delta u(k_i + 1) + \dots + CA^{N_p-N_c}B\Delta u(k_i + N_c - 1)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Como se puede observar las ecuaciones dependen unicamente del estado actual $x(k_i)$ y de la evolución de la trayectoria de control $\Delta u(k_i + 0, \dots, k_i + N_c - 1)$. Agrupando los términos $y(k_i + m|k_i)$ y $\Delta u(k_i)$ en vectores

$$\begin{aligned}
Y &= [y(k_i + 1|k_i) \quad y(k_i + 2|k_i) \quad y(k_i + 3|k_i) \quad \dots \quad y(k_i + N_p|k_i)]^T \\
\Delta U &= [\Delta u(k_i) \quad \Delta u(k_i + 1) \quad \Delta u(k_i + 2) \quad \dots \quad \Delta u(k_i + N_c - 1)]^T
\end{aligned}$$

Estos nuevos vectores se convierten en los estados y la entrada de un nuevo sistema, que se obtiene a partir de [2.10](#) y se describe por la siguiente ecuación:

$$Y = Fx(k_i) + \Phi\Delta U \tag{2.11}$$

Donde

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-2}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}$$

2.1.3 Optimización.

El objetivo del control predictivo es calcular la predicción de la salida más cercana posible a la señal de referencia $r(k_i)$, mas adelante se presentará que para esto se requiere seleccionar el mejor vector ΔU tal que una función del error entre la referencia y la predicción de la salida sea minimizada.

Asumiendo un vector que contiene la información de la referencia $r(k_i)$ de la forma

$$R_s^T = \overbrace{[1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]}^{N_p} r(k_i),$$

Definimos la función de costo J asociada al objetivo de control

$$J = (R_s - Y)^T (R_s - Y) + \Delta U^T \bar{R} \Delta U \quad (2.12)$$

Donde $(R_s - Y)^T (R_s - Y)$ corresponde a la minimización del error entre la predicción de la salida y la referencia del sistema; y el segundo termino $\Delta U^T \bar{R} \Delta U$ considera el peso que tendrá el tamaño de ΔU en el cálculo de la función de costo, para esto se utiliza el parámetro \bar{R} que

corresponde a una matriz de la forma $\bar{R} = r_\omega I_{N_c \times N_c}$ donde r_ω corresponde a un parámetro de sintonización para el comportamiento en lazo cerrado del sistema.

Reemplazando 2.11 en 2.12 expresamos J como:

$$J = (R_s - Fx(k_i))^T (R_s - Fx(k_i)) - 2\Delta U^T \Phi^T (R_s - Fx(k_i)) + \Delta U^T (\Phi^T \Phi + \bar{R}) \Delta U \quad (2.13)$$

Aplicamos la primera derivada a la función de costo

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = -2\Phi^T (R_s - Fx(k_i)) + 2(\Phi^T \Phi + \bar{R}) \Delta U \quad (2.14)$$

Igualando la derivada a 0 y despejando para ΔU encontramos que la solución óptima para la señal de control es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \Delta U} &= 0 \\ \Delta U &= (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (R_s - Fx(k_i)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sabiendo que R_s contiene la información de la referencia y que se puede expresar de la forma

$$R_s^T = \overbrace{[1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]}^{N_p} r(k_i) = \bar{R}_s r(k_i)$$

Podemos relacionar la señal de control (ΔU) con los estados ($x(k_i)$) y la referencia del sistema ($r(k_i)$) mediante la siguiente ecuación:

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (\bar{R}_s r(k_i) - Fx(k_i)) \quad (2.16)$$

Teniendo en cuenta que $\Delta U = [\Delta u(k_i) \quad \Delta u(k_i + 1) \quad \Delta u(k_i + 2) \quad \dots \quad \Delta u(k_i + N_c - 1)]^T$ se puede definir la entrada de control para el instante actual k como:

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \quad (2.17)$$

2.2 Control MPC en tiempo discreto implementando funciones de Laguerre

2.2.1 Redes discretas de Laguerre.

Considerando que en la sección anterior el vector de optimización se define por

$$\Delta U = [\Delta u(k_i) \quad \Delta u(k_i + 1) \quad \Delta u(k_i + 2) \quad \dots \quad \Delta u(k_i + N_c - 1)]^T$$

La solución para el instante siguiente se puede representar por el operador pulso (δ) de la siguiente manera:

$$\Delta u(k_i + i) = [\delta(i) \quad \delta(i - 1) \quad \delta(i - 2) \quad \dots \quad \delta(i - N_c + 1)] \Delta U$$

Donde $\delta(i) = 1$, si $i=0$, y la función $\delta(i - p)$ representa un desplazamiento de p instantes en el operador pulso. Planteado esto, se percibe que $\Delta u(k_i + 1)$ puede ser aproximada por una base de funciones ortonormales de la forma $B = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]$ [Fraleigh and Beauregard, 1995]. Basándose en los resultados obtenidos en [Wang, 2001, Holkar and Waghmare, 2010] se propone utilizar las redes de Laguerre discretas, ya que proveen parámetros de sintonización de interés para el desarrollo del controlador. La red discreta de Laguerre se obtiene a partir

de la transformada z de la red de Laguerre continua, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(z) &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}} \\
\Gamma_2(z) &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}} \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}} \\
&\vdots \\
\Gamma_N(z) &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}} \left(\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}} \right)^{N-1}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

En donde z representa el operador de la transformada z , a corresponde al polo de la red de Laguerre y N al número de términos de la misma. Conocemos que las funciones de Laguerre corresponden a una base ortnormal, en esta sección se obviaré la demostración basada en las ecuaciones ortonormales, para una detallada explicación revisar: [Wahlberg, 1991].

De la ecuación 2.18 se puede inferir que una manera mas simple de expresar la red de Laguerre es mediante una representación en espacio de estados discreto de la siguiente manera

$$\Gamma_k(z) = \Gamma_{k-1}(z) \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}; \quad \forall \quad k \geq 2 \tag{2.19}$$

Denotando cada una de las transformadas z inversas de los elementos de la red de Laguerre como l_1, l_2, \dots, l_N y compactandolas en la forma de vector como

$$L(k) = [l_1(k) \quad l_2(k) \quad \dots \quad l_N(k)]^T$$

Utilizando la representación 2.19 la red de Laguerre satisface la siguiente ecuación en diferencias:

$$L(k+1) = A_l L(k) \tag{2.20}$$

Donde A_l es una matriz de dimensiones $N \times N$ que es función del parámetro a y $\beta = (1 - a^2)$ y posee como condición inicial: (ver [Wang, 2009])

$$L(0)^T = \sqrt{\beta}[1 \quad -a \quad a^2 \quad -a^3 \quad \dots \quad (-1)^{N-1}a^{N-1}]$$

Definiendo $m = 2, 3, \dots, N$ y una condición de $A_l(1, 1) = a$ se puede escribir de manera generalizada A_l como:

$$A_l = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a\beta & \beta & a & 0 & 0 & 0 \\ a^2\beta & -a\beta & \beta & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-a)^{N-2}\beta & (-a)^{N-3}\beta & \dots & \dots & (-a)^{N-N}\beta & a \end{bmatrix}$$

Realizando un análisis sobre la matriz A_l de la ecuación en diferencias y la condición inicial $L(0)$, se determinó que para valores de $a = 0$ la matriz A_l se convierte en

$$A_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y el vector de condiciones iniciales $L(0)$ se convierte en

$$L(0)^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \dots 0]$$

Por lo tanto el vector

$$L(k) = [l_1(k) \quad l_2(k) \quad \dots \quad l_N(k)]^T$$

Queda de la forma

$$L(k) = [\delta(i) \quad \delta(i-1) \quad \dots \quad \delta(i-N_c+1)]^T \quad (2.21)$$

Haciéndolo equivalente al control MPC tradicional descrito en la Sección 2.1

2.2.2 Funciones de Laguerre en el diseño de control MPC discreto.

Como se mencionó al final de la sección anterior, para el caso en el que $a = 0$ el controlador es diseñado utilizando la función pulso, como en el caso de un MPC tradicional, esta estrategia genera una carga computacional elevada para implementaciones en sistemas complejos [Wang et al., 2014, Ferrara et al., 2014], debido a que requiere un mayor número de parámetros Δu para lograr una señal de control adecuada, mientras que, utilizando las redes de Laguerre ($l(k)$) como reemplazo de la función pulso ($\delta(k)$) el número de parámetros requeridos es menor, acelerando el tiempo de computo [Villarreal et al., 2018]. Esta sección se profundizará más adelante, en el capítulo de diseño e implementación del controlador MPC.

3. Modelo dinámico “Rotatory Inverted Pendulum”

3.1 Base giratoria SRV02.

Para el modelado de este sistema se sugieren dos estrategias, la primera basada en el modelo analítico del sistema, y la segunda en alguna metodología de identificación de sistemas. La primera se considera mas efectiva para este caso, debido a que se posee información completa de la planta, como los valores de las constantes del motor, y las constantes mecánicas del sistema de engranajes, a continuación se muestra un diagrama del esquema eléctrico y mecánico respectivamente.

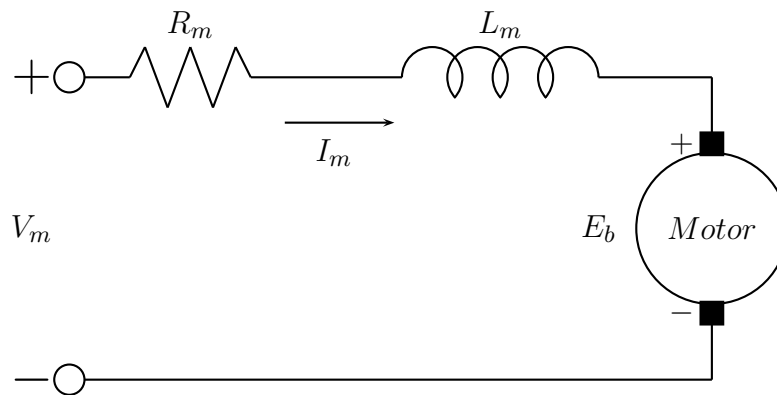


Figura 1: Esquema eléctrico de un motor.

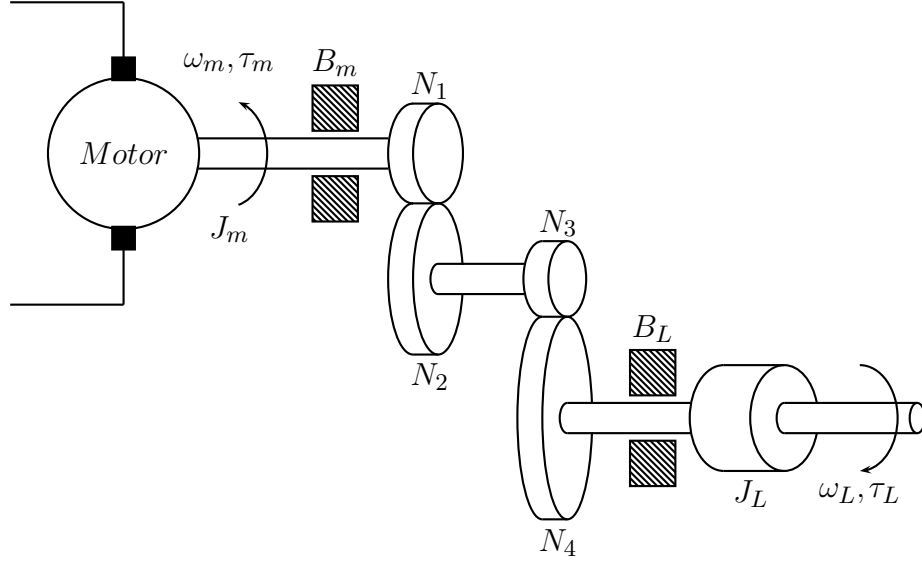


Figura 2: Esquema mecánico del tren de engranajes del motor.

Donde E_b corresponde a la fuerza contra-electromotriz, que se representa por

$$E_b(t) = K_m \omega_m(t) \quad (3.1)$$

Aplicando la ley de voltaje de Kirchoff sobre el esquema eléctrico se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$V_m(t) - I_m(t)R_m - L_m \frac{dI_m(t)}{dt} - E_b(t) = 0 \quad (3.2)$$

Reemplazando 3.1 en 3.2 e ignorando el efecto de la inductancia L_m debido a que el valor es muy pequeño, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$V_m(t) - I_m(t)R_m - K_m \omega_m(t) = 0 \quad (3.3)$$

Resolviendo para la corriente del circuito

$$I_m(t) = \frac{V_m(t) - K_m \omega_m(t)}{R_m} \quad (3.4)$$

En 3.4 se representa la ecuación eléctrica que gobierna el comportamiento del motor, a continuación se desarrollan las ecuaciones mecánicas del sistema. El objetivo para la implementación del controlador es obtener una ecuación que represente la velocidad de la carga (ω_L) con respecto al torque aplicado por el motor (τ_m). Considerando la segunda ley de Newton la ecuación que representa el movimiento de la carga es:

$$J_L \frac{d\omega_L(t)}{dt} + B_L \omega_L(t) = \tau_L(t) \quad (3.5)$$

Donde J_L y τ_L representan el momento de inercia y el torque de la carga del motor, B_L al coeficiente de viscosidad y ω_L a la velocidad angular de la carga. La ecuación que considera el movimiento del eje de motor es:

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + B_m \omega_m(t) + \tau_{mL}(t) = \tau_m(t) \quad (3.6)$$

Donde τ_{mL} corresponde al torque en el eje del motor, debido a la carga del sistema, y se representa como

$$\tau_{mL} = \frac{\tau_L}{\eta_g K_g} \quad (3.7)$$

η_g y K_g son la eficiencia del tren de engranajes y la relación de transmisión respectivamente. la relación de transmisión depende de el número de dientes de cada piñon.

$$K_g = K_{ge} K_{gi}$$

$$K_{ge} = \frac{N_4}{N_3}$$

$$K_{gi} = \frac{N_2}{N_1}$$

Se conoce también que por efecto del tren de engranajes la relación entre la velocidad angular del motor y de la carga es:

$$\omega_m(t) = K_g \omega_L(t) \quad (3.8)$$

Ahora, reemplazando 3.5, 3.7 y 3.8 en 3.6 se obtiene la ecuación diferencial que describe el movimiento en el eje de la carga con respecto al torque aplicado por el motor, descrita por:

$$J_m K_g \frac{d\omega_L(t)}{dt} + B_m K_g \omega_L(t) + \frac{J_L \left(\frac{d\omega_L(t)}{dt} \right) + B_L \omega_L(t)}{\eta_g K_g} = \tau_m(t)$$

Factorizando para las variables de velocidad y aceleración se obtiene

$$(J_m K_g^2 \eta_g + J_L) \frac{d\omega_L(t)}{dt} + (B_m K_g^2 \eta_g + B_L) \omega_L(t) = \eta_g K_g \tau_m(t) \quad (3.9)$$

Por efectos de practicidad en operaciones posteriores se definen las variables J_{eqv} y B_{eqv} como:

$$J_{eqv} = (J_m K_g^2 \eta_g + J_L)$$

$$B_{eqv} = (B_m K_g^2 \eta_g + B_L)$$

Continuando con el proceso de modelado se prosigue con la combinación de la ecuación 3.4 y 3.9 para obtener una ecuación general que relacione la corriente del motor, con el movimiento de la carga, para esto, y basándose en los parámetros propios del motor, se define el torque aplicado como:

$$\tau_m(t) = \eta_m K_e I_m(t) \quad (3.10)$$

Donde η_m y K_e corresponden a la eficiencia y la constante eléctrica del motor. Reemplazando 3.4 en 3.10 se reescribe la ecuación en función del voltaje (V_m) y la velocidad angular del motor (ω_m) como:

$$\tau_m(t) = \frac{\eta_m K_e (V_m(t) - K_m \omega_m(t))}{R_m} \quad (3.11)$$

Siguiendo la relación de el tren de engranajes descrita en 3.8, se expresa el torque aplicado por el motor en función de la velocidad angular de la carga (ω_L) como:

$$\tau_m(t) = \frac{\eta_m K_e (V_m(t) - K_m K_g \omega_L(t))}{R_m} \quad (3.12)$$

Y se reemplaza el resultado en 3.9 para obtener:

$$J_{eqv} \frac{d\omega_L(t)}{dt} + B_{eqv} \omega_L(t) = \frac{\eta_g K_g \eta_m K_e (V_m(t) - K_m \omega_m(t))}{R_m}$$

Factorizando para las variables de estado se obtiene que:

$$J_{eqv} \frac{d\omega_L(t)}{dt} + \left(\frac{K_m \eta_g K_g^2 \eta_m K_e}{R_m} + B_{eqv} \right) \omega_L(t) = \frac{\eta_g K_g \eta_m K_e V_m(t)}{R_m} \quad (3.13)$$

Y de manera simplificada

$$J_{eqv} \frac{d\omega_L(t)}{dt} + B_{eqv'} \omega_L(t) = A_{eqv} V_m(t) \quad (3.14)$$

Con

$$B_{eqv'} = \frac{K_m \eta_g K_g^2 \eta_m K_e + B_{eqv} R_m}{R_m} \quad (3.15)$$

$$A_{eqv} = \frac{\eta_g K_g \eta_m K_e}{R_m} \quad (3.16)$$

Basándonos en la siguiente tabla, proporcionada por el manual del SRV02:

Parámetro	Símbolo	Valor
Resistencia de la armadura	R_m	2,6 Ω
Constante corriente-torque del motor	k_t	$7,68x10^{-3} \frac{N.m}{A}$
Constante eléctrica del motor	K_e	$7,68x10^{-3} \frac{N.m}{A}$
Constante contra-electromotriz del motor	K_m	$7,68x10^{-3} \frac{V}{(\frac{rad}{s})}$
Relación de transmisión	K_g	70
Eficiencia del motor	η_m	0,69
Eficiencia del tren de engranajes	η_g	0,90
Momento de inercia del rotor	J_m	$3,90x10^{-7} Kg.m^2$
Momento de inercia equivalente	J_{eqv}	$2,087x10^{-3} Kg.m^2$
Coefficiente de viscosidad equivalente	B_{eqv}	$0,015 \frac{N.m}{(\frac{rad}{s})}$

Tabla 1: Tabla de especificaciones del SRV02

Se procede al calculo de la función de transferencia del sistema, para esto se aplica la transformada de Laplace sobre la ecuación 3.14 y se obtiene:

$$J_{eqv}s\omega_L(s) + B_{eqv}'\omega_L(s) = A_{eqv}V_m(s) \quad (3.17)$$

Y resolviendo para $\frac{\omega_L(s)}{V_m(s)}$:

$$\frac{\omega_L(s)}{V_m(s)} = \frac{A_m}{J_{eqv}s + B_{eqv}'} \quad (3.18)$$

finalmente reemplazando las variables con su respectivo valor en la tabla se obtiene que la función de transferencia del sistema SRV02 es:

$$\frac{\omega_L(s)}{V_m(s)} = \frac{0,129}{2e^{-3}s + 0,084} \quad (3.19)$$

3.2 Péndulo invertido.

Es importante definir algunas cuestiones para un desarrollo claro y limpio del modelo, a continuación se presenta una figura en la que se representan cada una de las variables que se utilizarán en el modelado de la estructura, por convención, cuando existe una rotación en sentido anti-horario, los ángulos son positivos; se utilizará el subíndice r para referirse al brazo giratorio y el subíndice p para el eslabón del péndulo.

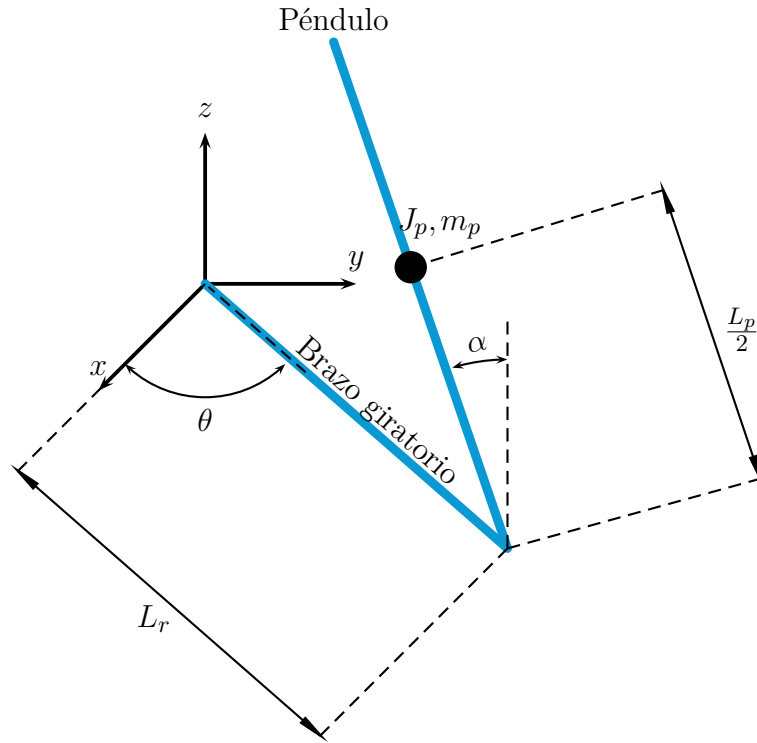


Figura 3: Esquema del péndulo invertido giratorio.

3.2.1 Modelado por Euler-Lagrange

Como se puede observar, la manera en la que está construido el péndulo invertido rotativo, se puede asemejar a un robot manipulador, en este caso uno de dos eslabones unidos por una articulación, por esta razón se procede a realizar el modelamiento de la plataforma utilizando un método sistemático como lo es Euler-Lagrange. Para esto se define la ecuación generalizada como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.20)$$

Donde q_i son las variables generalizadas, que para esta plataforma serian:

$$q(t)' = [\theta(t) \quad \alpha(t)] \quad (3.21)$$

Y las derivadas de 3.21 corresponden a las velocidades generalizadas. Como se tienen dos variables, una para el brazo giratorio y otra para el péndulo, se obtienen por lo tanto dos ecuaciones de Euler-Lagrange de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= Q_2 \end{aligned}$$

Donde L es el Lagrangiano del sistema y Q_1, Q_2 corresponden a las fuerzas no conservativas del sistema, como lo son la fuerza debida a la viscosidad. Se conoce por definición que el Lagrangiano es la diferencia entre la energía cinética total(T) y la energía potencial total(V), por lo tanto

$$L = T - V$$

Y por la naturaleza del sistema las fuerzas no conservativas para el brazo giratorio y el péndulo son:

$$Q_1 = \tau - B_r \dot{\theta}$$

$$Q_2 = -B_p \dot{\alpha}$$

Una vez explicado esto, se desarrollan las ecuaciones de la energía cinética y potencial, para así expresar el Lagrangiano del sistema. Primero se obtienen las posiciones absolutas

del brazo giratorio y el péndulo, para esto se plantean las matrices de transformación del brazo giratorio con respecto al origen(0T_1), y de el centro de masa del péndulo con respecto al origen(0T_2); ya que por definición las coordenadas absolutas y la matriz de transformación se relacionan por la siguiente expresión:

$$x_i = {}^0T_i(1,4)$$

$$y_i = {}^0T_i(2,4)$$

$$z_i = {}^0T_i(3,4)$$

Por lo tanto para el brazo giratorio

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 & L_r \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 & L_r \sin(\theta(t)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con sus posiciones absolutas:

$$x_1 = L_r \cos(\theta(t)) \tag{3.22}$$

$$y_1 = L_r \sin(\theta(t)) \tag{3.23}$$

$$z_1 = 0 \tag{3.24}$$

Para el péndulo es necesario calcular la matriz de transformación total ${}^0T_2 = {}^0T_1^1T_2$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) & -\frac{L_p \sin(\alpha(t))}{2} \\ 0 & \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) & -\frac{L_p \cos(\alpha(t))}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\cos(\alpha(t)) \sin(\theta(t)) & \sin(\alpha(t)) \sin(\theta(t)) & L_r \cos(\theta(t)) + \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \sin(\theta(t))}{2} \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\alpha(t)) \cos(\theta(t)) & -\sin(\alpha(t)) \cos(\theta(t)) & L_r \sin(\theta(t)) - \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \cos(\theta(t))}{2} \\ 0 & \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) & -\frac{L_p \cos(\alpha(t))}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con sus posiciones absolutas:

$$x_2 = L_r \cos(\theta(t)) + \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \sin(\theta(t))}{2} \quad (3.25)$$

$$y_2 = L_r \sin(\theta(t)) - \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \cos(\theta(t))}{2} \quad (3.26)$$

$$z_2 = -\frac{L_p \cos(\alpha(t))}{2} \quad (3.27)$$

Con estas posiciones absolutas se procede al calculo de la energía potencial total(V) del sistema, que corresponde unicamente a la energía potencial gravitacional (V_g):

$$V_g = M_p g z_2 = \frac{L_p M_p g \cos \alpha(t)}{2}$$

por lo tanto

$$V = \frac{L_p M_p g \cos \alpha(t)}{2} \quad (3.28)$$

Para el calculo de la energía cinética se deben considerar la energía causada por la rotación y la energía debida a la traslación, por lo tanto serán necesarias las velocidades absolutas del sistema, que corresponden a las derivadas con respecto al tiempo de las posiciones absolutas:

$$v_{x1} = \frac{dx_1}{dt} = -L_r \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \quad (3.29)$$

$$v_{y1} = \frac{dy_1}{dt} = L_r \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \quad (3.30)$$

$$v_{z1} = \frac{dz_1}{dt} = 0 \quad (3.31)$$

$$v_{x2} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t)}{2} - L_r \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) + \frac{L_p \cos(\alpha(t)) \sin(\theta(t)) \dot{\alpha}(t)}{2} \quad (3.32)$$

$$v_{y2} = \frac{dy_2}{dt} = L_r \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) + \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t)}{2} - \frac{L_p \cos(\alpha(t)) \cos(\theta(t)) \dot{\alpha}(t)}{2} \quad (3.33)$$

$$v_{z2} = \frac{dz_2}{dt} = \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \dot{\alpha}(t)}{2} \quad (3.34)$$

La energía cinética rotacional (T_r) es la suma de la componente del brazo giratorio(T_{r1}) y del péndulo(T_{r2}), están definidas como:

$$\begin{aligned} T_{r1} &= \frac{J_r \dot{\theta}(t)^2}{2} \\ T_{r2} &= \frac{J_p \dot{\alpha}(t)^2}{2} \\ T_r &= T_{r1} + T_{r2} \\ T_r &= \frac{J_r \dot{\theta}(t)^2 + J_p \dot{\alpha}(t)^2}{2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

La energía cinética traslacional solo existe en el eslabón del péndulo, por lo tanto se expresa como:

$$T_{t2} = \frac{M_p(v_{t2})^2}{2} \quad (3.36)$$

con:

$$v_{t2} = \sqrt{(v_{x2})^2 + (v_{y2})^2 + (v_{z2})^2} \quad (3.37)$$

por lo tanto reemplazando 3.32,3.33,3.34,3.37 en 3.36 :

$$\begin{aligned} T_{t2} = & M_p \left(\left(L_r \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) + \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t)}{2} - \frac{L_p \cos(\alpha(t)) \cos(\theta(t)) \dot{\alpha}(t)}{2} \right)^2 \right. \\ & + \left(\frac{L_p \sin(\alpha(t)) \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t)}{2} - L_r \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) + \frac{L_p \cos(\alpha(t)) \sin(\theta(t)) \dot{\alpha}(t)}{2} \right)^2 \\ & \left. + \frac{L_p^2 \sin(\alpha(t))^2 (\dot{\alpha}(t))^2}{4} \right) \quad (3.38) \end{aligned}$$

finalmente se tiene que la energía cinética total:

$$\begin{aligned} T = & T_r + T_{t2} \\ T = & \left(\frac{J_p}{2} + \frac{M_p \left(\frac{L_p^2 \sigma_3 \cos(\theta(t))^2}{4} + \frac{L_p^2 \sigma_3 \sin(\theta(t))^2}{4} + \frac{L_p^2 \sin(\alpha(t))^2}{4} \right)}{2} \right) (\dot{\alpha}(t))^2 \\ & + \left(-\frac{M_p (L_p \cos(\alpha(t)) \cos(\theta(t)) \sigma_2 + L_p \cos(\alpha(t)) \sin(\theta(t)) \sigma_1)}{2} \right) \dot{\alpha}(t) \dot{\theta}(t) \\ & + \left(\frac{J_r}{2} + \frac{M_p (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2} \right) (\dot{\theta}(t))^2 \quad (3.39) \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= L_r \sin(\theta(t)) - \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \cos(\theta(t))}{2} \\ \sigma_2 &= L_r \cos(\theta(t)) + \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \sin(\theta(t))}{2} \\ \sigma_3 &= \cos(\alpha(t))^2\end{aligned}$$

Obtenida la energía cinética total y la energía potencial total se calcula el Lagrangiano como:

$$L = T - V$$

$$\begin{aligned}L &= \left(\frac{J_r}{2} + \frac{M_p (\beta_1^2 + \beta_2^2)}{2} \right) (\dot{\theta}(t))^2 + \left(\frac{J_p}{2} + \frac{M_p \left(\frac{L_p^2 \beta_3 \cos(\theta(t))^2}{4} + \frac{L_p^2 \beta_3 \sin(\theta(t))^2}{4} + \frac{L_p^2 \sin(\alpha(t))^2}{4} \right)}{2} \right) (\dot{\alpha}(t))^2 \\ &\quad - \frac{M_p (L_p \cos(\alpha(t)) \cos(\theta(t)) \beta_2 + L_p \cos(\alpha(t)) \sin(\theta(t)) \beta_1) \theta(t) \dot{\alpha}(t)}{2} - \frac{L_p M_p g \cos(\alpha(t))}{2}\end{aligned}\tag{3.40}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= L_r \sin(\theta(t)) - \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \cos(\theta(t))}{2} \\ \beta_2 &= L_r \cos(\theta(t)) + \frac{L_p \sin(\alpha(t)) \sin(\theta(t))}{2} \\ \beta_3 &= \cos(\alpha(t))^2\end{aligned}$$

Y siguiendo la ecuación 3.20 se calculan cada una de las ecuaciones generalizadas que corresponden al modelo dinámico del sistema no-lineal:

$$\begin{aligned}\frac{L_p L_r M_p \sin(\alpha(t))}{2} (\dot{\alpha}(t))^2 + \left(-\frac{M_p L_p^2 \cos(\alpha(t))^2}{4} + \frac{M_p L_p^2}{4} + M_p L_r^2 + J_r \right) \ddot{\theta}(t) \\ \frac{L_p^2 M_p \sin(2\alpha(t))}{4} \alpha(t) \dot{\theta}(t) \left(-\frac{L_p L_r M_p \cos(\alpha(t))}{2} \right) \ddot{\alpha}(t) = \tau - B_r \dot{\theta}(t)\end{aligned}\tag{3.41}$$

$$\left(\frac{M_p L_p^2}{4} + J_p\right) \ddot{\alpha}(t) - \frac{L_p M_p g \sin(\alpha(t))}{2} - \frac{L_p L_r M_p \cos(\alpha(t)) \ddot{\theta}(t)}{2} - \frac{L_p^2 M_p \cos(\alpha(t)) \sin(\alpha(t)) (\dot{\theta}(t))^2}{4} = -B_p \dot{\alpha}(t) \quad (3.42)$$

con

$$\tau = \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (3.43)$$

3.2.2 Linealización

Los sistemas no lineales son aquellos en los cuales la evolución en el tiempo de sus estados depende de los valores de esas variables de manera no proporcional [Nicolis, 2011], dicho de otra manera, la no linealidad se da en sistemas que no cumplen con las propiedades de superposición ni homogeneidad; de las ecuaciones 3.41 y 3.42 podemos concluir que la dinámica que describe el comportamiento del péndulo invertido es no lineal, por lo tanto se procede a la linealización del modelo, ya que la estrategia de control propuesta así lo requiere, para esto se plantea la función linealizada para n variables como como:

$$f^* = f(z_0) + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z_1}\right)\Bigg|_{z=z_0} (z_1 - z_0(1)) + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z_2}\right)\Bigg|_{z=z_0} (z_2 - z_0(2)) + \dots + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z_n}\right)\Bigg|_{z=z_0} (z_n - z_0(n)) \quad (3.44)$$

Donde $z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]$ y cada elemento del vector z corresponde a una variable del sistema y z_0 son las condiciones iniciales para cada variable. Aplicando esta teoría sobre las

ecuaciones obtenidas en el capitulo anterior se tiene que:

$$z = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha} \quad \ddot{\theta} \quad \ddot{\alpha}]$$

$$z_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$f^* = f(z_0) + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\theta}} \right) \Big|_{z=z_0} \ddot{\theta} + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\alpha}} \right) \Big|_{z=z_0} \ddot{\alpha} + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \dot{\theta}} \right) \Big|_{z=z_0} \dot{\theta}$$

$$+ \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \dot{\alpha}} \right) \Big|_{z=z_0} \dot{\alpha} + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \theta} \right) \Big|_{z=z_0} \theta + \left(\frac{\partial f(z)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{z=z_0} \alpha$$

Para la ecuación generalizada que se muestra en 3.41, que corresponde a una de las dos ecuaciones no lineales que se obtuvieron:

$$f(z) = \frac{L_p L_r M_p \sin(\alpha(t))}{2} (\dot{\alpha}(t))^2 + \left(-\frac{M_p L_p^2 \cos(\alpha(t))^2}{4} + \frac{M_p L_p^2}{4} + M_p L_r^2 + J_r \right) \ddot{\theta}(t)$$

$$\frac{L_p^2 M_p \sin(2\alpha(t))}{4} \dot{\alpha}(t) \dot{\theta}(t) \left(-\frac{L_p L_r M_p \cos(\alpha(t))}{2} \right) \ddot{\alpha}(t)$$

La función linealizada por lo tanto es:

$$\tau - B_r \dot{\theta}(t) = (M_p L_r^2 + J_r) \ddot{\theta}(t) - \frac{L_p L_r M_p \ddot{\alpha}(t)}{2} \quad (3.45)$$

Y para la ecuación que se obtuvo en 3.42, que corresponde a la segunda ecuación no lineal del sistema:

$$f(z) = \left(\frac{M_p L_p^2}{4} + J_p \right) \ddot{\alpha}(t) - \frac{L_p M_p g \sin(\alpha(t))}{2} - \frac{L_p L_r M_p \cos(\alpha(t)) \ddot{\theta}(t)}{2}$$

$$- \frac{L_p^2 M_p \cos(\alpha(t)) \sin(\alpha(t)) (\dot{\theta}(t))^2}{4}$$

Linealizando se obtiene:

$$-B_p \dot{\alpha}(t) = \left(\frac{M_p L_p^2}{4} + J_p \right) \ddot{\alpha}(t) - \frac{L_p M_p g \alpha(t)}{2} - \frac{L_p L_r M_p \ddot{\theta}(t)}{2} \quad (3.46)$$

Agrupando ambas ecuaciones linealizadas en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} M_p L_r^2 + J_r & -\frac{L_p L_r M_p}{2} \\ -\frac{L_p L_r M_p}{2} & \frac{M_p L_p^2}{4} + J_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{L_p M_p g \alpha(t)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y despejando para $\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix}$ se tiene que:

$$\begin{bmatrix} M_p L_r^2 + J_r & -\frac{L_p L_r M_p}{2} \\ -\frac{L_p L_r M_p}{2} & \frac{M_p L_p^2}{4} + J_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau - B_r \dot{\theta}(t) \\ \frac{L_p M_p g \alpha(t)}{2} - B_p \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_p L_r^2 + J_r & -\frac{L_p L_r M_p}{2} \\ -\frac{L_p L_r M_p}{2} & \frac{M_p L_p^2}{4} + J_p \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} M_p L_p^2 + 4 J_p & 2 L_p L_r M_p \\ 2 L_p L_r M_p & 4 (M_p L_r^2 + J_r) \end{bmatrix}$$

$$\text{Donde } J_T = J_r M_p L_p^2 + 4 J_p M_p L_r^2 + 4 J_p J_r$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} M_p L_p^2 + 4 J_p & 2 L_p L_r M_p \\ 2 L_p L_r M_p & 4 (M_p L_r^2 + J_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau - B_r \dot{\theta}(t) \\ \frac{L_p M_p g \alpha(t)}{2} - B_p \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones matriciales para cada una de las variables se tiene que:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & (-2 B_p L_p L_r M_p) \dot{\alpha}(t) + (-B_r (M_p L_p^2 + 4 J_p)) \dot{\theta}(t) \\ & + \tau (M_p L_p^2 + 4 J_p) + L_p^2 L_r M_p^2 g \alpha(t) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = & (-B_p (M_p L_r^2 + J_r) 4) \dot{\alpha}(t) + (-B_r L_p L_r M_p 2) \dot{\theta}(t) \\ & + 2 L_p L_r M_p \tau + 2 L_p M_p g (M_p L_r^2 + J_r) \alpha(t) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Con las ecuaciones 3.47 y 3.48 finaliza el modelamiento del sistema de péndulo invertido, pero por cuestiones de practicidad a la hora del diseño del control se realiza una transformación a espacio de estados de la siguiente manera:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Donde x corresponde a los estados del sistema, u a la entrada, o entradas en su defecto y y corresponde a la salida del sistema, reemplazando estas variables con las variables que tenemos en el sistema se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + Bu$$

$$y = C \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

Finalmente reescribiendo 3.47 y 3.48 en forma de matriz se tiene que:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} &= \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & L_p^2 L_r M_p^2 g & -D_r (M_p L_p^2 + 4 J_p) & -2 D_p L_p L_r M_p \\ 0 & 2 L_p M_p g (M_p L_r^2 + J_r) & -2 D_r L_p L_r M_p & -4 D_p (M_p L_r^2 + J_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \\
&+ \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p L_p^2 + 4 J_p \\ 2 L_p L_r M_p \end{bmatrix} u \tag{3.49}
\end{aligned}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & L_p^2 L_r M_p^2 g & -D_r (M_p L_p^2 + 4 J_p) & -2 D_p L_p L_r M_p \\ 0 & 2 L_p M_p g (M_p L_r^2 + J_r) & -2 D_r L_p L_r M_p & -4 D_p (M_p L_r^2 + J_r) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$B = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p L_p^2 + 4 J_p \\ 2 L_p L_r M_p \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Los valores correspondientes para cada variable según el manual del INVERTED PENDU-
LUM de QUANSER se muestran en la siguiente tabla:

Parámetro	Símbolo	Valor
Masa del péndulo	M_p	0,127Kg
Longitud del péndulo	L_p	0,3302m
Momento de inercia del péndulo con respecto al centro de masa	J_p	0,0012Kg.m ²
Coefficiente de viscosidad en el eje del péndulo	B_p	0,0024 $\frac{N.m}{(\frac{rad}{s})}$
Longitud del brazo giratorio	L_r	0,216m
Eficiencia del tren de engranajes	η_g	0,90
Momento de inercia del rotor	J_m	3,90x10 ⁻⁷ Kg.m ²
Momento de inercia equivalente	J_{eqv}	2,087x10 ⁻³ Kg.m ²
Coefficiente de viscosidad equivalente	B_{eqv}	0,015 $\frac{N.m}{(\frac{rad}{s})}$

Tabla 2: Tabla de especificaciones del INVERTED PENDULUM

Sin embargo la ecuación planteada en 3.49 se encuentra incompleta; representa un sistema cuya entrada es el torque en el eje θ , mientras que la variable que se controlará es el voltaje sobre el motor (SRV02), para esto utilizamos la relación entre el torque y el voltaje de entrada

planteada en 3.43 y se reescriben las matrices A y B de la siguiente manera:

$$A_c = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_T \\ 0 & L_p^2 L_r M_p^2 g & -\left(M_p L_p^2 + 4 J_p\right) \left(D_r + \frac{K_g^2 k_t K_m}{R_m}\right) & -2 D_p L_p L_r M_p \\ 0 & 2 L_p M_p g (M_p L_r^2 + J_r) & -2 L_p L_r M_p \left(D_r + \frac{K_g^2 k_t K_m}{R_m}\right) & -4 D_p (M_p L_r^2 + J_r) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$B_c = \frac{K_g k_t}{J_T R_m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p L_p^2 + 4 J_p \\ 2 L_p L_r M_p \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Y reemplazando con los valores de las tablas 1 y 2 se obtiene que la matriz A y B que

representan el sistema dinámico en función de la entrada de voltaje del motor, son:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 80,3 & -45,8 & -0,93 \\ 0 & 122 & -44,1 & -1,4 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 83,4 \\ 80,3 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

3.3 Análisis del modelo matemático.

3.3.1 Autovalores y estabilidad

Un número real o complejo λ es considerado el autovalor de una matriz A de tamaño $n_x n$ si existe un vector x diferente de cero que cumpla con la igualdad $Ax = \lambda x$, cualquier vector x diferente de cero que satisfaga la igualdad mencionada es llamado un autovector de A asociado a un autovalor λ [Chen, 1998], siguiendo el planteamiento anterior, se calculan los autovalores de la siguiente manera:

$$\det(\lambda I - A_c) = 0 \quad (3.59)$$

Donde, solucionando para λ se obtienen los correspondientes autovalores:

$$0 = \left\| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 80,3 & -45,8 & -0,93 \\ 0 & 122 & -44,1 & -1,4 \end{bmatrix} \right\| \quad (3.60)$$

$$0 = \left\| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & -80,3 & \lambda + 45,8 & 0,93 \\ 0 & -122 & 44,1 & \lambda + 1,4 \end{bmatrix} \right\| \quad (3.61)$$

$$0 = \lambda^4 + 47,2\lambda^3 - 98,89\lambda^2 - 2046,37\lambda \quad (3.62)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0 & -48,36 & -5,94 & 7,11 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Los autovalores corresponden a los polos del sistema, por lo tanto se puede hacer un análisis de los valores del vector λ graficandolos en un plano real imaginario:

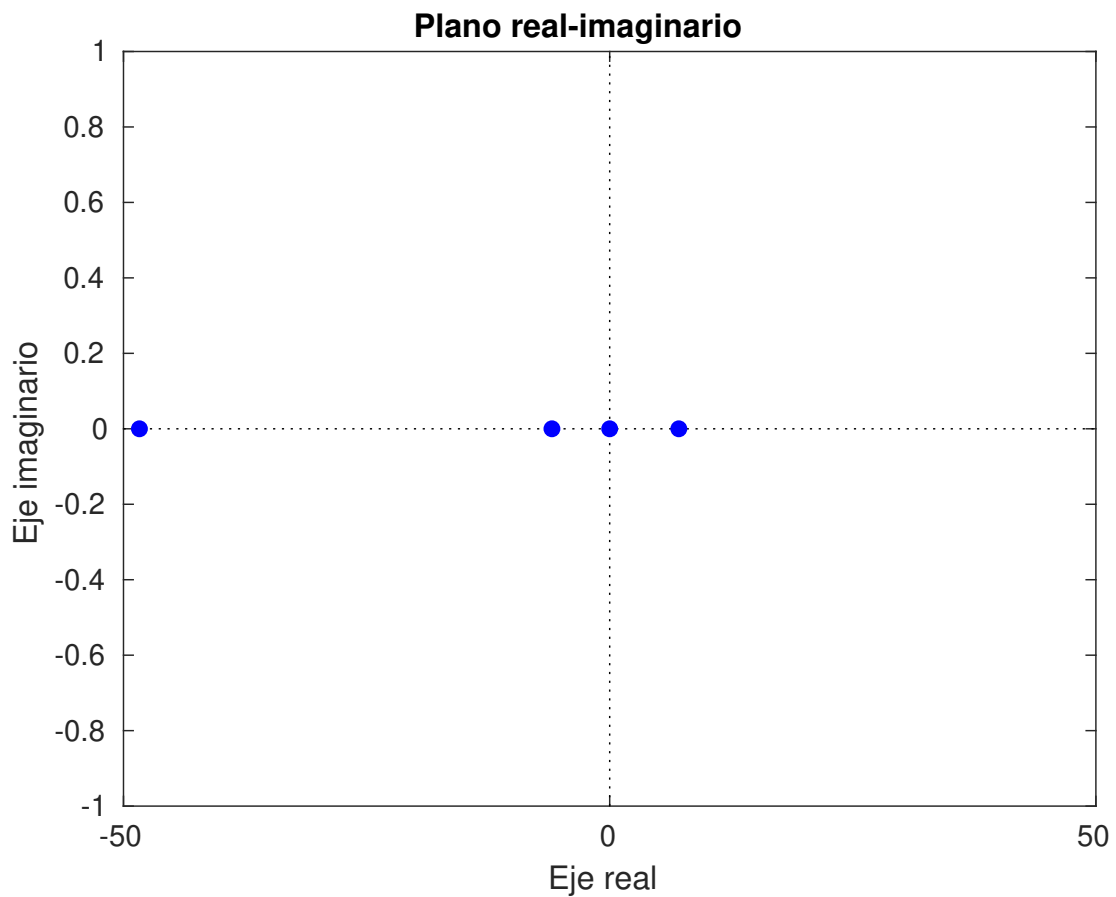


Figura 4: Grafica de los polos en el plano real-imaginario.

Los polos que se encuentran en la parte derecha del plano generan inestabilidad en el sistema, mientras que los que se encuentran en la parte izquierda del plano, representan la estabilidad del sistema y sus tiempos de respuesta, en este caso, como se tiene un polo en la parte derecha del plano real imaginario, se afirma que el sistema es inestable.

3.3.2 Controlabilidad y observabilidad

Cuando hablamos de controlabilidad nos referimos a la capacidad que tiene un sistema de desplazar sus polos ante una entrada u , siguiendo la definición planteada en [Nise, 2011], un sistema es controlable si ante unas condiciones iniciales, puede pasar de un estado inicial deseado a un estado final deseado, de lo contrario el sistema es no controlable. Siguiendo la teoría de la controlabilidad, se procede a realizar la prueba con la matriz de controlabilidad.

$$Ctrb = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Donde n corresponde al tamaño de la matriz A , retomando las matrices 3.56, 3.57, se tiene que la matriz de controlabilidad del sistema es:

$$Ctrb = \begin{bmatrix} 0 & 83,4 & -3894,4 & 0,188e^6 \\ 0 & 80,3 & -3790,3 & 0,186e^6 \\ 83,4 & -3894,4 & 0,188e^6 & -9,103e^6 \\ 80,3 & -3790,3 & 0,186e^6 & -9,029e^6 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Para que el sistema sea controlable el rango de la matriz de controlabilidad debe ser igual a n , por lo tanto el sistema es controlable ya que $rank(Ctrb) = 4$.

Cuando decimos que un sistema es observable nos referimos a que tiene la capacidad de reconstruir sus estados a partir de la salida del sistema, si alguna de las variables no repercute en la salida entonces esa variable no se puede reconstruir, por lo tanto el sistema es no

observable, para definir la observabilidad de un sistema, al igual que para la controlabilidad, se utiliza una matriz:

$$Obsv = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Reemplazando 3.56 y 3.58 en 3.66:

$$Obsv = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 122 & -44,1 & -1,4 \\ 0 & -3712,03 & 2081,52 & 164,97 \\ 0 & 0,187e^6 & -0,102e^6 & -5878,81 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

De igual manera, para que el sistema sea observable, el rango de la matriz *Obsv* debe ser igual a n , cosa que en este caso no sucede, el sistema como se plantea no es observable ya que $rank(Obsv) = 3$, esto se debe a que, de la manera en la que se esta considerando el modelo, solo se tiene en cuenta una salida, que corresponde al encoder que sensa la posición del péndulo, mientras que en el modelo real, el sistema tambien tiene como salida la posición del brazo giratorio, a los sistemas de esta naturaleza, que poseen una entrada y multiples salidas se les denominan en la literatura inglesa como “underactuated systems”.

4. Diseño e implementación del controlador MPC

En este capítulo se mostrará la metodología que se siguió para el diseño del controlador, y se desarrollaran los procedimientos matemáticos que surgen a partir del modelo dinámico descrito en el capítulo anterior; para el diseño del controlador MPC es indispensable tomar como base el modelo matemático en su forma de espacio de estados.

Como se mencionó en el capítulo 2 el diseño del controlador MPC se realizará utilizando un conjunto de funciones de lagurre, estas funciones de Laguerre representan la respuesta del sistema dinámico con una serie de coeficientes llamados coeficientes de Laguerre, es decir:

$$\Delta u(k_i + k) = L(k)^T \eta \quad (4.1)$$

Donde η corresponde al vector de coeficientes de Laguerre y $L(k)^T$ al vector de funciones de Laguerre definido en la sección 2.2.1, se optó por trabajar con las redes de Laguerre en vez del modelo clásico basado en la respuesta del sistema a la función pulso, debido a que al trabajar con Laguerre, se reduce el rango del horizonte de control, porque se necesitan menos parámetros para realizar el proceso de optimización .

Con la definición que se hizo en la ecuación 4.1 se replantea el modelo clásico de un controlador MPC, reemplazando el valor de Δu en las ecuaciones 2.9 y 2.10, esto se hace para proponer nuevamente el problema de optimización, pero esta vez considerando las redes de Laguerre. Reemplazando entonces para la predicción de los estados se tiene que:

$$x(k_i + m|k_i) = A^m x(k_i) + \sum_{i=0}^{m-1} A^{m-i-1} B L(i)^T \eta \quad (4.2)$$

Y para la salida:

$$y(k_i + m|k_i) = CA^m x(k_i) + \sum_{i=0}^{m-1} CA^{m-i-1} BL(i)^T \eta \quad (4.3)$$

De esta manera la predicción de los estados futuros y de la salida del sistema se expresan en función de η por lo tanto se plantea una nueva función de costo que se resolverá para η .

Para definir la función de costo del problema de optimización retomamos la fórmula 2.12 que se planteó en el capítulo 2:

$$J = \sum_{m=1}^{N_p} (r(k_i) - y(k_i + m|k_i))^T (r(k_i) - y(k_i + m|k_i)) + \eta^T R_L \eta, \quad (4.4)$$

Y simplificando:

$$J = \sum_{m=1}^{N_p} x(k_i + m|k_i)^T Q x(k_i + m|k_i) + \eta^T R_L \eta, \quad (4.5)$$

Donde $Q = C^T C$ y R_L es una matriz de pesos mayor a 0.

Reemplazando en 4.5 el valor de $x(k_i + m|k_i)$ que se obtuvo en 4.2:

$$\begin{aligned} J = & \eta^T \left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q \phi(m)^T + R_L \right) \eta \\ & + 2\eta^T \left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q A^m \right) x(k_i) + \sum_{m=1}^{N_p} x(k_i)^T (A^T)^m Q A^m x(k_i) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Donde:

$$\phi(m)^T = \sum_{i=0}^{m-1} A^{m-i-1} BL(i)^T \quad (4.7)$$

Ahora se prosigue a la minimización de esta función para η , ya que al utilizar las redes de Laguerre en el diseño del controlador, la entrada del sistema se encuentra implícita en los coeficientes de Laguerre. Sabemos por la teoría del cálculo variacional, que para hallar el

óptimo del funcional se debe calcular la primera derivada e igualar a cero, siguiendo esto se tiene que:

$$\frac{\partial J}{\partial \eta} = 2\left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m)Q\phi(m)^T + R_L\right)\eta + 2\left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m)QA^m\right)x(k_i) \quad (4.8)$$

igualando $\frac{\partial J}{\partial \eta}$ a 0 se tiene que el valor óptimo para η es:

$$\eta = -\left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m)Q\phi(m)^T + R_L\right)^{-1}\left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m)QA^m\right)x(k_i) \quad (4.9)$$

Por lo tanto definimos:

$$\Omega = \left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m)Q\phi(m)^T + R_L\right) \quad (4.10)$$

$$\Psi = \left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m)QA^m\right) \quad (4.11)$$

Por lo tanto

$$\eta = -\Omega^{-1}\Psi x(k_i) \quad (4.12)$$

La ecuación 4.12 contiene la entrada optima para el sistema, por lo tanto el objetivo del controlador es calcular el valor de η en cada instante de tiempo.

Los parámetros que se seleccionaron para el diseño del controlador se evidencian en la siguiente tabla:

Parámetro	Símbolo	Valor
Coefficiente de Laguerre	a	0,8
Numero de terminos de Laguerre	N	10
Horizonte de control	N_c	4

Tabla 3: Parámetros utilizados para el diseño del controlador.

Una vez concluida la metodología de diseño se realizaron simulaciones en MATLAB para verificar el funcionamiento de la estrategia de control, el siguiente pseudocódigo muestra la simulación de la estrategia de control MPC:

Algorithm 1: Simulación del controlador MPC con redes de Laguerre.

$A_d, B_d, C_d, D_d \leftarrow$ Definir espacio de estados en el dominio discreto;

$a, N_c, N_p \leftarrow$ Coeficiente de Laguerre, horizonte de control y de predicción;

$A_e, B_e, C_e, D_e = ss_augmented(A_d, B_d, C_d, D_d) \leftarrow$ Espacio aumentado;

$Q, R_L \leftarrow$ Definición de las matrices de pesos;

$\Omega, \Psi = Laguerre_mpc(A_e, B_e, a, N, N_p, Q, R_L) \leftarrow$ Calculo de la ley de control;

$L0 \leftarrow$ Calculo de las condiciones iniciales de Laguerre;

for $t = 1 : t_f$ **do**

$\eta = \Omega^{-1} \Psi X_e$;

$\Delta u = L0 * \eta$;

$u = u + \Delta u$;

$X_d, Y_d \leftarrow$ Simulación de la planta en espacio de estados discreto;

$X_e = concatenar(\Delta X_d, Y_d)$;

Guardar los estados anteriores;

end for

Este procedimiento se realizó para dos frecuencias de muestreo distintas, a $100Hz$ y a $1000Hz$, esto con la finalidad de determinar si la velocidad de reacción del sistema, soportaba frecuencias altas de muestreo. A continuación, se muestran los resultados obtenidos en la simulación para $100Hz$ y $1000Hz$ respectivamente:

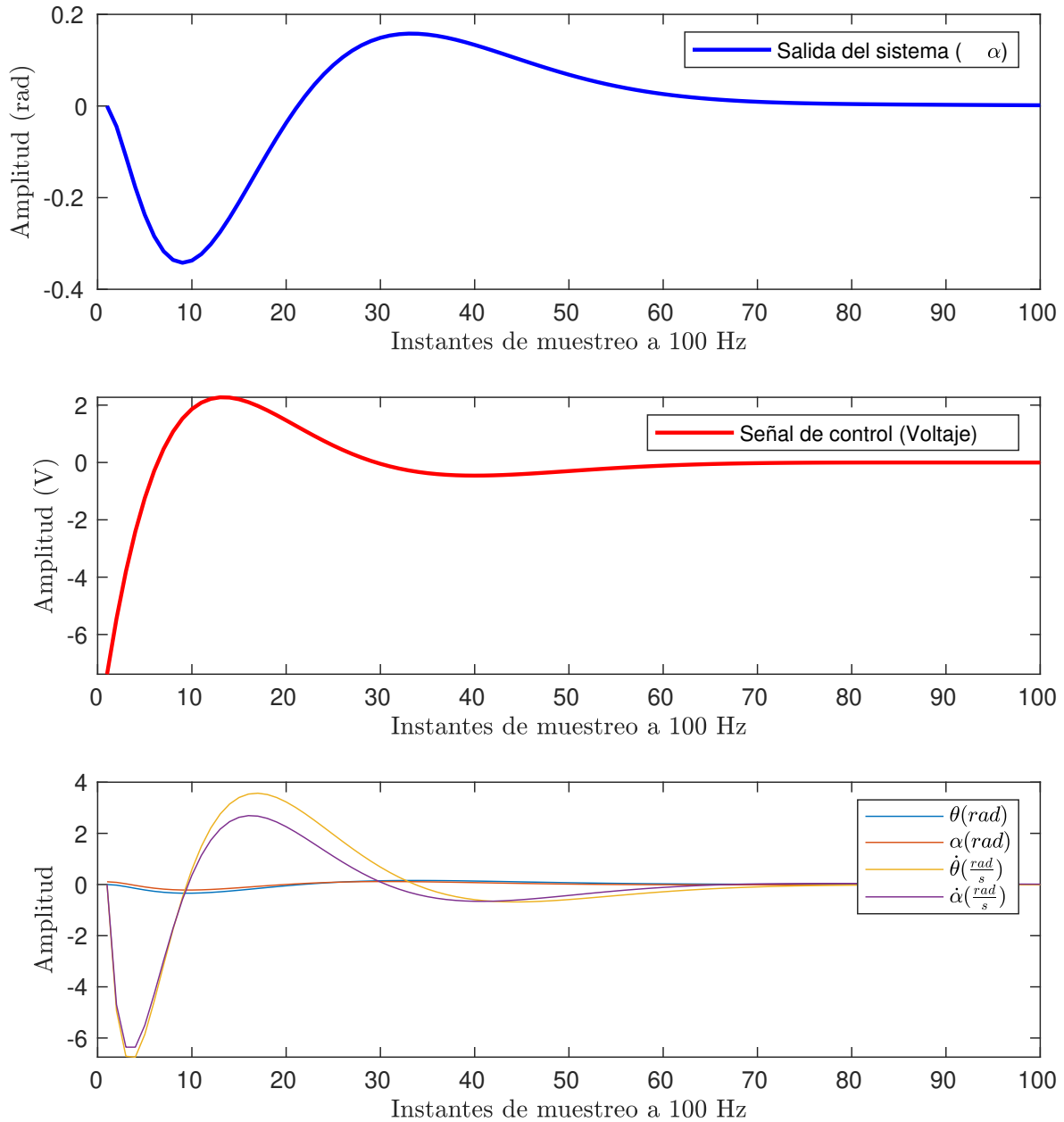


Figura 5: Graficas del comportamiento del sistema a 100Hz.

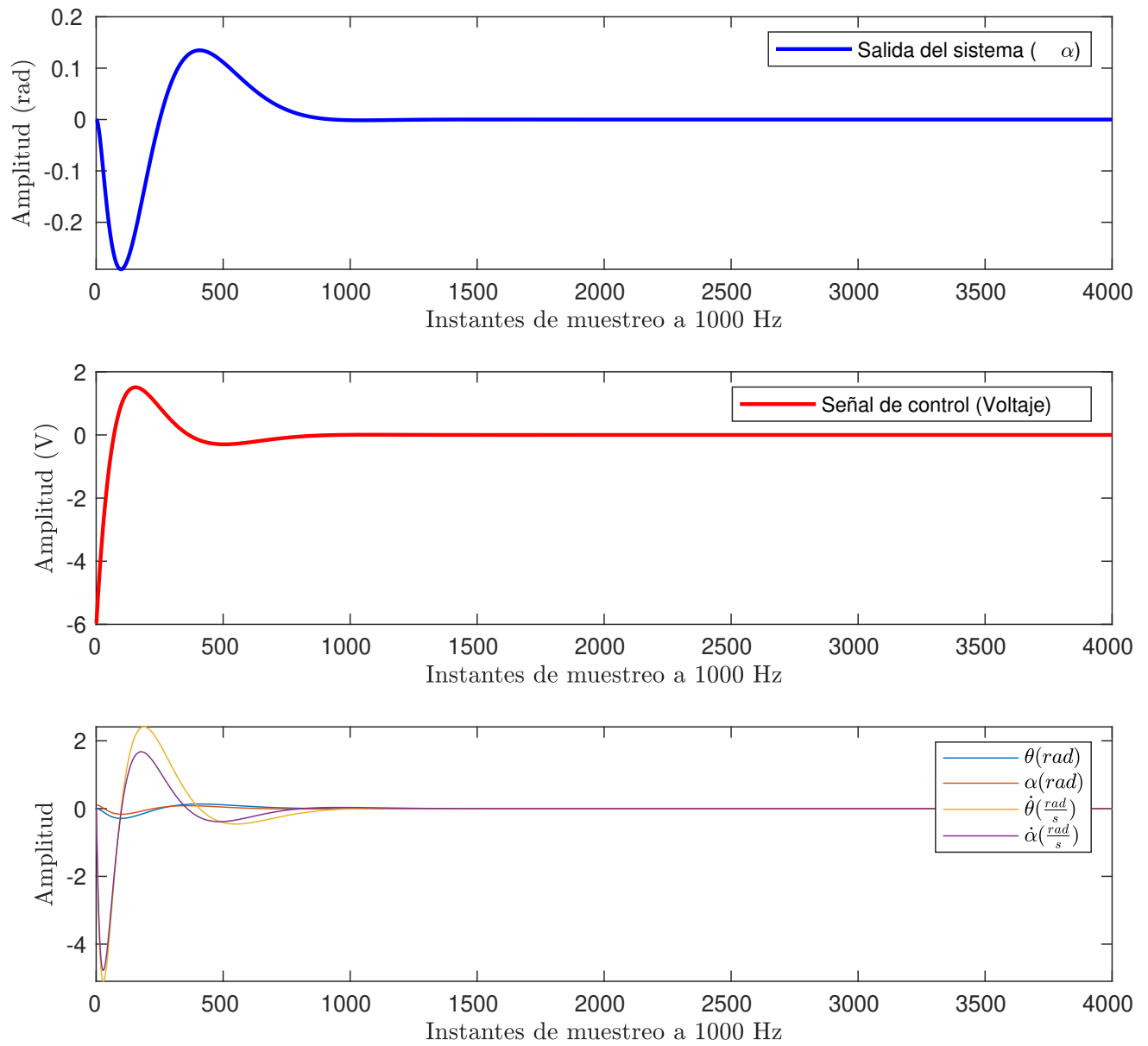


Figura 6: Graficas del comportamiento del sistema a 1000Hz.

Una vez se lograron resultados favorables en la simulación, se prosiguió con la implementación del controlador en la plataforma de QUANSER, para seleccionar la frecuencia de muestreo a la que se implementó, se realizaron pruebas a las mismas frecuencias que se mencionaron anteriormente, no se determinó cual es la frecuencia de muestreo del controlador por que el hardware que se utilizó facilitaba trabajar con una frecuencia de muestreo fijo, la plataforma QUANSER cuenta con integración directa entre MATLAB y SIMULINK; debido a que la estrategia de control requiere un tiempo de muestreo fijo, se optó por implementar el desarrollo del controlador en código de MATLAB, a continuación se muestra un pseudocódigo correspondiente al controlador embebido en el hardware de QUANSER:

Algorithm 2: Implementación del controlador en el hardware de QUANSER.

#Definiciones de hardware, tipo de tarjeta de adquisición y frecuencia de muestreo;

$\theta, \alpha \leftarrow$ Lectura inicial de los encoders en el brazo giratorio y en el péndulo;

$\dot{\theta}, \dot{\alpha} \leftarrow$ Calculo de la velocidades angulares iniciales;

$A_d, B_d, C_d, D_d \leftarrow$ Definir espacio de estados en el dominio discreto;

$a, N_c, N_p \leftarrow$ Coeficiente de Laguerre, horizonte de control y de predicción;

$A_e, B_e, C_e, D_e = ss_augmented(A_d, B_d, C_d, D_d) \leftarrow$ Espacio aumentado;

$Q, R_L \leftarrow$ Definición de las matrices de pesos;

$\Omega, \Psi = Laguerre_mpc(A_e, B_e, a, N, N_p, Q, R_L) \leftarrow$ Calculo de la ley de control;

$L0 \leftarrow$ Calculo de las condiciones iniciales de Laguerre;

while true do

$X_{dant}, X_{eant}, u_{ant} \leftarrow$

 guardar el estado anterior de los encoders y la entrada de control;

$\eta = \Omega^{-1} \Psi X_e \leftarrow$ calculo de la ;

$\Delta u = L0 * \eta;$

$u = u + \Delta u;$

$X_d, Y_d \leftarrow$ Lectura de los encoders en el instante actual;

$X_e = concatenar(\Delta X_d, Y_d);$

 Guardar los estados anteriores;

end while

a diferencia de lo que el fabricante propone, que es el trabajo directo desde la herramienta de SIMULINK; en la siguiente figura se muestra un esquema a nivel de hardware de la implementación:



Figura 7: Esquema del hardware utilizado para la implementación.

Una vez implementado el sistema que se muestra en el esquema anterior, se prosigue a embeber el código del controlador en la tarjeta de adquisición de QUANSER y realizar pruebas de funcionamiento sobre el sistema, primero se realizaron pruebas con la estrategia de control MPC clásica, cuyo diagrama se muestra en la siguiente figura:

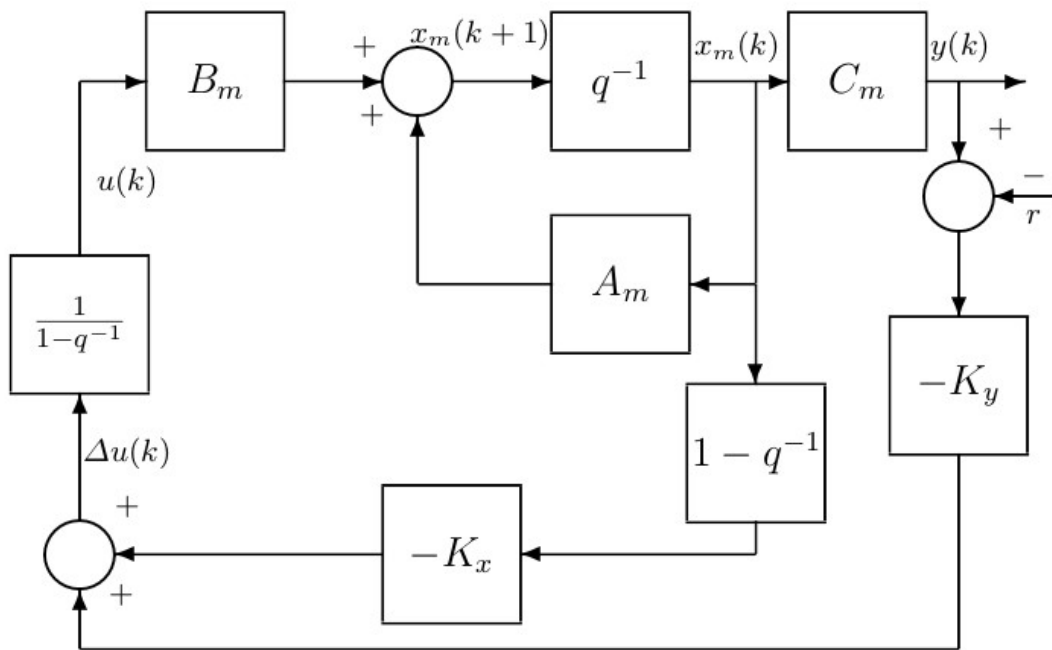


Figura 8: Diagrama de un controlador MPC clásico.

TOMADO DE: [Wang, 2009]

Pero los resultados mostraron que la estrategia de control no logró una corrección efectiva de la posición del péndulo, por esta razón fue que se decidió utilizar las redes discretas de Laguerre en el diseño de la estrategia de control. A continuación se muestran los resultados obtenidos en la implementación, cuando se utilizan las redes de Laguerre:

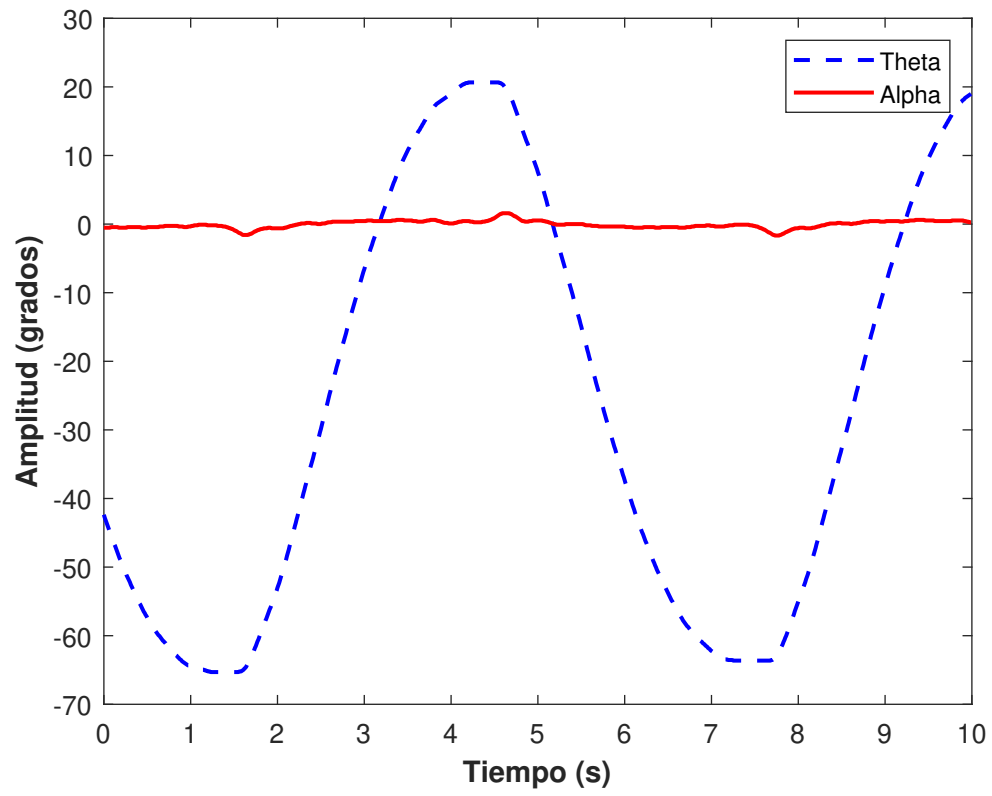


Figura 9: Resultados del controlador implementado en la planta para las posiciones angulares.

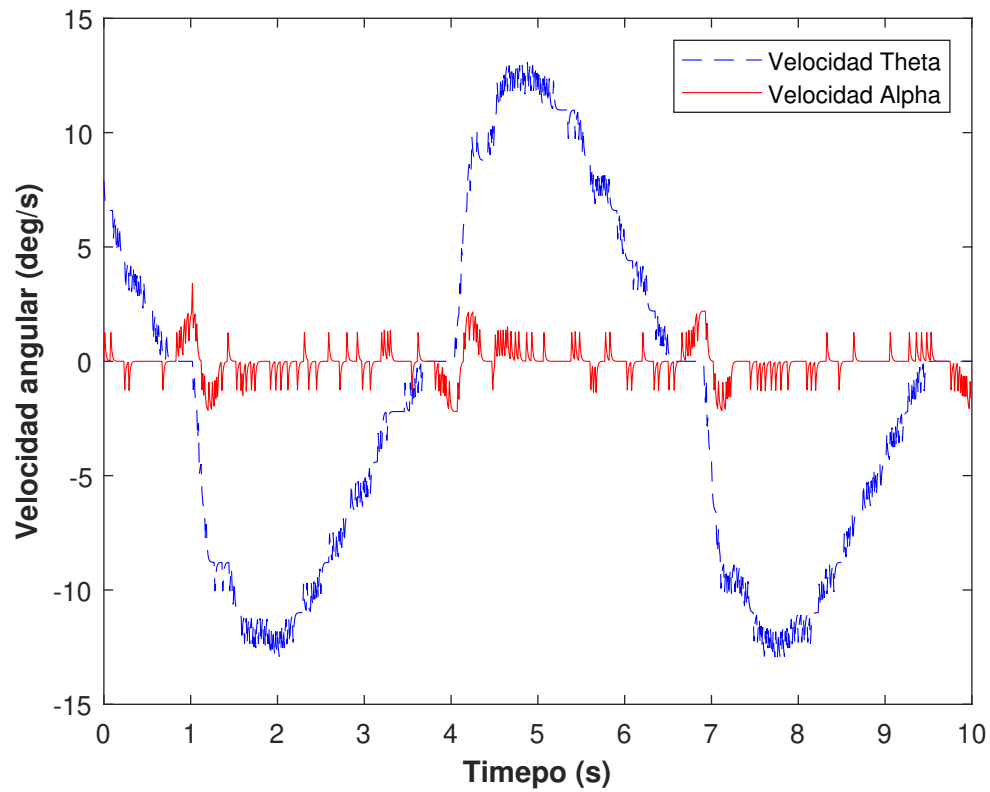


Figura 10: Resultados del controlador implementado en la planta para las velocidades angulares.

Como se puede observar la variable que se desea estabilizar, que es α , tiene valores muy cercanos a cero, por lo que se concluye que la estrategia de control logra la estabilización del sistema. La señal de control del voltaje que se aplico sobre el motor para obtener estos resultados se muestra a continuación:

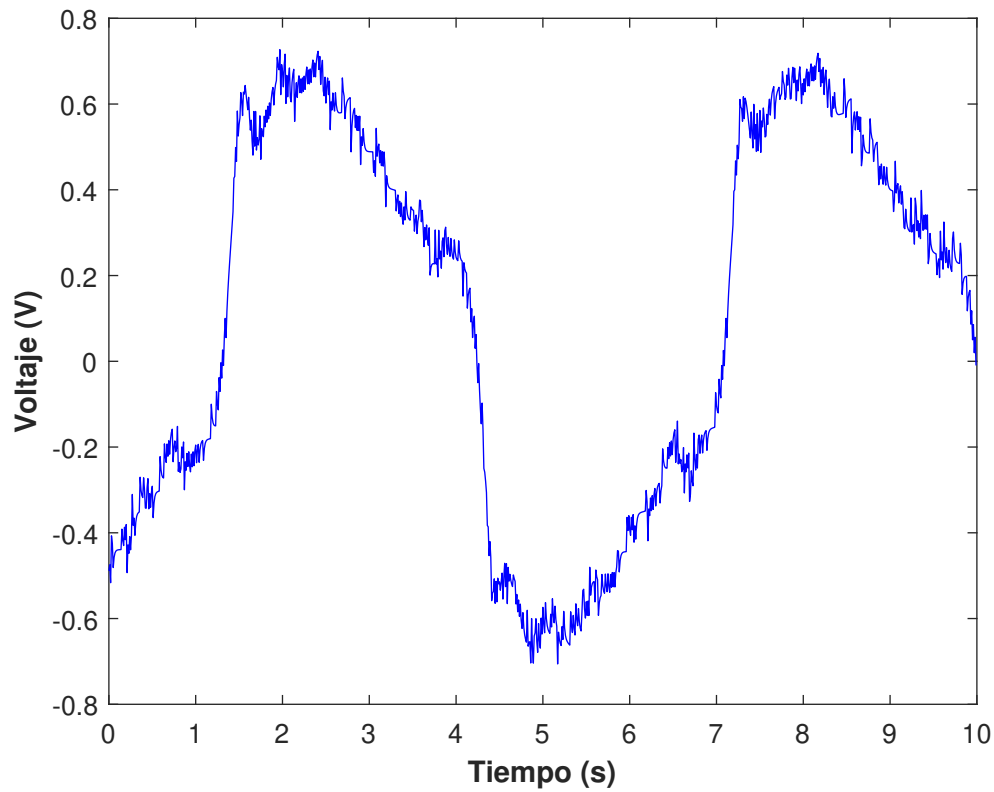


Figura 11: Señal de la entrada de voltaje sobre el motor del péndulo invertido.

Por la naturaleza del sistema se puede apreciar que tanto el comportamiento de las variables de estado junto con la señal de control son oscilatorias.

4.1 Validación del controlador MPC

Para la validación del controlador, se sometió el sistema a perturbaciones de operación, como se había establecido, se utilizó una señal de perturbación de tipo sinusoidal, esto con la finalidad de simular un terreno de cultivo; por lo general las irregularidades en un terreno se

dan en distancias iguales, si consideramos estas distancias sobre un terreno de cierto tamaño, se obtiene que una señal sinusoidal podría representar la inclinación del terreno, adicional se hicieron pruebas con una señal de ruido totalmente aleatoria, para terrenos no homogéneos. A continuación se muestran respectivamente, las señales de ruido con la variable a controlar (α) y la entrada de voltaje para esa perturbación.

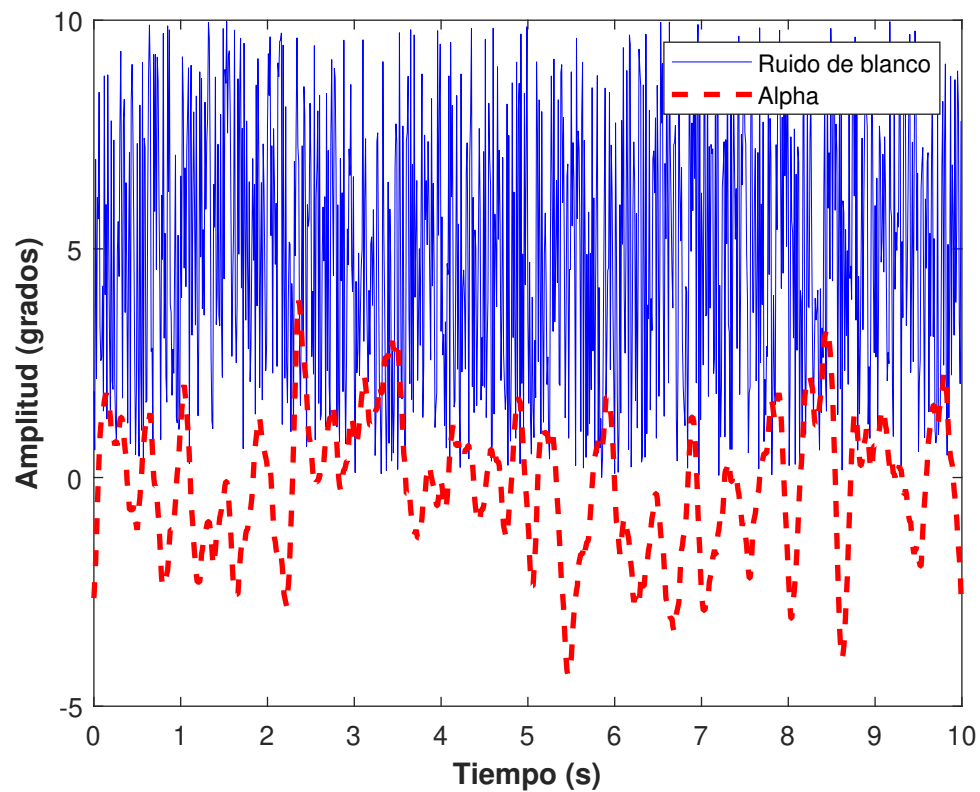


Figura 12: Señal de ruido blanco utilizada como perturbación.

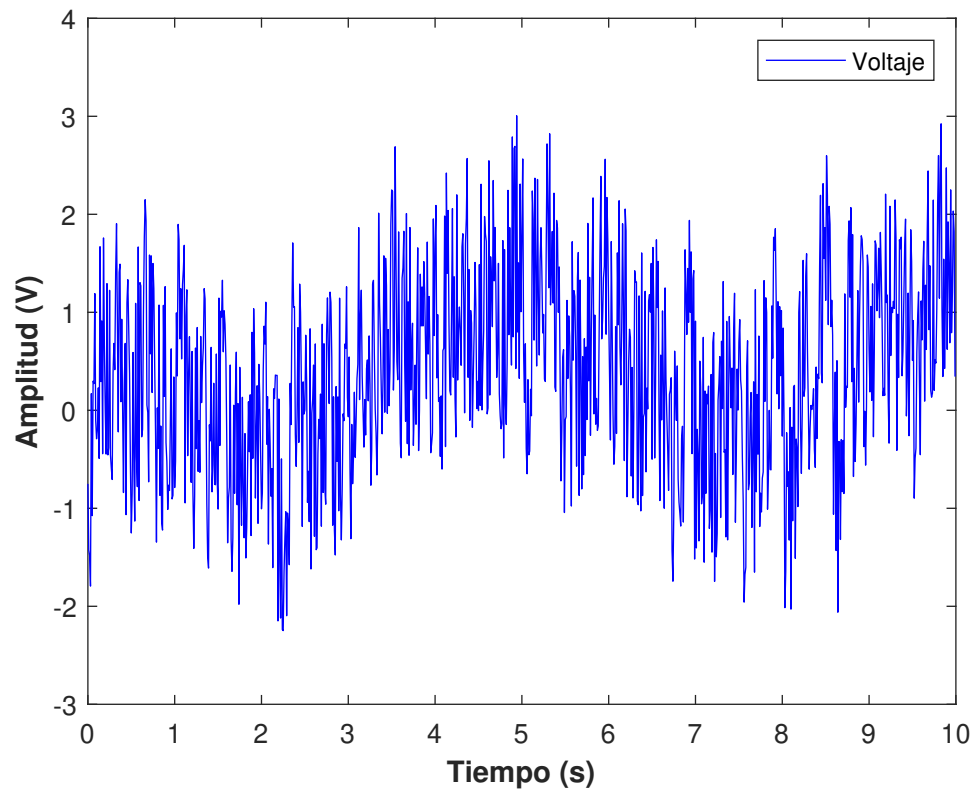


Figura 13: Señal voltaje como entrada al motor, ante la perturbación.

Ademas de la perturbación como ruido blanco, se perturbo el sistema con dos señales sinusoidales de diferentes amplitudes, a continuación se muestran los resultados de menor a mayor magnitud respectivamente:

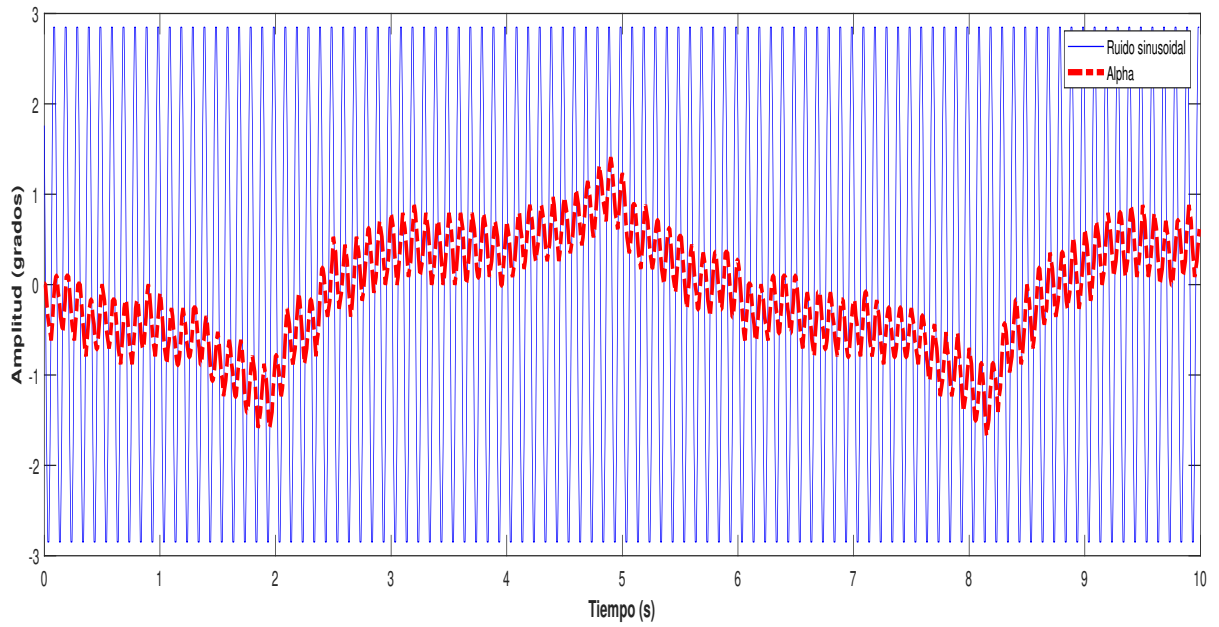


Figura 14: Señal de ruido sinusoidal utilizada como perturbación.

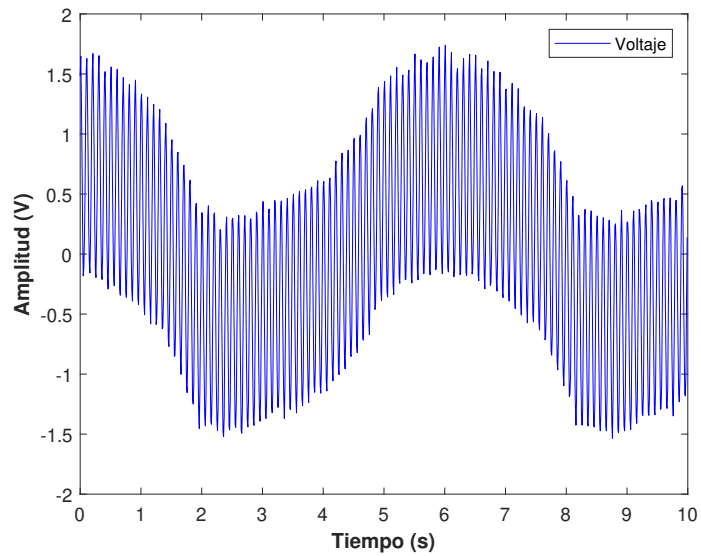


Figura 15: Señal voltaje como entrada al motor, ante la perturbación.

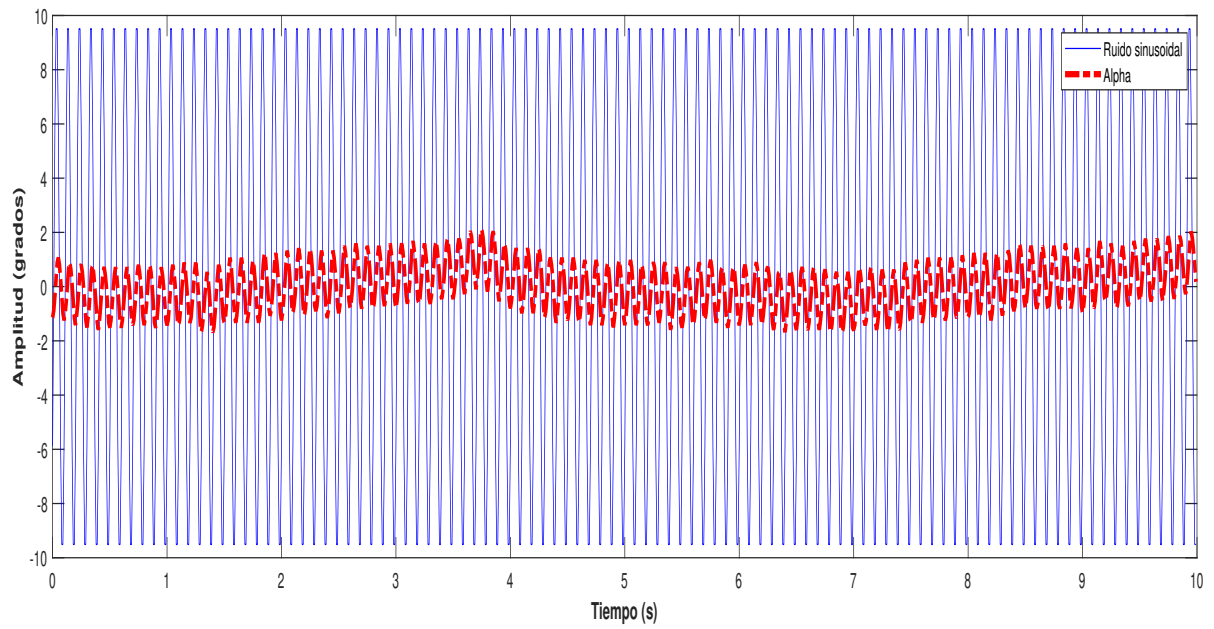


Figura 16: Señal voltaje como entrada al motor, ante la perturbación.

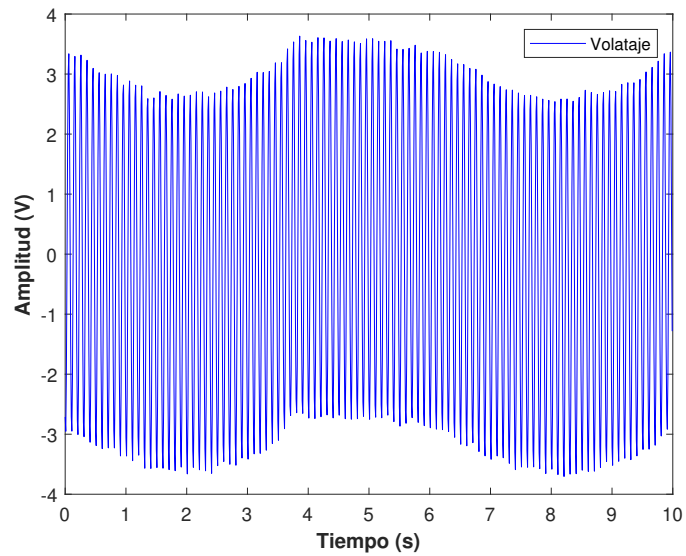
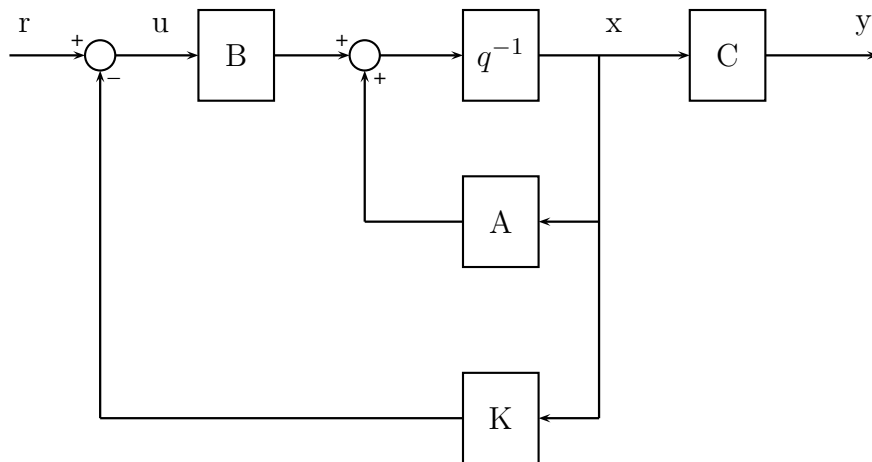


Figura 17: Señal voltaje como entrada al motor, ante la perturbación.

La manera en la que se utilizaron estas señales como perturbación fue sumando el valor de la señal de ruido al estado que corresponde al ángulo del péndulo; como se describió en capítulos anteriores, este sistema está compuesto por cuatro variables de estado, la variable que se perturbó fue α .

Como se puede observar en las figuras 12,14, 16, los resultados del controlador ante las perturbación muestran robustez ante el ruido, ya que el error en estado estable se mantiene en un rango admisible para este sistema, y ante operación continua el controlador es capaz de corregir ese ruido.

Con la finalidad de realizar una comparación de resultados, también se implementó sobre la planta un controlador por realimentación de estados clásico, a continuación se muestra el esquema de esta estrategia, y los resultados obtenidos respectivamente:



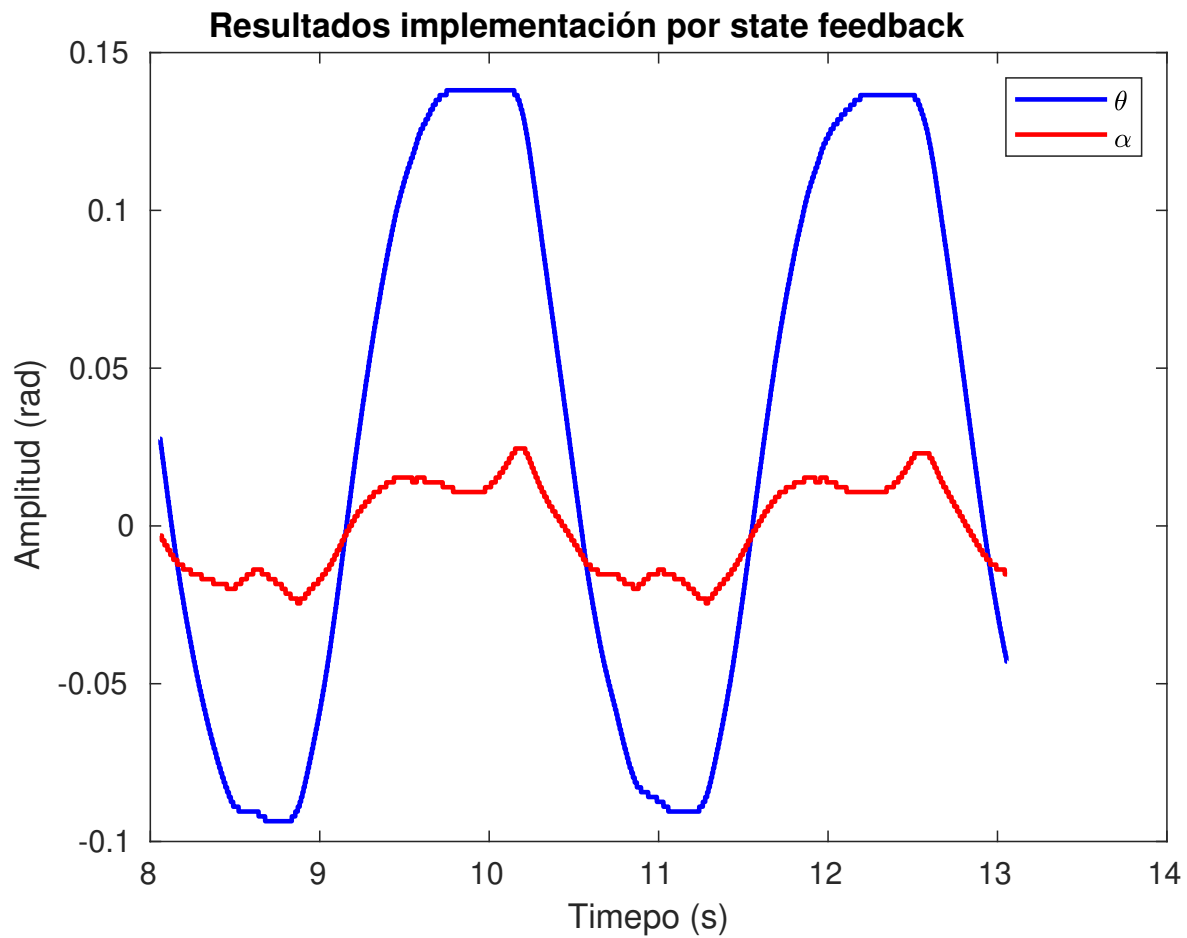


Figura 18: Resultados del controlador por state feedback.

Como se puede observar en los resultados, para la estrategia de control por realimentación de estados, los resultados para la variable θ son mejores, pero se puede evidenciar que los resultados que se obtienen para α no son tan satisfactorios como la estrategia de control MPC, a pesar de satisfacer con la estabilización del péndulo, cuando se hace un comparativo matemático entre los resultados se aprecia que la estrategia de control MPC demuestra

mejores resultados en cuanto a la estabilización de la variable a controlar.

5. Conclusiones

En este proyecto se desarrolló una estrategia de control predictivo basado en el modelo, para una plataforma pendular, mas específicamente , el ROTATORY INVERTED PENDULUM de QUANSER. El controlador demostró ser capaz de corregir la posición angular en el péndulo, incluso cuando se añaden perturbaciones externas de operación, sin embargo, se presenciaron dos detalles con respecto a la ley de control, el primero es con respecto al brazo del dispositivo, ya que presenta un rango de oscilación bastante alta, para corregir este efecto se sugiere por parte de diversos autores la implementación de un lazo de control independiente sobre esta variable y el segundo es que una vez desarrollada la propuesta, se determinó que esta no es la estrategia de control mas adecuada para sistemas de naturaleza oscilatoria, se concluye por lo tanto con respecto al sistema, que, no solo es importante seleccionar una estrategia de control que posea características de robustez, sino que cuando se habla de teoria de control es importante saber que tipo de controlador se ajusta mejor a las dinamicas que representa el sistema, en este caso, la estrategia de control predictivo basado en el modelo (MPC), demuestra no ser la mas adecuada para este tipo de sistemas por tratarse de un "underactuated system"; pero aún asi por la robustez de la estrategia, y la rigurosidad matemática en la que se basa los resultados que se obtuvieron son mejores que una estrategia de control clásica. De manera mas especifica se infiere del desarrollo del proyecto, que para la implementación de esta estrategia se requiere un costo computacional elevado, lo que dificulta la implementación de un controlador MPC clásico para sistemas complejos; esta

problemática se resuelve efectivamente utilizando la variación de esta estrategia en donde se utilizan las redes de Laguerre.

Referencias

- [Arevalo-Castiblanco et al., 2017] Arevalo-Castiblanco, M. F., Rodriguez-Garavito, C. H., and Patino-Forero, A. A. (2017). Identification of a non-linear model type inverted rotary pendulum. In *2017 IEEE 3rd Colombian Conference on Automatic Control (CCAC)*. IEEE.
- [Back and Lee, 2016] Back, S. and Lee, S.-G. (2016). Modeling and control system design of a ball segway. In *2016 16th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*. IEEE.
- [Chen, 1998] Chen, C.-T. (1998). *Linear System Theory and Design (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering)*. Oxford University Press.
- [Ferrara et al., 2014] Ferrara, A., Sacone, S., and Siri, S. (2014). Distributed model predictive control for MLD systems: Application to freeway ramp metering. In *2014 American Control Conference*. IEEE.
- [Fraleigh and Beauregard, 1995] Fraleigh, J. B. and Beauregard, R. A. (1995). *Linear Algebra, Third Edition*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [Holkar and Waghmare, 2010] Holkar, K. and Waghmare, L. (2010). Discrete model predictive control for. Institution of Engineering and Technology.

- [Kuo, 1997] Kuo, B. C. (1997). *Sistemas de Control Automatico - 7b: Edicion (Spanish Edition)*. Prentice Hall.
- [Nawawi, 2006] Nawawi, S. (2006). Control of two-wheels inverted pendulum mobile robot using full order sliding mode control.
- [Nicolis, 2011] Nicolis, G. (2011). NON-LINEAR SYSTEMS. In *A-to-Z Guide to Thermodynamics, Heat and Mass Transfer, and Fluids Engineering*. Begellhouse.
- [Nise, 2011] Nise, N. (2011). *Control systems engineering*. Wiley, Hoboken, NJ.
- [Pousti and Bodur, 2008] Pousti, A. and Bodur, M. (2008). Kinematics and dynamics of a wheeled mobile inverted pendulum. In *2008 International Conference on Computational Intelligence for Modelling Control & Automation*. IEEE.
- [Seman et al., 2013] Seman, P., Rohal'-Ilkiv, B., Juh´as, M., and Salaj, M. (2013). Swinging up the furuta pendulum and its stabilization via model predictive control. *Journal of Electrical Engineering*, 64(3):152–158.
- [Villarreal et al., 2018] Villarreal, O. J. G., Rossiter, J. A., and Shin, H. (2018). Laguerre-based adaptive mpc for attitude stabilization of quad-rotor. IEEE.
- [Wahlberg, 1991] Wahlberg, B. (1991). System identification using laguerre models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(5):551–562.

- [Wahyudi, 2010] Wahyudi, S. (2010). Real-time control system for a two-wheeled inverted pendulum mobile robot. In *Advanced Knowledge Application in Practice*. Sciyo.
- [Wang, 2001] Wang, L. (2001). Discrete time model predictive control design using laguerre functions. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference. (Cat. No.01CH37148)*. IEEE.
- [Wang, 2009] Wang, L. (2009). *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB® (Advances in Industrial Control)*. Springer.
- [Wang et al., 2014] Wang, Y., Cong, W., Li, M., Li, N., Cao, M., and Lei, W. (2014). Model predictive control of modular multilevel converter with reduced computational load. In *2014 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition - APEC 2014*. IEEE.