Universidad de La Salle
Ciencia Unisalle

Licenciatura en Español y Lenguas Extranjeras | Facultad de Ciencias de la Educación

1-1-1974

L'Enfant a la decouverte de L'espace

Mariela Leaño
Universidad de La Salle, Bogotá

Follow this and additional works at: https://ciencia.lasalle.edu.co/lic_lenguas

Citación recomendada
Leaño, M. (1974). L'Enfant a la decouverte de L'espace. Retrieved from https://ciencia.lasalle.edu.co/lic_lenguas/1315

This Trabajo de grado - Pregrado is brought to you for free and open access by the Facultad de Ciencias de la Educación at Ciencia Unisalle. It has been accepted for inclusion in Licenciatura en Español y Lenguas Extranjeras by an authorized administrator of Ciencia Unisalle. For more information, please contact ciencia@lasalle.edu.co.

+
2374
L437e

$3.000=

NI LA UNIVERSIDAD NI EL JURADO DE GRADO SON RESPONSABLES DE LAS IDEAS EXPUESTAS POR EL GRADUANDO.

COLECCION "E 3"

Dirigido por Bernard PLANQUE

con la colaboración de un comite compuesto por: Anne-Marie COUTROT, redactora y jefe de la escuela de padres y educadores; Robert GLOTON, inspector departamental de la Educación nacional; Jean HASSENFORDER, doctor en pedagogía; Joseph MAJAULT, director adjunto del instituto nacional de investigación y de documentación pedagógicas (I. N. R. D. P.); Jean SAINCLAIR, del centro de estudios pedagógicos.

La formación de nuestros niños y nuestros adolescentes es la obra común de profesores y padres y, de una manera general, de todos los educadores. Facilitar su acercamiento llevandoles el bagage indispensable de conocimientos recientes necesarios para una mejor colaboración, tal es el propósito de la colección " E 3", cuyas obras todas inéditas, abordan cada problema con la triple perspectiva de un mejor conocimiento del niño, de medios para poner en obra, para devolver la enseñanza mejor adaptada y más eficaz, de una educación, en fin, que les ofrece la probabilidad de un pleno desarrollo.

DE LA MISMA COLECCION

1. Léna POUGATCH-ZALCMAN, Les enfants de Vilna. Une expérience pédagogique.
2. Pierre DEBRAY-RITZEN, L'Ecolier. Sa santé. Son éducation.
3. Nicole PICARD, Mathématique et jeux d'enfants.
4. Gérard MAHEC, Pédiatrie a l'usage des parents.
5. Christian CORNE et Francois ROBINEAU, Les mathématiques nouvelles dans votre vie quotidienne.

l'enfant

a la découverte

de l'espace

DE LA MISMA COLECCION

(continuación)

6. Pierre DEBRAY-RITZEN et Badrig MELEKIAN, La Dyslexie de l'enfant.
7. Francis DAUGUET, Le Loisir.
8. Yves DEFORGE, L'Education technologique.
9. Georges MESMIN, L'Enfant, l'architecture et l'espace.
10. Guy BARBEY, L'Enseignement assisté par ordinateur.
11. Bernard PLANQUE, Audio-Visuel et enseignement.
12. Madeleine GAGNARD, L' Initiation musicale des jeunes.
13. Jean-philippe BOURET et Philippe PLANQUE, Guide juridique de l'enfance et de la adolescence.
14. Paulette LEQUEUX-GROMAIRE, Votre enfant et L'école maternelle.
15. Robert GLOTON et Claude CLERO, L'Activité creatrice chez - l'enfant.
16. Jean VEDRINE, Les Parents, l'école.
17. André REFFESTIN, De l'orientation a l'éducation permanente
18. Jeanne BANDER et Rëjane SARAZANAS, L'enfant et les jouets.
19. René LA BORDERIE, Les images dans la societé et l'education.
20. Henri HOULMANN, Les langues vivantes.
21. Janine DESPINETTE, Enfants d'aujourd'hui, livres d'aujour-D'hui.
22. Jean et Simonne SAUVY, L'Enfant a la découverte de l'espace De la marelle aux labyrinthes : initiation a la topologie intuitive.

André DEHANT et Arthur GILLE, Votre enfant apprend a lire.
Jean HASSENFORDER, L'Innovation dans l'enseignement.
Georges BELBENOIT, Le Sport a l'école.

22 L' ENFANT

A LA DECOUVERTE

DE L' ESPACE

De la Marelle aux Labyrinthes:

Initiation a la Topologie Intuitive

par Jean Sauvy, ingénieur
et Simonne Sauvy, psicho-pédagogue

Préface de Pierre Samuel

Casterman

PREFACIO

Tuve mucho placer e interés al leer el manuscrito del buen libro de Simonne y Jean Sauvy. Hay muchas razones para ello.

Primero, en una época donde la ciencia toma con demasiada frecuencia un aspecto de magia negra donde el simple ciudadano, se imagina que tiene que estar muy avanzado en los estudios universitarios especializados para saber esto que recuerdan las palabras como "álgebra abstracta", "topología" o "investigación operacional", -es reconfortable ver que los principios de estas cuestiones pueden ser despojadas de todo misterio. Además este libro deja entrever una importante verdad: el trabajo de los topólogos profesionales de hoy consiste en las generalizaciones y los refinamientos, vastos y sutiles estoy de acuerdo con lo descrito aca.

Después, el aspecto psico-pedagógico es contundente para el matemático que he sido. Vemos allí que las nociones de la matemática moderna se coloca entre las más fundamentales, lejos de ser sutiles abstracciones, son por lo contrario más naturales , al espíritu de los niños que las más clásicas nociones métricas (aquellas de distancia, ángulo, de medida) a las cuales la enseñanza tradicional nos ha habituado. Es natural, pues, preguntarnos por qué estas nociones simples y fundamentales de la topología se han demorado tanto tiempo para introducirse en la búsqueda matemática (los primeros teorémas topológicos han sido demostrados por Euler en el siglo XVIII, y la topología solo se cons

tituyó en ciencia al final del siglo XIX), por qué son abolidas de la enseñanza ? Es equivalente preguntarnos por qué los números, las distancias, las medidas han absorbido por tan largo tiempo la energía de los investigadores y han reinado profesores en su enseñanza.Las necesidades de la agricultura, de la artesanía, de la industria, el descubrimiento de cuerpos celestes han jugado provablemente su papel, pero yo pienso que hubo tambien razones socio-culturales más sutiles.

Prefiero dejar la pregunta abierta, simplemente constatando, que ciertas sociedades que se pretenden primitivas han hecho o dado prueba de una gran sutileza en los dominios "combinatorios vecinos de la topología combinatoria descrita acá (en particular en el capítulo V); Los buenos trabajos de Claude Lévi-Strauss sobre el parentesco, y en particular las reglas de enlace , lo atestiguan. Y estoy tentado a creer que el aspecto unicamente númérico de nuestro pensamiento matemático no es extraño al caracter "unidimensional" de nuestra vida, justamente denunciado por Herbert Marcuse : notas de 0 a 20, porcentajes de crecimiento, productos nacionales brutos(Oh cuántos!), rechazo de aquellos que no estan conformes con la manera de ser del hombre medio definido por las estadísticas, magia del número.

Los trabajos pluridisciplinarios estan hoy a la moda, moda sana de una época donde el conocimiento se subdivide en compartimientos más especialisados.

La crisis del cercamiento muestra de otra parte que es nefasto buscar un "progreso" en un dominio si uno no ha evaluado seriamente los efectos que él pueda tener en los otros. Además , esta crisis sugiere con fuerza que un trabajo pluridisciplinario serio y útil no puede limitarse a ser una yuxtaposición de capítulos escritos por especialistas variados. Según esto tenemos aquí un libro donde psicopedagogía y matemática estan intimamente integradas una con la otra, un buen ejemplo de esto lo que la multiplicidad-disciplinaria debe ser.

En efecto, se tiene a menudo la tendencia en creer que solo los especialistas licenciados pueden escribir libros serios. Es pues refrescante ver que un par de personas modestas ha escrito un libro apasionante, preciso, rico por su contenido y su documentación, sin tiempo muerto y sin falsas notas. Yo no se si la asociación de uno de nuestros más grandes topólogos y de uno de nuestros más ilustres psico-pedagogos

Pierre SAMUEL,

Profesor de la universidad de Paris-Sud

INTRODUCCION

Todas nuestras actividades se despliegan y todos nuestros , pensamientos se situan "dentro" de esto que los pensadores modernos llaman "espacio-tiempo".

Indisocianles a un mismo nivel, las nociones de espacio y tiempo se presentan suficientemente separadas en la experien - cia sensible de todos los días y puesto que podemos hablar de espacio y tiempo.

Dominar el espacio es esencial para el hombre. A esto llegamos en general sin mucha dificultad. A veces, sin embargo, las dificultades surgen. Es el caso, por ejemplo,,salimos de una estación de métro en un barrio el cual no nos es familiar, y cuando debemos desifrar el mensaje de un esquema que nos indica como funciona el cambio o ruta de una autopista o el camino que permite unir un stand de una exposición a niveles múlti -- ples.

Experimentamos entonces una verdadera rigidez de nuestras , facultades perceptivas e interpretativas como si ellas fueran, insuficientemente animadoras para resolver los problemas establecidos.

En efecto, antes de llegar a dominar el espacio y construirlo como esquema familiar, nos ha sido necesario, infancia, y descubrir en ella paso a paso las propiedades racionales.

Este descubrimiento como nos lo describe la psicología genética, no se hace en un momento.

Ellos comienzan con los primeros gestos coordinados por el, bebé para terminarse, al principio, de la adolescencia.

Decimos "al principio" porque como se ha indicado, el adulto encuentra a veces dificultades de espacio natural.

A qué son imputables estas dificultades ?

Verosímilmente a las lagunas de enseñanza recibidas en el curso de la infancia y de la pre-adolescencia.

La educación experimental en efecto se preocupa apenas un poco por ayudar al niño a construír su espacio, y cuando ella, lo hace por el truco de la geometría ella se acantona casi siempre en el espacio euclidiano es decir, en el espacio de las distancias y las medidas y que no es más que uno de los componentes del espacio total, con sus tres ramas: topológica,proyectiva y euclidiana.

Sin anticiparnos sobre el contenido de la presente obra , precisamos, para los lectores que estan muy poco acostumbrados del lenguaje matemático, que nombramos topológicos- en el sentido elemental del término- las relaciones ligadas al espacio ponen en juego las nociones de continuidad y descontinuidad , de vecindad, de dominio y de frontera, de abertura y de cierre de interior y de exterior, de desunión y "de un solo mantenedor de perforación y de no perforación etc.

Los estudios de ciertos psicólogos - y en primer lugar del profesor Jean Piaget de Geneve - han demostrado que estas relacio

nes topológicas son aprendidas por los niños, antes que las mismas relaciones proyectivas (izquierda/derecha, delante/detrás , etc.) y sobre todo ante las relaciones euclidianas.

Si la enseñanza no se interesa casi por las relaciones topológicas, esto es sin duda porque considera el estracto esencial que forma esta relación suficientemente bien adquirida, por los niños a través de sus juegos.

Efectivamente, la vida cuotidiana da al niño múltiples ocasiones de familiarizarse con el vivido topológico. Muy temprano él aprende por observación que la pieza donde se aloja, esta delimitada por paredes, las cuales pueden comportar aberturas por donde entran y sale la gente de su medio. Más tarde él aprende a distinguír los objetos según los tipos del contorno que los delimitan: un arco porque es abierto, no se deja confundír con un brazalete que es "cerrado". Más tarde todavía, cuando se puede desplazar de manera autónoma, él se ejercita en subir una línea recta, en saltar una frontera, desplazar un tejo de una casilla a otra de un juego de marelle.

Sin embargo, estas adquisiciones se forman en orden disperso según si se presenta o no tal o cual ocasión favorable. Así los vacíos son numerosos: las distribuciones no son siempre hechas, de las cuales algunas son esenciales, como la diferencia entre un objeto perforado - a través del cual podemos pasar un cordón

por ejemplo- y un objeto hueco; los puentes estrechos llamados a unír nociones vecinas no siempre estan constituídas. Bref el trabajo de integración y de poner en orden el cual caracteriza todo saber verdaderamente magistral no es siempre bien llevado por el niño al seno de sus actividades expontáneas.

Los resultados obtenidos podrían ser mejorados y la labor , del niño considerablemente facilitada si las personas que tengan a cargo su educación, y en primer lugar sus padres, velando por elegír el campo de las situaciones relevando el dominio considerado, variando la escala y modulando las dificultades.

Esta intervención no es incómoda por dos razones esenciales

- Por una parte, la introducción al espacio topológico no , necesita ni el recorrido de una línea recta, ni el recorrido , de la medida: es pues muy temprano accesible para el niño;

- Por otra parte, las situaciones de aprendizaje

- como el lector lo verá en las páginas siguientes pueden m muy frecuentemente tomar de juego y de ejercicios atrayentes , que el adulto que no tiene ninguna dificultad para dominar.

Por esta vía, toda una corriente educativa se organiza después de algunos años, particularmente en ciertos colegios primarios ingleses, americanos canadiences y franceses.

Si esta corriente se manifiesta tardíamente es verosímilmente por las razones históricas. En efecto la toplógia, como rama de la matemática sistemáticamente estudiada, solo se desarr

lla tardíamente en el siglo XIX para lo esencial, entonces la geometría euclidiana había sido elaborada de manera extremadamente completa por los griegos principalmente antes de nuestra era.

Además, los estudios psicológicos del colegio de Ginebra, que fuera uno de los primeros en poner en evidencia la importancia de la adquisición de las nociones topológicas en la formación de la inteligencia y su anterioridad por relacionar las relaciones proyectivas y euclidianas, son relativamente recientes[1].

El interés actualmente lleva a la topología, si es ampliamente el fruto de la doble evolución de los conocimientos matemáticos y de los conocimientos psicológicos que acabamos de referír, se encuentran sobre todo impulsados por las exigencias, mismas de nuestra época donde los sistemas complejos se expanden cada vez más retardados. Para encontrar estos sistemas inteligibles los traducimos cada vez más en esquémas, diagrámas y gráficos désde las escotillas indicadoras de los nudos del , camino mencionados anteriormente hasta los organigramas de empresas, pasando por los esquemas de cablage ordenadores.

Estas representaciones de imágenes se caracterizan todas como de naturaleza espacio-lógica porque traducen formas espaciles de relaciones lógicas.

Es mucho decir cuanto importa para nuestros niños , pero , tambien para nosotros mismos, todo esto que permite profundizar nuestro conocimiento interno del espacio.

La presente obra ha sido conocida con la doble preocupación de aportar una completa información a los adultos deseosos de quedar en toma directa con su tiempo y a las enseñanzas que buscan un mejor equilibrio en la formación de los niños la cual tienen a su cargo.

Se apoya por una parte sobre las experiencias todavía inéditas que se propusieron después de muchos años en el colegio experimental de Saint-Mandé (Colegio Decroly) y él ha servido de telón de fondo a los trabajos de su estudio de formación , permanente los cuales han participado durante un año, en quince sectores de Paris, una veintena de profesores, profesoras, y padres de los alumnos.

Viendo el resultado - salvo en su muy corto capítulo final - la matemática abstracta reservada a los especialistas, se sitúá en un nivel accesible a las personas que no tienen formación matemática.

Puede parecer que las nociones expuestas son en su totalidad tomadas de la experiencia sensible y próximas de nuestro universo familiar.

Añadimos que nuestra preocupación ha sido explicar los vínculos de unión de las nociones expuestas a su substrat psico-

lógico y de múltiples ejercicios y juegos donde estas nociones se encuentran y se manifiestan en la obra.

La manera de exponerlo se encuentra un poco recargada, pero la experiencia que hemos tenido de este método nos conduce a pensar que facilita mucho la labor del lector.

CAPITULO I

TOPOLOGIA Y DESARROLLO DE LA INTELIGENCIA DEL NIÑO

La actividad de los humanos se desarrolla en el espacio y en el tiempo. El niño se interesa muy temprano en el espacio; desde el segundo o tercer mes, el bebé coordina visión y préhensión y hace recorrer a sus miembros como a sus miradas algunas, porciones de espacio.

Desde que el niño puede caminar, por sus idas y venidas, explora todavía más activamente la extensión que lo rodea; él aprende a distinguír lo que es cerca y lo que es lejos, etc. El delimita por el tacto y por la vista el contorno exterior de los objetos. El comienza a distinguír lo que es grande, lo que es pequeño y lo que es mediano.

En pocas palabras, en el curso de los dos primeros años de su existencia, el niño"construye" lo que Piayet llama espacio: sensoro-motor, esta expresión indica que el espacio en cuestión no es la representación que los adultos se hacen del espacio sino algo ligado a los sentidos del sugeto (la percepción) y a su actividad motriz.

Este es un espacio vivido y práctico que va a servir de base a la construcción ulterior del espacio representado. Esto tomará muchos años y no se acabará sino al comienzo de la adolescencia, cuando la inteligencia accederá a los niveles hipotetico-deductivos.

Cuando pasa los dos años, el niño empieza a elaborar una representación del espacio trasponiendo al nivel del pensamiento, sus actividades espaciales vividas. Estas primeras representaciones no son más que manifestaciones "sujetas a las deformaciones enjendradas por el caracter irreversible y estático del pensamiento intuitivo o preoperatorio".

Este caracter de iniciación se manifiesta, por ejemplo a propósito de las formas particularmente de la forma de los contornos lineales de los objetos a los cuales el niño tiene acceso.

La forma de un contorno lineal depende de la manera como los puntos sucesivos de este contorno esten dispuestos unos con relación a otros. Los ejemplos de disposición suministrados por lo vivido del niño son muy variados. Pero muchos se asemejan y el niño experimenta bastante rápido algunas de esas semejanzas. El experimenta notablemente rápido o muy temprano el hecho de que ciertos contornos se cierren sobre ellos mismos cuando los otros permanecen abiertos o que aún tenga acceso a una línea regular (porciones de círculo o de elipse) y no a una línea accidentada (contorno en estrella, contorno en triángulo, etc.) presentando huecos, puntos, dientes... Hacia los cinco o seis años él comienza a hacer distinciones entre contornos rectilíneos y los curbilíneos.

A propósito de las superficies y de los volumenes el niño di

ferencia lo mismo las superficies carradas (contorno, pared de un balón) que envuelve algo de cerrado y las superficies abiertas (pared de un tubo) que delimita"un hueco".

Las fronteras separativas, líneas o superficies, estan entre las primeras adquisiciones espaciales del niño y contribuyen , tambien a la "construcción" de la imagen de los objetos (facilitando su reconocimiento) que a la construcción de la imagen del espacio por la ubicación de puntos de referencia (se encuentra, en una pieza, o al exterior, de un lado de un riachuelo o del otro etc.).

Al contrario, el niño no es todavía capaz de distinguir sistemáticamente las relaciones proyectivas y las relaciones euclidianas, es decir las relaciones que hacen intervenir las perspectivas, las orientaciones y las distancias.

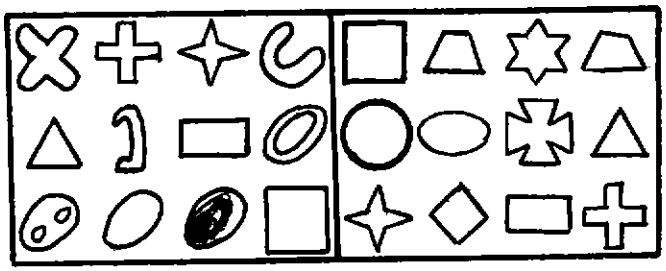
Sobre este punto, los trabajos de Piaget y P. Inhelder ya citados, que han sido tomados sistemáticamente en la universidad, de Montreal por Monique Laurendeau y Adrien Pinard, aportan puntos de vista interesantes sobre los cuales hay lugar para detenerse un poco.

Hagamos primero referencia a una serie de tests que estos dos últimos autores han hecho pasar a unos setecientos niños cuyas edades se sitúan entre dos y medio y doce años.

El material utilizado comprendía doce figuritas tipos recortadas en cartón duro y presentadas en las formas siguientes: re

donda, cuadrada, perforadas por un hueco, anillo cerrado, cruces irregulares, triángulo, anillos abiertos, rectángulo, cruz griega, círculo, rectángulo abierto, estrella de cuatro brazos redondel de dos perforaciones. El test consiste en identificar estas formas sin verlas. El niño las toca una por una y él debe cada vez dibujar sobre un mapa que las representa a todas , la que él acaba de tocar(reconocimiento esterosnósico).

Una segunda prueba de la misma naturaleza se hace sobre doce figuras algunas semejantes a las anteriores y otras diferentes. Las formas utilizadas son las siguientes: círculo, cruz de malta, cuadrado, elipse, estrella de cuatro brazos, rectángulo, estrella de seis brazos, triángulo, cuadrilátero, cruz griega, trapecio, rombo.



Las respuestas dadas por los niños son anotadas y después analizadas. Parece que los errores de identificación son más numero-

sos entre los niños más pequeños. Por otra parte, los errores no se distribuyen al azar. Por ejemplo, los niños se equivocan más frecuentemente por el rectángulo que por el anillo abierto etc.

El análisis estadístico de respuestas exactas y de errores reagrupados "por familia" llevan los autores a las siguientes conclusiones: (p. 63): la toma completa de ciertos reportes topológicos intervienen temprano y conducen los niños a diferenciar las figuras planas de las figuras perforadas, las figuras abiertas de las figuras cerradas. La diferenciación de figuras, rectilíneas y curbilíneas siguen de cerca. Los reportes puramente métricos (dimensiones, inclinaciones, extensiones de las ángulos, número de elementos, etc.) no intervienen sino en últim lugar.

Por ejemplo, entre cuatro y seis años, "las cruces confundidas entre ellas, a causa de su característica común de figuras abiertas; son igualmente confundidos el triángulo, el cuadrado, el rectángulo y todos los otros cuadriláteros, a causa de su caracter común de figuras cerradas y rectilíneas". (p. 87).

Otra serie de tests administrados por el equipo de Ginebra y tomado recientemente por los profesores de Montreal confirman la primacía genética de las relaciones topológicas sobre las relaciones proyectivas y euclidianas.

Se trata, siguiendo la técnica utilizada por Laurendeau y Pinard, de alinear ocho reverberos pequeños sobre una mesa entre dos casas igualmente pequeñas que pueden estar dispuestas sea paralelamente a uno de los lados de la mesa de experiencia, sea al sesgo con relación a estos.

Los experimentadores anotan no solamente las configuraciones obtenidas al final del ejercicio sino igualmente los procedimientos en obra de los niños.

Comentando estos procedimientos nuestros autores escriben (p 93):

Después de los seis o siete años, el caracter preoperatorio de los procedimientos empleados por el niño se traducen por la preponderancia que él da a las relaciones topológicas de simple vecindad y por la dificultad que él experimenta a superarse de las sugestiones perceptivas ofrecidas por ciertos elementos de la situación, como en particular, los contornos de la mesa sobre la cual trabaja. Tal niño, por ejemplo, tendrá mucha precaución en yuxtaponer los elementos (reverberos) cuidando bien de que todas sus bases se toquen de dos en dos, pero sin ninguna preocupación de conservar una misma dirección, para llegar finalmente a una línea sinuosa raramente orientada, igual en su conjunto, hacia el objetivo fijado. Tal otro podrá lograr construir una línea recta a condición de disponer los elementos cer

ca del borde...

Estas maneras de proceder muestan que el niño de nivel preoperatorio se apoya únicamente sobre los informes de vecindario y orden.

El procede de elemento en elemento asegurándose de que cada nuevo elemento se yuxtaponga al anterior; pero él no ve la necesidad y no tiene la capacidad de reunir sus movimientos sucesivos en una misma estructura de conjunto de manera que pueda mantener una dirección constante y alcanzar el objetivo. Dado que él ya conoce las rectas perspectivas, el niño no deja de observar el fracaso de sus comportamientos. Pero por falta de poder representar estas rectas y así de anticiparlas o de reconstruirlas en el pensamiento, él se encuentra privado de estructuras internas que necesitaría para dirigir construcciones y resistir a la sugestión de rectas perspectivas ya todas construidas en su campo visual. (p. 94).

Uno encuentra en estas experiencias una ilustración del funcionamiento del "pensamiento por pareja" a las edades consideradas sobre las cuales el psicólogo H. Wallon había atraído la atención en su obra intitulada Les origines de la pensée chez l'enfant. Aquí se trata de parejas de puntos dispuestos espacialmente y cuya naturaleza de parejas resulta de su proximidad.Las diversas parejas son consideradas por separado y no se integran

todavía en cadenas transitivas.

Teniendo en cuenta el espíritu de los resultados de las experiencias precisas llevadas a cabo con los niños, nosotros comprendemos más facilmente en qué consiste la imagen mental del espacio tal como ella se forma en los niños. Esto no es una imagen única, sino más bien un mosaico de imagenes donde cada una es fragmentaria, distinta de las otras y bajo la dependencia de las percepciones dominantes suministradas por lo vivido.

Piaget y su escuela hablan a propósito de espacio topológico el calificativo "topológico" siendo utilizado por referencia a las matemáticas para indicar que a este nivel solamente cuentan relaciones de un cierto tipo: relaciones de vecindad o de proximidad, de contorno (dos dimensiones), de envolvimiento (tres dimensiones), de continuidad, de separación, de orden. Estas relaciones no permiten dar a tal o cual objeto el status de objeto geométrico euclidiano, es decir de objetos cuyos puntos estan a distancias invariantes unos en relación a otros. Ellas no permiten además ubicar un objeto de manera precisa en el seno de un cuadro de referencia.

Sin embargo otras experiencias realizadas bajo la dirección, de Piaget o por el equipo de Montreal, llevados a cabo especialmente sobre la manera como los niños se orientan o sobre la distinción que ellos hacen entre la izquierda y la derecha, muestran que, desde la edad de cuatro o cinco años, el espacio pro-

yectivo y el espacio euclidiano comienzan a esbozarse sobre la tela de fondo del espacio topológico. Pero las representaciones correspondientes llevan siempre la marca de la preheminencia de lo intuitivo sobre lo operatorio y del egocentrismo sobre la pluralidad de los puntos de vista, como hay que esperarse dado las características generales del nivel obtenido por la inteligencia de los niños de menos de seis y siete años. Por ejemplo, tal niño que sabe perfectamente distinguir su izquierda y su derecha es incapaz de indicar correctamente la izquierda y la derecha de una persona que se presente frente a él y esto porque su pensamiento - todavía en estado intuitivo - fija su atención sobre "aspectos parciales y sucesivos de una misma situació de conjunto sin poder todavía dedicarse a las actividades de integración y de compensación necesarias a la objetividad y a la reversibilidad operatoria".

A propósito de la evaluación de las distancias, el niño de menos de seis años sabe en general distinguir lo que es cerca de lo que es lejos, pero por falta de medir las distancias, debe limitarse a comparaciones aproximadas.

En resumen, si después de dos o tres años, el niño sobrepasa el espacio sensoro-motor en dirección a un espacio representado este último no es todavía, en esencia, más que topológico; las relaciones proyectivas (lineas rectas, sistema de perspectivas y euclidianas (métricos) no estan todavía presentes sino en un

estado de esbozo imperfecto.

CAPITULO II

EL DOMINIO DE LA TOPOLOGIA

Dibujamos sobre una membrana de caucho plano una línea cerrada (L) de forma cualquiera (Fig. 2). Señalamos por marcas cinco emplazamientos de los cuales: (A,B,C,D) estan situados sobre la línea y el quinto (X) hacia afuera.

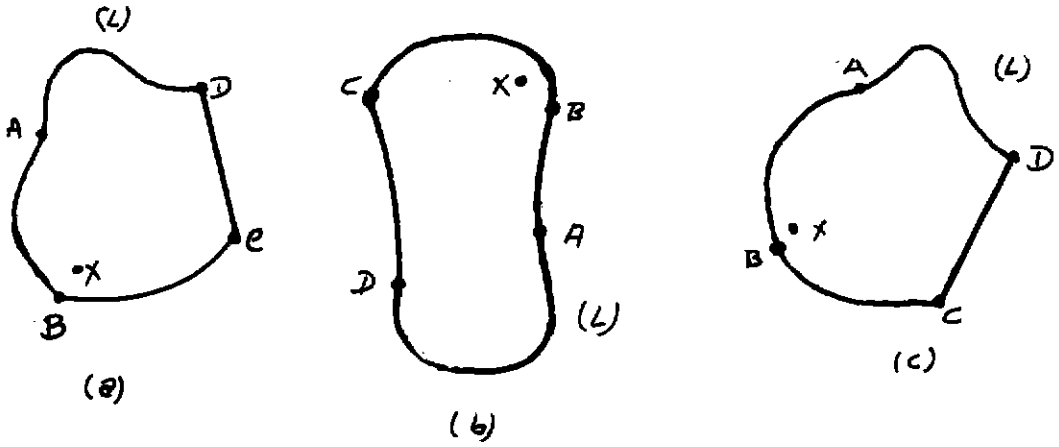


Figura 2

Supongamos que los puntos A,B,C,D se suceden sobre la línea en el orden indicado, es decir, que saliendo de A en dirección a B, se encuentra B después C después D.

Supongamos que X este en el interior de la línea (L) y proximo de B.

Con la ayuda de papel trasparente o por otro medio, reproducimos sobre otra hoja de papel testigo la configuración realizada que designamos por la letra (a).

Estiramos ahora la membrana sin doblarla y sin romperla.

La línea (L) se deforma y obtenemos una nueva configuración, que nombramos (b) la cual reproducimos sobre nuestra hoja testigo.

Suprimimos entonces el estiramiento de tal manera que la membrana, supuesta perfectamente elástica, vuelva a su tensión inicial. La línea se deforma y obtenemos una tercera configuración, que llamamos (c).

Comparamos ahora las dos figuras (a) y (b). Para facilitar lo expuesto, llamamos A_b el punto A de la figura b y A_a el punto correspondiente a la figura (a). Dicho de otra manera, utilizamos una notación marginada en la cual el índice (en letra minúscula) vuelva a la figura indicada por él.

Comparando nuestras figuras, podemos hacer las constatacio - nes siguientes:

- la línea (L_b) es "cerrada" como lo es la línea (L_a),
- los puntos A_b, B_b, C_b, D_b estan situados sobre (L_b), como A_a, B_a, C_a, D_a estan situados sobre (L_a),
- El punto X_b esta "en el interior de " (L_b), como X_a esta en el interior de (L_a),
- el punto X_b es "próximo" de B_b, como X_a es "próximo" de B_a,
- los puntos A_b, B_b, C_b, D_b se encuentran en el"mismo orden" que A_a, B_a, C_a, D_a,

- El número de puntos marcados sobre (L_b) es el mismo que el número de puntos marcados sobre (L_a): cuatro en los dos casos.

Paralelamente hacemos las constataciones siguientes:

- la "forma" de (L_b) difiere de la de (L_a): lo verificamos superponiendo los dos calques y observamos que no se pueden hacer coincidir las dos figuras,
- si yo mido con la ayuda de un hilo elástico la"distancia" que separa A_b de B_b y la que separa A_a de B_a constato que estas distancias son diferentes,
- si yo trazo una recta entre A_b y B_b de una parte y entre A_a y B_a de otra parte, constato que estas rectas no son "paralelas".
- si yo mido con un trasportador el "ángulo" $(ABC)_b$ constato , que no es igual al ángulo $(ABC)_a$.

Comparamos de otra parte las figuras (a) y (c). Esta vez podemos constatar por superposición de los calques, que no podemos hacer coincidir exactamente las figuras (a) y (c), A_c recubriendo A_a, X_c recubriendo X_a, etc.

Podemos interpretar el paso de (a) a (b) y el paso de (b) a (c) como trasformaciones hechas dentro del plano.

Cada transformación hace corresponder a todo punto de la figura inicial una imagen y una sola.

La segunda transformación puede ser considerada como la inversa de la primera ya que la composición de las dos transformaciones permiten encontrar la figura original.

Dicho de otra manera, a todos los puntos de (a) corresponde un punto de (b) y reciprocamente.

Llamamos T_1 la transformación que permite pasar de la figura (a) a la figura (b).

T_1 puede ser caracterizado por las siguientes propiedades:

T_1 deja invariable el orden de los puntos,

T_1 deja invariable la interioridad y la exterioridad,

T_1 deja invariable el número de puntos marcados sobre la figura,

T_1 deja invariable la "proximidad".

En cambio T_1 no deja invariable ni la orientación de la figura ni sus dimensiones. Ellas no respectan ni el paralelismo ni la forma de las líneas, particularmente ella no respecta la rectitud eventual de las líneas (dentro(a) D_aC_a es un segmento de recta, no es el caso para D_b C_b).

Al término de este primer examen somero podemos decir lo siguiente:

El dominio de la topología es el dominio de las propiedades del espacio que quedan invariantes a la consideración de las "deformaciones bicontinuas" tales como las que realizamos estirando una membrana de caucho sin doblar ni romper.

En primera aproximación se puede decir igualmente:

La topología es la geometría de la membrana de caucho.

Evocar la membrana de caucho permite hacer facilmente comprender en qué consiste la transformación topológica. El matemático no se contenta, a pesar de, evocaciones y de imagenes. El lo hace de bellas y buenas definiciones.

Aquí esta la transformación bicontinua que habría de poder definir. Pero para esto tendría que introducir la noción de continuidad. Nosotros no podemos hacerlo porque es necesario recurrir a una definición rigurosa de la expresión "tendencia a cero" y nosotros no estamos capacitados, al nivel elemental para lanzarnos en l ejercicio tan delicado.

Contentemonos con una simple ojeada.

En general podemos decir que la correspondencia

$$\begin{array}{ccccc} & X & & X' & \\ \text{con } X & A & \text{y} & X' & A' \end{array} \quad (\ )$$

es bicontinua, a toda pareja cualquiera de (p, q) de A, la correspondencia hace corresponder una pareja (p', q') de A' tal que cuando p y q tiendan a confundirse, p' y q' hacen lo mismo de su lado.

Tomemos sobre una figura dos líneas (P) y (Q) que se encuentran en X.

( ) Recordemos que el signo (letra griega "epsilon" se lee: "perteneciente a" o "es elemento de".

Yo defino una correspondencia bicontinua que hace corresponder a (A) su transformada (A').

Considero un punto p que desplazo sobre (P) y un punto q que desplazo sobre (Q) y me las arreglo para hacer que se encuentren en X. Las imagenes de p y q sea p' y q'se desplazan sobre: (P') y (Q'). En virtud de la propiedad mencionada arriba, cuando p y q se confunden, p' y q' tambien. Entonces al punto X punto de encuentro de las líneas (P) y (Q), corresponden entonces, el punto X' punto de encuentro de (P') y (Q').

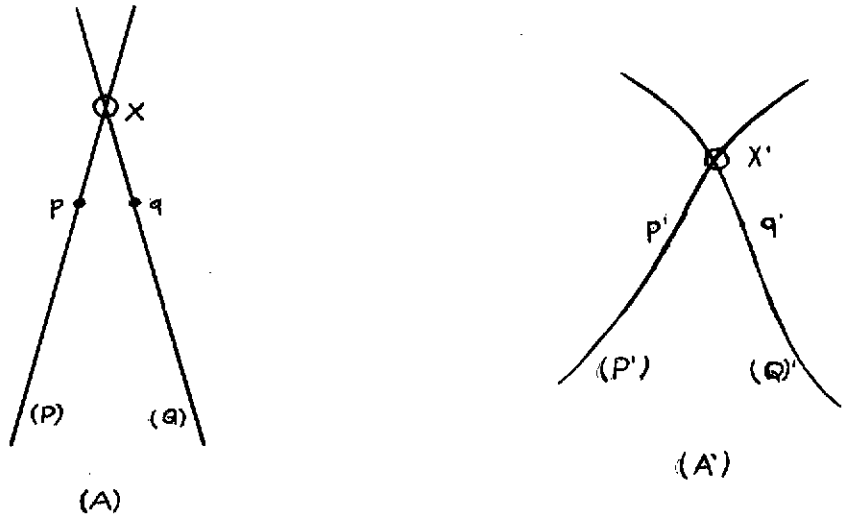


Figura 3

Estas breves indicaciones hacen resaltar la importancia de la noción de continuidad en materia topológica.

El profesor A. Revuz, en su curso "de L'A.P.M." titulado : Eléments de topología, escribe: "si quisieramos definir de una

palabra la topología, se podría decir que es la rama de las matemáticas que tratan de la continuidad" (p. 11).

Habiendo así muy someramente circunscrito el objetivo de nuestras investigaciones, vamos a proseguir nuestro camino examinando sucesivamente las diversas nociones que tratan del dominio de la topología, y cada vez que sea posible, propondremos algunas ideas de ejercicios donde los juegos permitan a los niños entrar en contacto con ella.

En esta oportunidad precisaremos el vocabulario comunmente utilizado en el ramo considerado.

CAPITULO III

EXPLORACION DEL DOMINIO TOPOLOGICO: LINEAS Y SUPERFICIES

1. Continuo-descontinuo

a. Imagenes.

Partamos de algo muy simple, por ejemplo un trozo de hilo o de pita (F) de algunos centímetros de largo que disponemos de plano sobre la mesa.

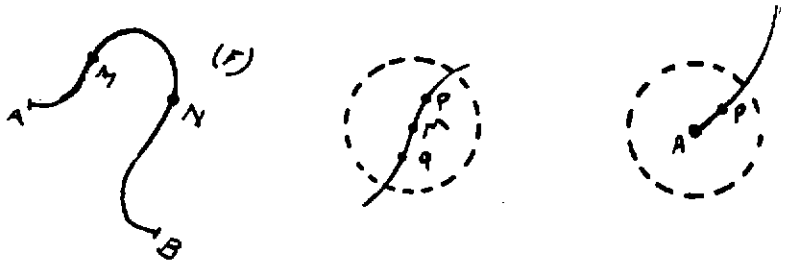


Figura 4

Con color hacemos una marca punteada M sobre el hilo.

Partiendo de un punto cualquiera del hilo, lo recorremos con la punta de un lápiz dirigiendonos hacia M. Nos aproximamos, llegamos a su vecindario y lo interceptamos. Si proseguimos nuestro camino muy suavemente, nos detenemos un momento en su vecindario del otro lado, después nos apartamos de él.

Este pequeño ejercicio nos confirma que M tiene varios vecinos sobre el hilo, de parte y parte del mismo.

Por ejemplo sobre la parte ensanchada de la figura 4, p y q son los puntos vecinos de M pero los encontramos en el orden

p M q o q M p

M se encuentra "encuadrada" por p y q, esta "en sandwich" entre p y q.

Va lo mismo por tal otro punto N dispuesto como lo indica la figura 4.

Por lo contrario, el punto A ocupa una situación singular. Y tiene vecinos de la categoría p pero no tiene vecinos q. No está encuadrado. Señala un límite de extensión del hilo considerado, (o de la línea que representa este hilo). Es una de las extremidades de F.

De igual forma para B que marca la segunda extremidad de F.

Esta singularidad de los puntos A y B tiene un caracter topológico ?

A priori si. Para verificarlo, no tengo sino que pensar en una transformación bicontinua y mirar lo que pasa. Por eso me es suficiente disponer mi hilo de otra manera, por ejemplo enrollándolo sobre si mismo (figura 5a) y considerar que la nueva configuración (F') es la transformación de (F). (F') presenta como (F), dos puntos singulares A' y B', sus extremidades, y es fácil ver que A' es la transformación de A mientras que B' es la transformación de B.

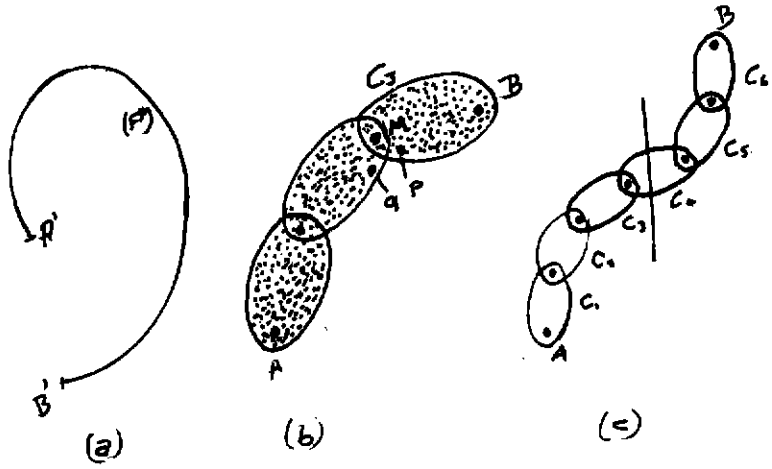


Figura 5

Ensayemos precisar un poco esta noción de doble vecindad de lo cual hemos hablado a propósito de los puntos M y N reemplazamos nuestro hilo (F) por una cadena formada por anillos plenos C_1, C_2, C_3 (figura 5b) reunidos por ejes.

Consideramos como vecinos todos los puntos de un mismo anillo.

El punto M se encuentra en la unión de dos anillos C_2 y C_3.

En tanto que el punto de C_3 tiene vecinos p, el punto de C_2 tiene vecinos q.

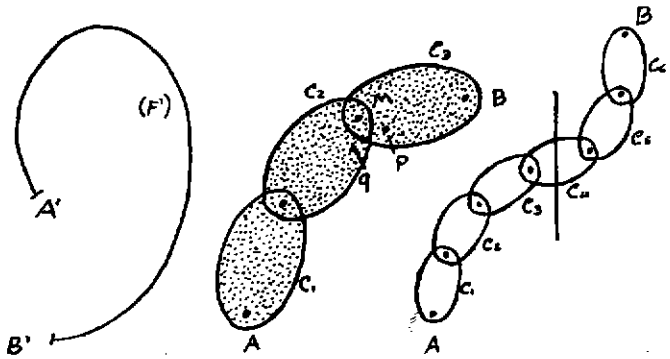
Por el contrario, el punto A se encuentra en un posición , singular, él no tiene vecinos sino sobre un solo anillo, es decir de un solo lado.

Nuestra cadena AB de la figura 5b tanto como nuestro hilo de la extremidad, aparece como formando un todo delimitado por

dades. Entre estas extremidades los puntos constitutivos pueder ser considerados como "vecindades entrelazadas" que aseguran una continuidad perfecta, continuidad que es conservada , cuando formó la cadena o el hilo sin romperlos.

Por ejemplo, yo puedo tomar tres hilos diferentes F_1,F_2, F_3, y los barajo. Cada uno conserva su individualidad y, una vez desenredada la madeja, encuentro mis tres hilos bien individualizados.

He precisado un poco la noción de continuidad. Para ponerlo a prueba partimos a la búsqueda de su contrario y utilizamos para esto una cadena AB formada de seis elementos C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 (figura 5c).



(a) (b) (c)

Suprimimos por ejemplo la cadena C_4. La continuidad se encuentra"rota". C_3, y C_5 llegan a ser anillos de extremidad. No tengo una sola cadena, sino dos: la cadena $C_1/C_2/C_3$ por una

parte,la cadena C_5/C_6 por otra parte. Estas cadenas constituyen dos grupos de cadenas separadas discontinuas.

Transponemos al hilo, lo que venimos diciendo para la cadena viene a considerarse un hilo cortado por supresión de un punto M intermediario, lo que dió nacimiento a dos partes distintas, separadas. Hemos introducido una descontinuidad en el seno del todo inicial. Mientras que antes yo podía seguir el hilo AB de par en par de un trazado de lápiz sin levantar la mano, ahora es completamente imposible. En un momento, el entrelazamiento de las vecindades esta roto. Hay una descontinuidad.

Ahora se encuentra bien puesto en evidencia la pareja de propiedades topológicas opuestas: "continuo"/"discontinuo".

Volvamos a la cadena de la figura 5c. Supongamos que yo suprimo en anillo C_1. Contrariamente a lo que pasaba hace un momento yo no obtengo dos partes. No creo una descontinuidad. El caracter especial de las extremidades se encuentra nuevamente confirmado.

Para mayor precisión, procedemos a una trans-formación topológica.

Partamos de la figura "continua" AB al comienzo(figura 6) representando el hilo AB.

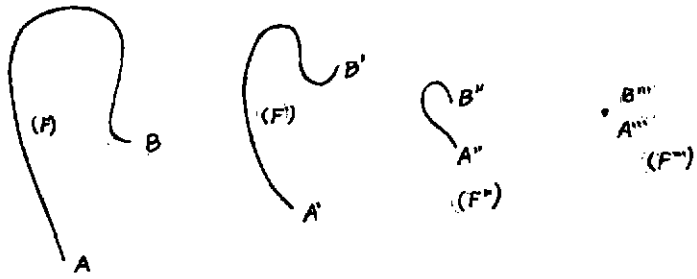


Figura 6

Supongamos que la hayamos trazado sobre una membrana de caucho extremadamente tensa. Dejamos que se retracte ligeramente , la membrana. La línea (F) se contracta y se transforma en la línea (F'). Una nueva etapa nos da (F"). Podemos imaginarnos que la contracción sea tal que la línea se reduzca a un punto único imagen de A como de B y de todos los puntos intermediarios

Por el contrario, si yo hago la misma cosa con una línea discontinua presentando dos porciones diferentes, llegaré por contracción a dos líneas "degeneradas" (cada una reducida a un solo punto) igualmente diferentes.

b. Ideas de ejercicios.

En el dibujo siguiente de la casa A y de la casa B salen diversos caminos representados por un trazado lineal. encontrar el o los caminos continuos que permiten ir de A a B y veceversa.

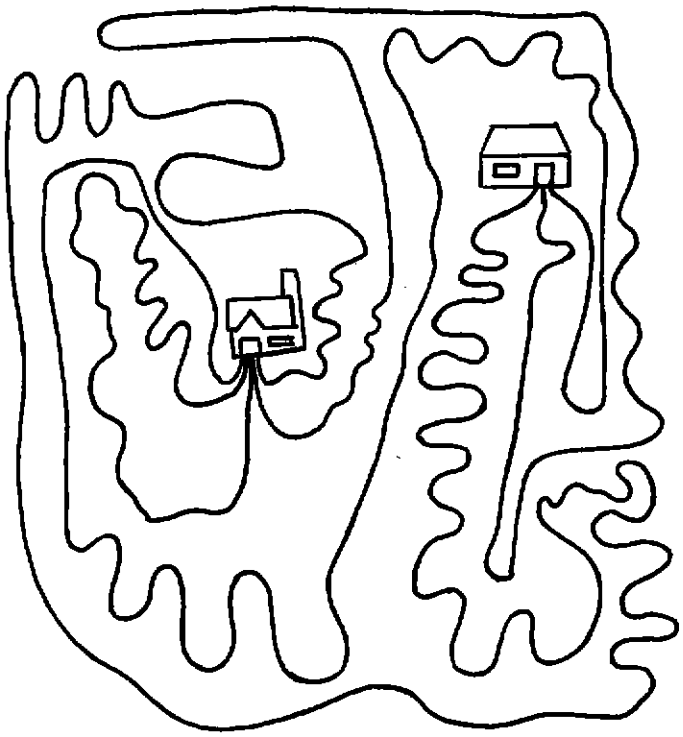


Figura 7

Nota: Con los pequeños caminos pueden ser concretizados por los dominios o los cubos colocados a lado y lado sin descontinuidad. Si quitamos un dominio

2. Líneas cerradas

Volvemos a tomar nuestra cadena de hace un instante. Imaginemos que haçemos que esas dos extremidades se unan, la parte libre del anillo A viene a entrelazarse sobre la parte libre del anillo B. El punto J de unión tiene en lo sucesivo el mismo status topológico que nuestros puntos intermediarios M o N de hace un momento. El tambien tiene vecinos p y q los cuales lo enmar-

can. Ya no hay extremidades y podemos recorrer a lo largo la cadena sin encontrar descontinuidades y esto desde cualquier punto que partamos. La línea obtenida es una línea cerrada.

Constato en seguida, que bajo el efecto de una transformación bicontinua, toda línea cerrada va a transformarse en una línea cerrada. Se trata entonces de su característica topológica.

Para realizar una línea cerrada, es suficiente, pues trazar, una línea que regrese a su punto de partida. La figura 8 presenta algunos ejemplos.

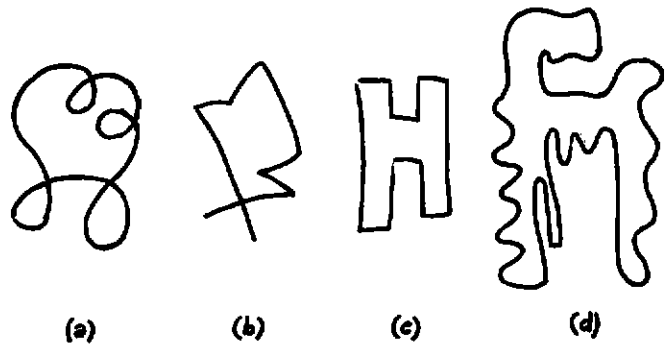


Figura 8

Trazando tales líneas, observamos que usamos procedimientos variados. Por ejemplo, notamos una diferencia entre (a) y (c) en este sentido que en (c) no pasamos dos veces por el mismo sitio del plano mientras que en (a) el trazado se "reencuentra" sobre una cierta parte.

La figura (c) aparece entonces como particularmente sencilla en materia topológica. Le aplicamos el juego de las transformaciones. Podemos hacerlo de manera muy concreta colocando doce fichas sobre una tabla con huecos (o doce tachuelas sobre una plancha de triplex contraplegada) y teniendo un elástico entre ellas como lo indica la figura 9 (a).

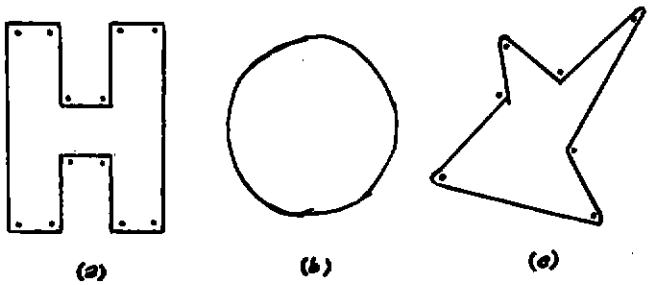


Figura 8

Si sacamos las fichas, el elástico vuelve a tomar su forma inicial circular. (a) y (b) son topológicamente equivalentes.

Ponemos así en evidencia una clase de figuras topológicamenteequivalentes donde el modelo es una línea circular. todos los polígonos, tales como (c), entran en esta clase.

Podemos designar esta clase por la expresión "clase de líneas cerradas simples".

Miremos lo que pasa cuando suprimo un punto cualquiera de una línea cerrada sencilla, o un anillo cualquiera de una cadena sencilla. Encuentro un segmento AB análogo a los que hemos exa-

minado arriba, es decir provisto de dos extremidades A y B entre las cuales el trazado es continuo. Podría siempre, a pesar del corte que se hizo, llevar de un punto cualquiera a otro punto de la línea sin levantar el lápiz.

Así sobre la figura 10 a, a pesar del corte C, puedo ir de A a B siguiendo la línea (L) por un trazado continuo.

Por el contrario, si hay dos cortes C y C', la continuidad no esta asegurada. (figura 10b.)

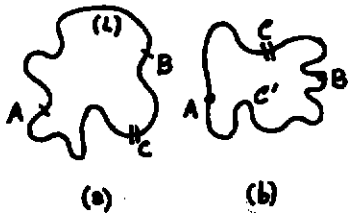


Figura 10

Para marcar esta descontinuidad, yo puedo decir que los segmentos ACC' y C'BC estan separados.

3. Fronteras y regiones, Interior y exterior

a. Imagenes.

Trazamos sobre el plano una línea cerrada sencilla (F), que podemos materializar por un cordón cerrado cuyos meandros pueden ser numerosos pero que no se pueden recortar. (figura 11).

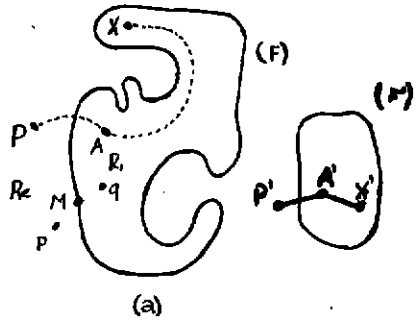


Figura 11

Sabemos que la línea (F) se deja transformar topológicamente en la línea circular (F'): al punto A corresponde el punto A', al punto X el punto X', etc.

Supongamos que A' y X' se han dispuesto de tal manera que pudo considerar esos puntos como las extremidades de un segmento que no encuentra (F'). La transformación inversa permitiendo pasar de (F') a (F) hará corresponder al segmento A'X' el segmento AX que no encontrará (F).

Desplazo ahora X' de todas las formas posibles en el plano pero evitando siempre que el segmento A'X' encuentre a (F').Los puntos X corresponden a X' describen un cierto dominio del plano (a) y los segmentos AX corresponden a A'X'no encuentran a (F).Defino así un conjunto de puntos X de (a) que tienen todas las propiedades de estar en la misma situación topológica con relación al punto A. Yo digo que estos puntos constituyen una re-

El da entonces la consigna siguiente. Las fichas pueden desplazarse sobre la hoja pero, cada vez que una de ellas salte la barrera, debemos volverla. Pasando de A a B una ficha derecha, se vuelve al dorso. Pasando de B a A una ficha al dorso se vuelve al derecho.

Después de algunas manipulaciones los niños comprenderán que todas las fichas de A serán derechas, todas las fichas de B estarán por el dorso.

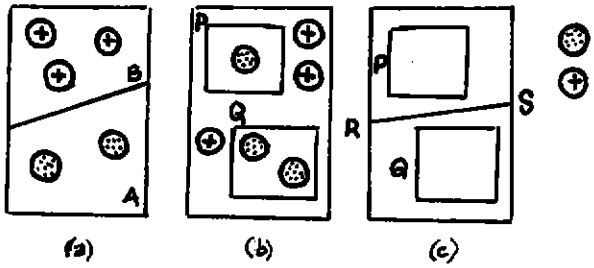


Figura 12

Sobre otra hoja de papel marcamos de la misma manera dos espacios cerrados por las barreras P y Q (figura 12b). A la partida todas las fichas estan reunidas en el interior de P del lado derecho aparente. Desplazamos las fichas con la misma consigna de hace un momento: las fichas que penetran en el espacio Q estan todas dispuestas por el lado derecho. Volvemos a empezar, después de haber colocado una barrera suplementaria como RS (figura 12c). Qué encontraremos en Q ?

gión del plano (dominio de extensión de una cierta clase de equivalencia). Puedo convenir diciendo que A esta en el interior, de (F), el conjunto de puntos X esta en el interior de (F).

Supongamos ahora que P' sea tal que todo arco A'P' puedan ser trazados entre P' y A' cruzando obligatoriamente (F'). El punto correspondiente P de (a) no pertenecerá a la clase de equivalencias anteriormente definidas, no estará situado en el interior de (F).

Si yo opero como lo descrito arriba buscando todos los puntos que operan como P, defino una nueva clase de equivalencia, o sea una nueva región, que defino exterior de (F).

Por otra parte, no olvido que hay dentro del plano (a)el conjunto de puntos que están situados sobre (F).

Yo puedo considerar que he realizado una partición de puntos del plano (a) en tres partes:

- la parte (Ri) formada por los puntos situados en el interior, de (F);
- la parte (F) formada por los puntos de (F);
- la parte (Re) formada por los puntos situados en el exterior, de (F).

Vemos que el mantenimiento de una línea cerrada simple permite delimitar fuera de ella dos regiones del espacio, uno "in-

terior" y uno "exterior",que quedan invariables en las transformaciones topológicas.

Las regiones (Ri) y (Re) no tienen ningún punto en común. Se dice que estan separadas. La línea cerrada (F) forma un corte entre las dos, de la misma manera que un foco de un castillo establece un corte entre el interior y exterior del castillo.

Podemos evocar a este propósito, de manera muy natural, la noción de frontera o de línea de demarcación.

Examinamos el status topológico de la frontera. Todo punto M de la línea frontera (F) presenta la siguiente particularidad : ella tiene dos vecinos tanto en Ri como en Re. Lo verificamos, intuitivamente considerando un arco pMq que une un punto p Re a un punto q Ri, y suponiendo que p y q se aproximan a M.

b. Ideas de ejercicios y juegos.

El salto de las barreras.

Para el presente juego, se utilizan o fabrican fichas de color (rojo por ejemplo) donde uno de los lados de la ficha es marcado bien visible, por ejemplo por una cruz.

Por otra parte, sobre una hoja de papel, se dispone una barrera (bajo la forma de una regla o de una flecha llevando una etiqueta del mismo color de las fichas utilizadas) que separa toda la hoja. El profesor coloca todas las fichas sobre la hoja del mismo lado de la barrera y vela para que todas las fichas , tengan su lado derecho visible (figura 12a).

en el I	azul	derecho
	rojo	dorso
en el III	azul	dorso
	rojo	derecho
en el IV	azul	dorso
	rojo	dorso

Podemos proseguir el juego incluyendo ficas verdes y una barrera verde (figura 13c) Qué fichas vamos a encontrar en I, II, III, IV, V, VI, VII, si para empezar todas las fichas han sido colocadas en el II lado derecho ?

El mismo juego pero disponiendo las filas como lo indica la figura 14a y 14b.

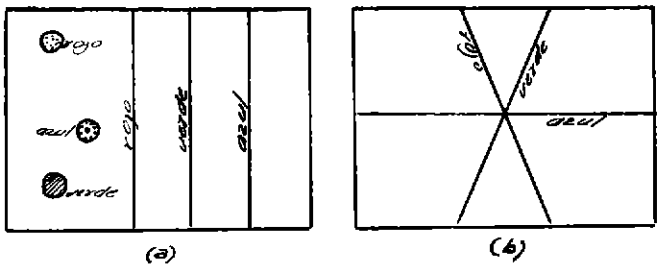


Figura 14

Con los niños que se sienten contentos con este género de problemas podemos pedirle que interprete las notaciones numéricas utilizadas para designar las regiones que figuran sobre los diversos dibujos de las figuras 15a, 15b, 15c, 15d.

Complicamos el juego introduciendo las fichas del otro color por ejemplo azul, y una otra barrera, igualmente de color azul (figura 13a).

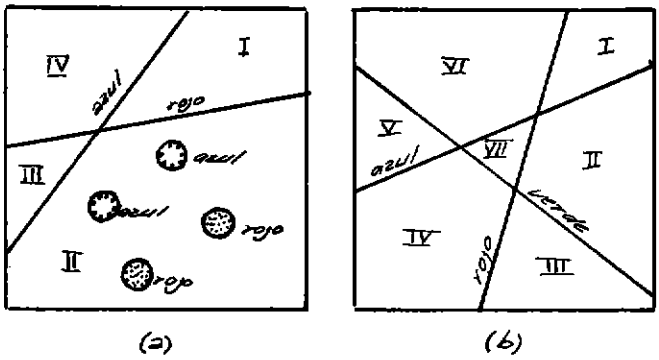


Figura 13

Las dos barreras (o filas) se disponen como lo indica la figura y, al iniciar la primera jugada, todas las fichas estan colocadas al lado derecho aparecen en el dominio marcado II.

Las fichas pueden desplazarse sobre la hoja pero, cada vez que una ficha salta una fila del mismo color que ella cambia de cara; cuando salta una fila de color diferente no cambia de cara.

Los alumnos desplazan las fichas respetando esta nueva consigna. Cuando los cuatro dominios esten ocupados por las fichas miramos el resultado.

en el II	azul	derecho
	rojo	derecho

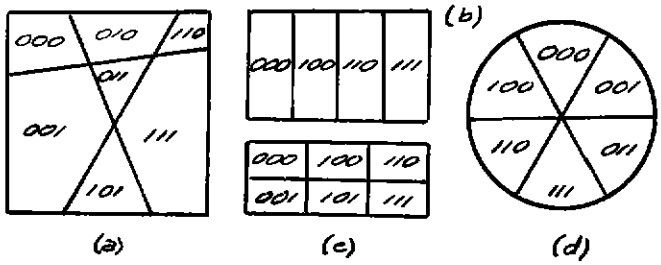


Figura 15

Observación 1: estos ejercicios de caracter matemático pueden estar acoplados con los ejercicios de razonamiento por deducción y de ejercicios de comunicación (práctica de la lengua) Podemos proceder así: el profesor hace fabricar dos figuras idénticas representando por ejemplo el dibujo (a) de la figura 15, figurando los trazos, las columnas de color diferente o recibiendo un nombre (la "columna verde", etc.) mientras que las regiones mismas no son marcadas por ninguna señal. Una de estas planchas es confiada a un primer equipo, la segunda a otro. Cada equipo dispone además de una "ficha" (moneda, borrador..). El equipo 1 coloca su ficha en una de las regiones y busca explicar de la manera más inteligible posible cuál es el emplazamiento escogido. El equipo 2 coloca su ficha en la región que parece ser la buena. Cuando la escogencia este hecha verificamos y comentamos las explicaciones dadas.

Observación 2: con los niños de maternal (sección grande) y de los cursos preoperatorios, podemos poner en obra ciertos de los juegos anteriores materializando sobre el piso o patio de recreo las barreras por los bancos,... etc., y tomando los mismos niños como fichas. Reemplazamos los colores por marcas distintivas (brazaletes) y alternándolo derecho/dorso hacemos corresponder por ejemplo, alternando con sombrero sin sombrero. Cuando un niño franquea la barrera llevando su marca distintiva si él tiene sombrero se lo quita, si no lleva sombrero se pone el que tiene en la mano.

Número de franqueamientos (par-impar)

Conservamos solamente las fichas rojas y trazamos sobre una hoja grande poligonal (C) cerrada tal como lo representa en la figura 16, así como las líneas rectas paralelas punteadas u, v, w, x, y, z. Colocamos una decena de fichas al lado derecho, en el interior de (C) y sobre las líneas u, v, w, etc.

La consigna es la misma que la del juego anterior, pero las fichas no pueden ser desplazadas sino sobre las líneas paralelas iendo de izquierda a derecha.

Después de haber efectuado los desplazamientos que deseamos, miramos los resultados. Las fichas en el interior de (C) estan todas derechas, las del exterior estan todas por el dorso.

Podemos completar el juego haciendo anotar el número de franqueamientos que debieros efectuar las diversas fichas para en -

contrarse todas a la derecha del dominio. Constatamos que todos estos números son impares.

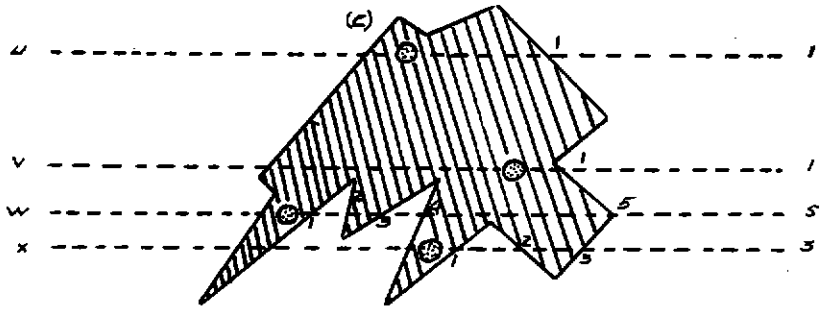
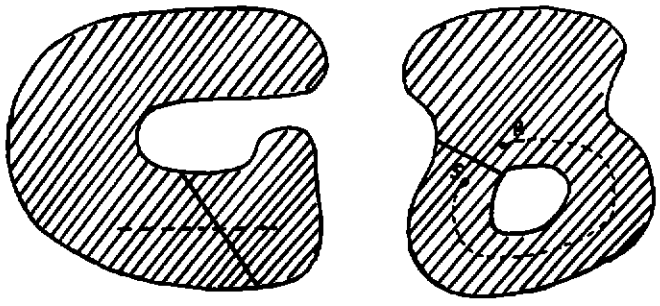


Figura 16

4. Noción de "hueco" - conección.

a. Imagenes.

Cortamos en una hoja de cartón de color un contorno cerrado simple tal que (L) (figura 17a) y lo disponemos sobre una hoja blanca. Repetimos la operación con un segundo contorno (L_1) y cortamos un "hueco" siguiendo la línea (L_2) interior a (L_1) (figura 17b)/



(a) (b)

Consideramos los dominios obtenidos en los dos casos (parte plumeada de las figuras) buscando explicar la diferencia que captamos intuitivamente entre los dos casos considerados.

Escogemos dos puntos A y B sobre la frontera (L), uniéndolos por un arco continuo en el dominio. Conferimos a este arco el status de frontera. Cualesquiera que sean las posiciones respectivas de A y de B, constatamos que dividimos en dos el dominio considerado. Si cortamos el cartón siguiendo la línea del arco obtenemos dos partes desunidas: la unidad del conjunto esta destruída.

Pasamos al caso (b) y hacemos lo mismo.Vemos que la frontera CD une el contorno interior al contorno exterior no crea un nuevo dominio. Si cortamos siguiendo el arco CD, el cartón queda , solidario. Encontramos siempre un cambio que permite ir del punto R al punto S sin atravesar la frontera (punteada sobre la figura 17b).

Disponemos entonces de un criterio para hacer la distinción, en los dos casos. Por otra parte, aparece que la distinción es topológica. Es suficiente para estar seguro comenzar el ejercici con una membrana de caucho.

Para indicar el tipo de propiedad que presenta un dominio , del tipo de (a), decimos que es simplemente conexo. En los otros casos tratamos con dominios que no son simplemente conexos.

Dicho de otra manera "simplemente conexo", en materia de superficies es sinónimo de "sin hueco", "todo de una piesa".

b. Ejercicios.

Presentamos a los alumnos un juego de cartones (figura 18)sobre los cuales el profesor ha dibujado un contorno cerrado delimitando, según los casos, regiones donde algunos son siplemente conexos, y otros no (un hueco, tres huecos, por ejemplo). Una o varias fronteras interiores complementan el dibujo. El ejercicio consiste en enumerar en cada caso las regiones interiores, al contorno. Para facilitar esta enumeración, el profesor puede mover a los alumnos a colorear cada una de ellas con un color diferente.

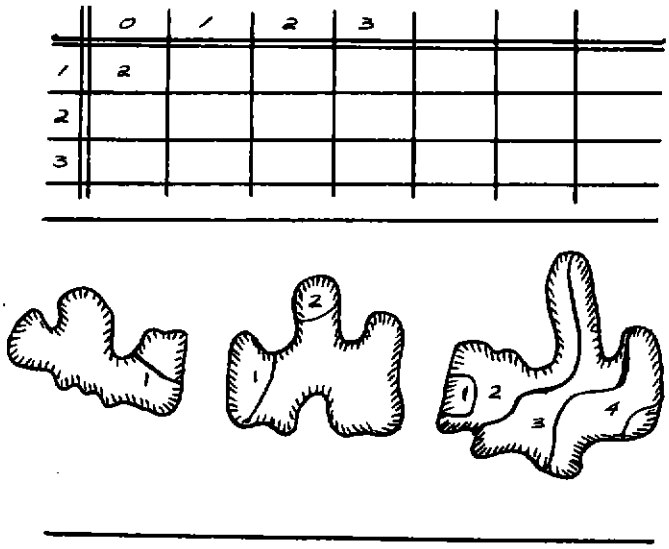
Al final del ejercicio, se establece colectivamente una pizarra recapitulativa cruzada en la cual una primera entrada es reservada al número de huecos, una segunda entrada al número de fronteras. El número de regiones esta inscrito en el interior , de las casillas.

	0	1	2	3	
1	2				
2					
3					

Observación: si es necesario hacerse sentir, con los niños, podemos introducir este género de ejercicios indicando que cada gran dominio es un campo cercado donde se encuentran animales , que se pueden materializar por peones de diferentes colores. El profesor encuentra que hay que aislar ciertos de los animales (por ejemplo los peones rojos) de manera que estan separados todos por lo menos por una barrera (una frontera). Como hacerlo?

Figura 18

Nota: Imaginaremos que el contorno cerrado exterior representa, la playa de una isla que comprende o no lagos interiores.Las líneas interiores (uniendo dos puntos de la playa de la isla o los lagos) constituyen las fronteras que no pueden ser franqueadas directamente pero que a veces pueden ser contornadas.



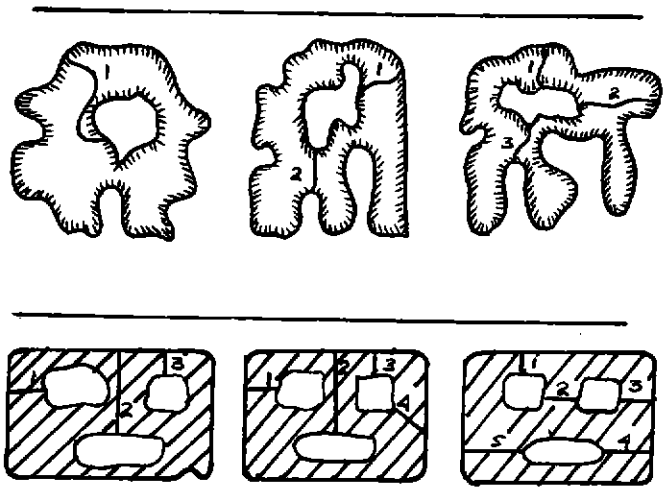


Figura 18

El caso de los dominios que no son simplemente conexos se - presentan cuando en el campo, hay una u varias balsas cuyos contornos equivalen a una frontera interior.

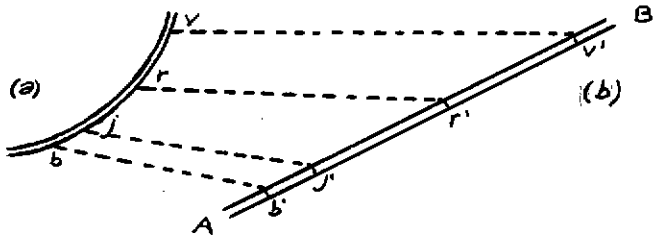
5. Orden.

Experiencias e imagenes.

- Hacemos cuatro nudos sobre una banda elástica y colocamos, en cada uno una hebra de hilo de algodón de color, por ejemplo, azul (b), amarilla (j), roja (r), verde (v).

Colocamos la banda sobre una plancha recubierta de papel bla

co. Con un lápiz marcamos sobre el papel el trazo de la banda y señalamos los lugares de los hilos de algodón por un trazo al lado del cual indicamos la inicial del color del hilo (figura: 19).



Retiramos la banda y la colocamos a otro lado de la hoja estirándola y manteniéndola estirada con la ayuda de dos chinches A y B. Marcamos este nuevo trazo así que los emplazamientos b', j', r', v' de las bandas de color. Retiramos la banda y observamos el resultado.

Constatamos que el cuadrante de los colores se presenta en , el mismo orden en los dos trazados: "azul, amarillo, rojo,verde"

Podemos por ejemplo unir b y b', j y j', r y r', v y v' por los hilos los cuales no se cruzan.

Si trabajamos con niños muy pequeños, colocamos un borrador, de color en cada emplazamiento, atribuimos uno de los trazos a un niño, el segundo a otro y les indicamos en voz alta que colores encuentran cuando desplazan su mirada a lo largo de la ban-

da saliendo del azul (o del verde). Después de algunos ensayos, llegamos a una buena sincronización y se oyen las dos voces decir casi al mismo tiempo "amarillo - rojo - verde".

El paso del trazo (a) al trazo (b) puede ser considerado como el fruto de una transformación bicontinua. El orden tiene una inversión casi, es una propiedad topológica.

Pegamos sobre un cartón una tapa de caja cilíndrica paralelepipeda y fijamos un cordón en O al contacto de la pared de la caja y del cartón. Sobre el cordón cuya otra extremidad es libre son llevadas señales (puntos de color, etc.). Inicialmente el cordón y la caja estan dispuestos como lo indica la figura: 20. Reproducimos esta disposición en el tablero o sobre el cuaderno. Después enrollamos el cordón sobre el contorno exterior de la caja y marcamos los puntos a; b', en contacto a,b con dicho contorno. Reportamos estos emplazamientos sobre el dibujo inicial (N.B.

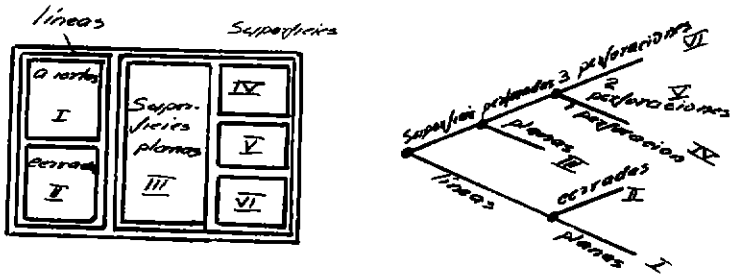
El profesor marca entonces dos puntos m y n sobre la línea que representa el cordón. Los alumnos deben adivinar sin hacer la manipulación, en qué sitios aproximativos del contorno de la caja van a aplicarse los puntos m y n cuando el enrollamiento.

tra parte las líneas cerradas (r). Podemos igualmente distinguir las líneas continuas (m) y las líneas discontinuas (c).

Si retenemos las superficies, podemos hacer una división en dos clases de equivalencia: superficies planas (n) por una parte, y superficies perforadas (j) por otra parte; estas últimas, pueden ser subdivididas en tres clases : superficies de una perforación (g), de dos perforaciones (j), de tres perforaciones : (i).

Los niños encontraran a veces clasificaciones diferentes completamente legítimas ("puntos", "redondeados", "en zig-zag"), etc.

Podemos aprovechar de esos ejercicios para poder poner en evidencia la noción de conjunto y lógica de "clases encajadas" , pueden ser representadas por los esquemas del tipo "cajones" o del tipo "árbol" (figura 21).



Los números señalados en números romanos ponen en evidencia, la correspondencia término a término entre las casillas del esquema "en cajones" y las casillas del esquema en árbol.

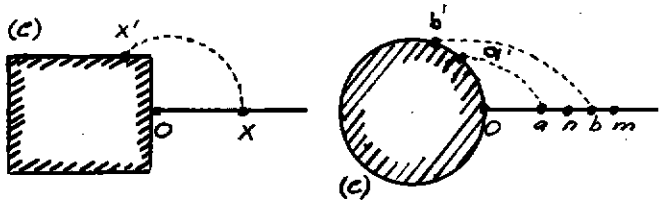


Figura 20

6. Recapitulación general-

a. Clasificación de figuras siguiendo los criterios topológicos.

Damos al estudiante una serie de cartones donde cada uno reproduce uno de los dibujos que figuran sobre la plancha adjunta (figura 20).

Se le pregunta la clasificación de estos cartones siguiendo, uno o varios criterios de su escogencia.

Las clasificaciones posibles son múltiples.

Algunos niños consideraron una distinción entre líneas (ex : a) y superficies (ex : g).

Si impedimos después que las líneas, se puedan colocar conjuntamente las que son abiertas (b), entonces reagrupamos por o

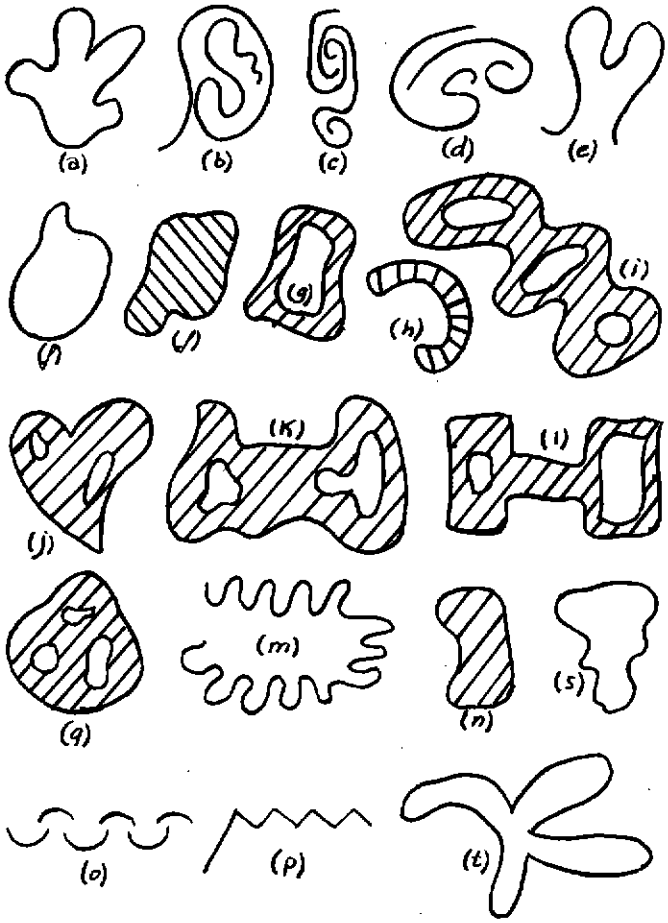


Figura 22

b. El juego de Conway[1].

Este juego está propuesto aquí porque presenta los aspectos, topológicos y permite poner en obra, bajo una forma muy "exitante" para el espíritu, algunas de las nociones vistas anteriormente.

1. Este juego a sido imaginado por el matemático John Canway y y ha sido el objeto de un artículo de la revista americana The Scientific American d'octobre 1970.

El conjunto de casillas de un tablero de ajedrez puede ser, considerado como formación de un "entrelazamiento de vecindades.

Son consideradas como vecinas dos casillas que tienen en común al menos una arista o vértice.

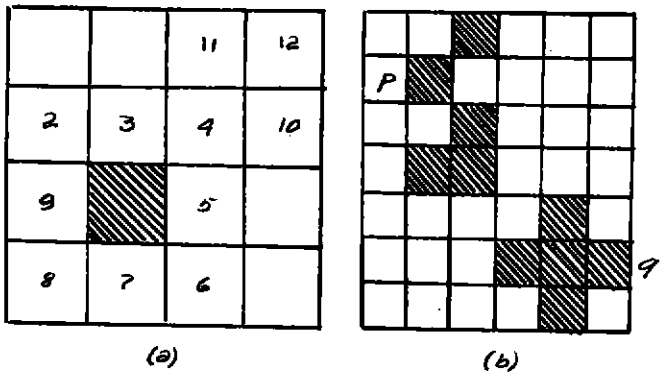


Figura 23

Por ejemplo, la casilla plumeada (figura 23a) tiene por vecinos las casillas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9. No tiene por vecinas las casillas 11, 12, 13.

Consideramos que cada casilla puede ser ocupada por la célula elemental de un hipotético organismo viviente. Muchas células elementales son consideradas como parte de un mismo organismo a partir del momento que ella forme una cadena continua de vecinos (configuraciones p o q de la figura 23b.).

Imaginamos por otra parte que estos organismos se evalúan de acuerdo con las "leyes genéticas".

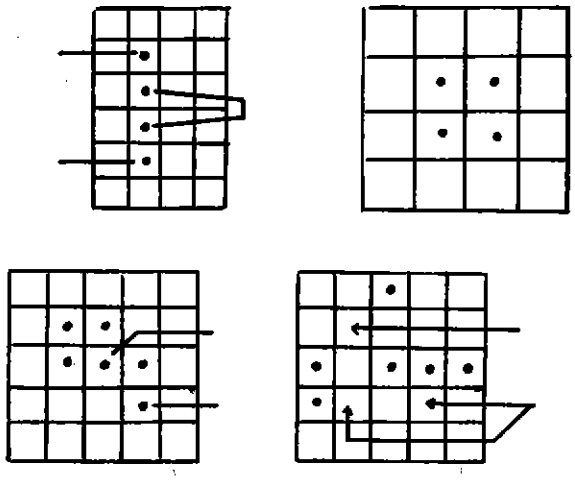
Estas leyes son las siguientes:

A cada etapa del desarrollo del organismo, desarrollo que se

efectua por pasos:

- Toda célula que tiene dos o tres vecinos sobrevive y pasará a la etapa siguiente;
- Todas las otras células mueren y desaparecen.
- Cada vez que en el seno de un vecindario un lugar queda libre entre tres células vecinas, y solo tres, aparece una célula nueva.

Ejemplos :

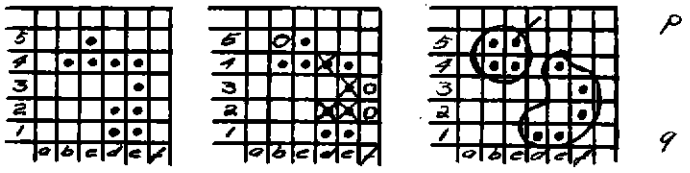


El juego consiste en dar un organismo de partida, es decir una cierta configuración (estado 1). Aplicamos una primera vez las leyes genéticas anteriores que operan sobre el estado 1 como lo haría un operador complexo, arrebatando eventualmente las superposiciones de células y de apariciones de células.

Pasamos así al estado 2. Aplicamos las leyes una segunda vez,

dando un estado 3 y así sucesivamente.

Es un juego estimulante porque la regla es relativamente compleja y conduce a los tipos de evolución diversa, sea que tienda hacia una forma estable (que vuelva a encontrar periodicamente la misma forma). Pero el juego necesita una gran atención , precisamente a causa de la complejidad de la regla. En el plano pedagógico, este juego tiene el mérito de poner en evidencia la importancia de la configuración de salida sobre el resultado obtenido por la aplicación de una transformación. Se trata de cadenas "estado-operador-estado-operador-estado... " mucho menos, monótono que los que se obtienen comunmente jugando con los bloques lógicos, por ejemplo. Para jugar a este juego conviene proveerse de papel cuadriculado y proceder así: (figura 25).



Dibujamos la configuración de salida en dos ejemplares marcando las células por discos negros. El primer ejemplar sirve , de referencia, el segundo sirvede "borrador" para la realización de la transformación.

Sobre este segundo ejemplar, pasamos todas las células revi-sando para ver si deben desaparecer o sobrevivir. Cuando debe una desaparecer se marca con una cruz.

Ejemplo : (c, 5) survit : tiene tres vecinos (discos negros),
(b, 4) " : tiene dos vecinos,
(c, 4) " : tiene tres vecinos,
(d, 4) " : tiene cuatro vecinos, ...
(e, 4) " : tiene dos vecinos,
(e, 3) " : tiene cuatro vecinos, ...
(d, 2) y (e, 2) mueren : tienen cuatro vecinos, ...
(d, 1) y (e, 1) sobreviven : tienen tres vecinos.

Examinamos ensegida los nacimientos. Se produce uno cuando , hay un lugar libre entre tres células.

Este es el caso de (b, 5), (f, 3), (f, 2). Coloco discos de color blanco en los emplazamientos correspondientes.

Se traslada allí bajo la forma de discos negros las células que han sobrevivido y las que han aparecido. Este nuevo dibujo es tomado como punto de partida para una nueva transformación.

La comparación de los estados 1 y 2 muestran que el organismo ha evolucionado profundamente de una generación a otra. En efecto, según nuestro criterio, ha dado origen a dos organismos,

distintos marcados p y q sobre la figura.Es posible que al "golpe" siguiente estos dos organismos siguientes se conviertan en uno solo.

Podemos igualmente jugar sobre un tablero de ajedrez utilizando fichas pero teniendo mucho cuidado para no equivocarnos porque entonces no se conserva el trazo de los estados sucesivos.

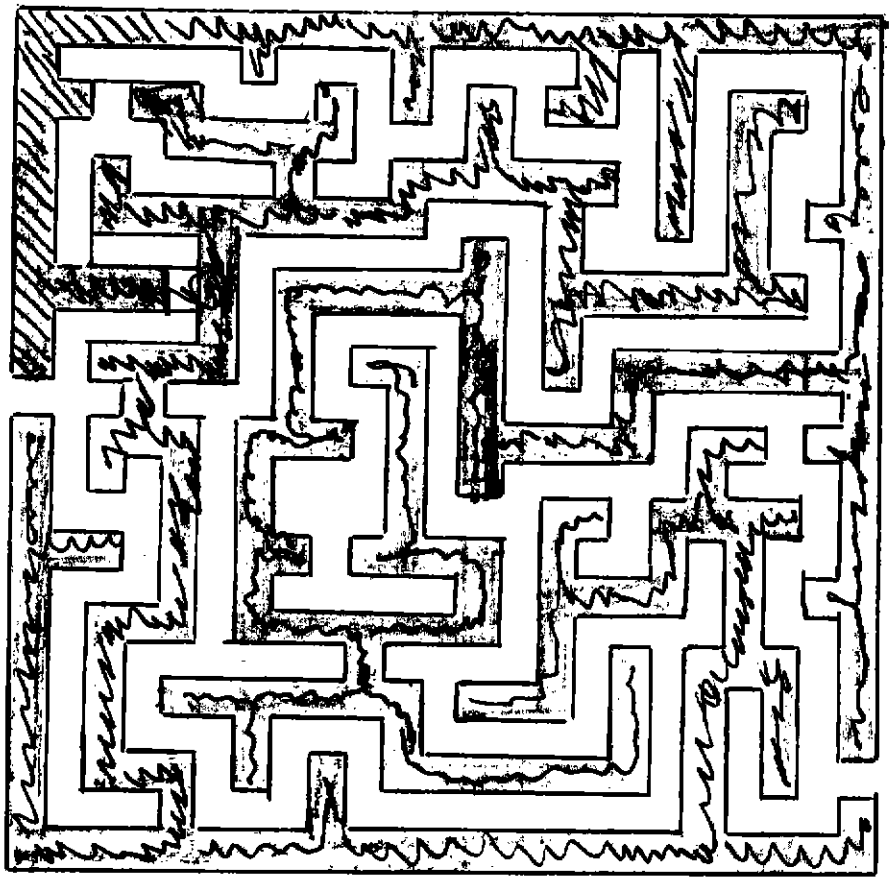
c. Laberintos.

Los laberintos son exelentes ejemplos de figuras topológicas colocamos indiferentemente los trazos sobre una hoja ordinaria de papel o sobre una membrana de caucho. Veamos aquí un primer, ejemplo a propósito del cual podemos imaginar el ejercicio siguiente:

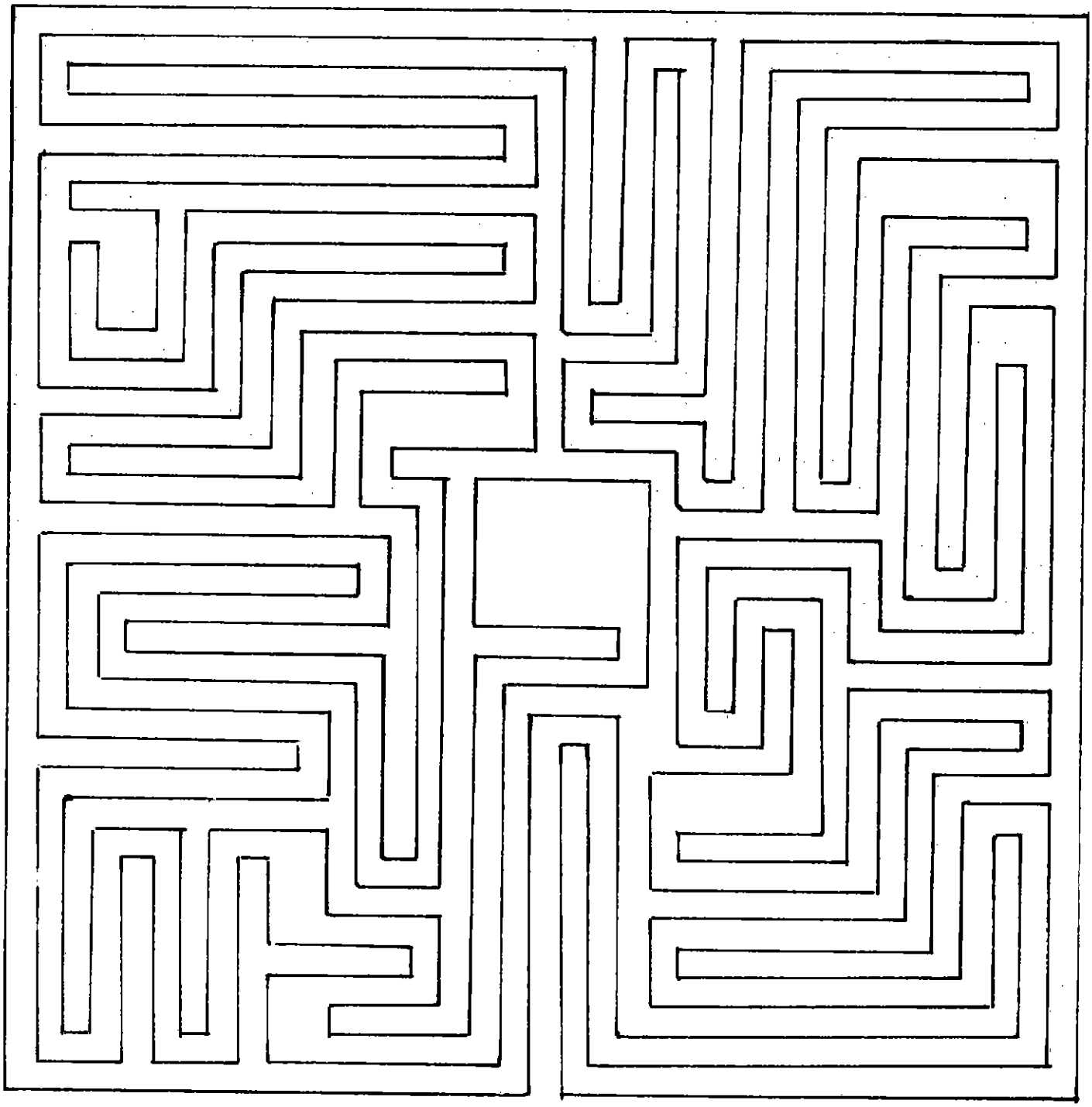
Observemos los laberintos representados sobre la figura 26a donde la entrada esta situada en A y la salida en B.

- encontrar el intinerario que permite ir de A a B;
- Siga con un lápiz la pared situada a su derecha del recorrido que usted ha efectuado. Haga lo mismo con la pared situada a su izquierda entrando.

Deduzca de eso que una persona a quien se le hayan vendado - los ojos al entrar en A habría podido sin dificultad encontrar, la salida.



Un segundo ejemplo de laberintos es el formado por la figura 26b.



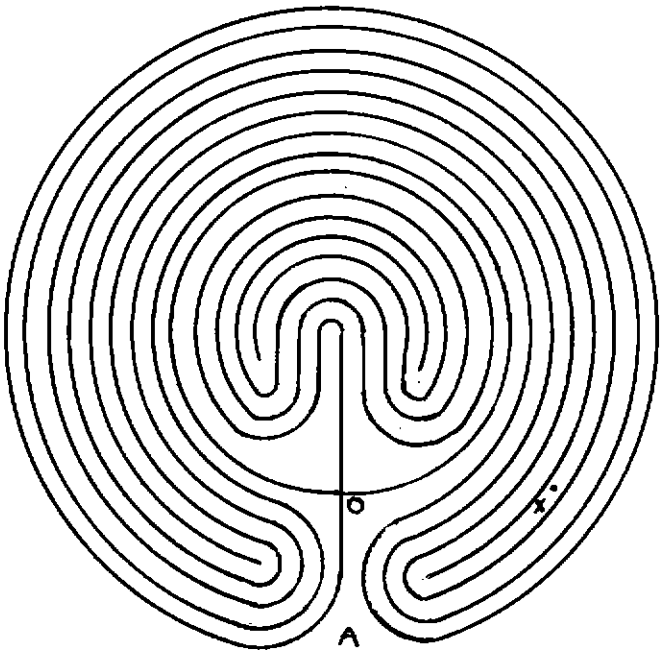
Después de haber observado el dibujo, responda a las siguientes preguntas :

a) Cuántas líneas simples cerradas lleva el dibujo ?

b) Puede definir un "interior" y un "exterior" ?

c) Disponga un hilo que atraviece el dibujo de lado a lado y sin hacer nudo indique por las diversas disposiciones del hilo el número de intercesiones del hilo con las líneas del dibujo . Qué constata usted? Habría podido prever este resultado ?

Un tercer ejemplo de laberintos esta formado por la figura : 26c. Es de una estructura diferente a las anteriores. Esta compuesto de cuatro arcos de los cuales una extremidad esta situada en O, mientras que la otra esta libre.



Con los alumnos, podemos realizarlo con la ayuda de cuatro , largos hilos de color que se anudan conjuntamente en O. Dispone mos en seguida entre dos hilos, por ejemplo en X, una ficha. En qué sentido salimos para encontrar el camino más corto posible, a la salida A ?

Observación : La fabricación de los laberintos puede dar lugar a los ejercicios manuales interesantes. Los niños los construyen en plastilina o en pasta de moldear en el interior de la tapa de una caja grande de cartón por ejemplo. Una bola debe poder desplazarse fácilmente a lo largo de los caminos previstos; debemos poder colocar en el fondo de las ranuras hechas con pasta un cordón flexible que siga todos los meandros del camino pemitiendo ir de la entrada a la salida del laberinto. Naturalmente llamaremos este cordón "hilo d'ariane".

Para la confección del primer laberinto es bueno, dar a los niños un modelo, por medio del cual cada niño podrá inventar un laberinto de su preferencia, esto le permite poner en práctica, sus actividades creativas.

PROSPECCION DEL DOMINIO
TOPOLOGICO: VOLUMENES

1. Generalización de las nociones del capitulo III "el espacio a tres dimensiones" (volumenes).

Hasta aquí hemos fijado nuestra atención sobre el espacio a dos dimensiones representadas por la pared de un balón, la pared de una cámara de aire, el plano de una tabla o de una hoja, de papel. Dicho de otra forma nos hemos interesado por las superficies.

La noción de superficie es intuitiva y no hemos tratado de precisarla.

En efecto, los objetos son los volumenes - tienen siempre espesor - son conjunto de "puntos" dispuestos "en todo sentido" y que flotan en el espacio (denominado espacio "a tres dimensione

Nuestra percepción es tal que no vemos ni tocamos los objetos sino las superficies que los delimitan. Pero esto no nos impide construir la noción extremadamente compleja, desde el punto de vista perceptivo, de volumen a la cual vamos a consagrar, ahora un corto capítulo.

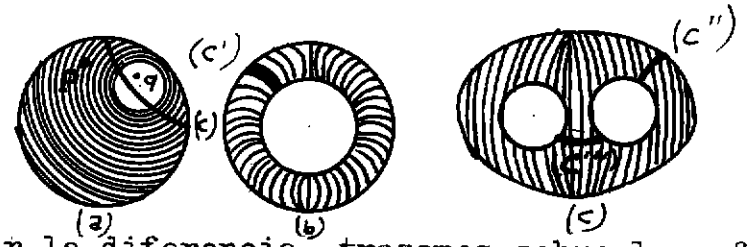
Cuando nos ocupamos de volumen y de espacio a tres dimensiones, la equivalencia de la membrana de caucho nos es dada por la pasta de moldear.

Tomamos pues un poco de pasta y la rodamos en las manos, transformandola en una bola (esfera).

A partir de esta bola, deformandola sin romperla, podemos formar elipsoides, cilindros, paralelepipedos, poliedros, y reproducir todas las formas que queramos: papa, rosca, etc.

Los diversos volumenes obtenidos son topológicamente equivalentes.

Por el contrario, la transformación considerada no nos permite pasar de la esfera a un volumen que tenga la forma de una corona (figura 27b).



Para precisar la diferencia, trazamos sobre la esfera representada sobre la figura 27a una línea cerrada simple (C) y dos puntos p y q de lado y lado de esta línea (C). (C) se comporta para la superficie de la esfera como una frontera y delimita , sobre ella dos regiones, una interior a la línea (C), otra exterior. Seccionamos ahora la bola de pasta con una herramienta guiandonos por la línea (C). Ya no tenemos un volumen único sino dos volumenes distintos. La superficie sobre la cual se ha hecho el corte constituye una superficie frontera entre las do partes.

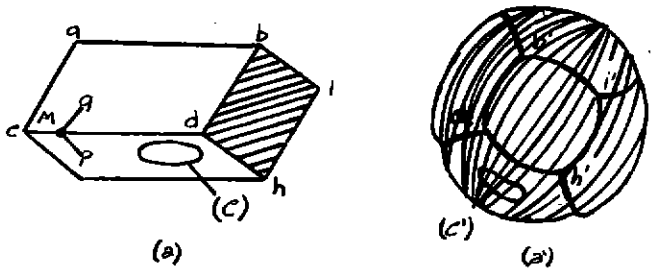
Por el contrario la línea (C') en torno de la figura 27b no delimita la superficie de la figura en dos regiones y si seccionamos la figura siguiendo (C') estaremos siempre en presencia, de un volumen único.

Disponemos así de un criterio para distinguir volumenes topológicamente no equivalentes.

Podemos además generalizar. La figura 27c presenta un volumen de dos perforaciones. Constatamos que podemos hacer dos secciones - por ejemplo siguiendo (C'') y (C''') - por lo tanto , sin destruir el caracter el caracter de unidad topológica del objeto considerado (utilizar pasta de moldear para "ver" mejor, el fenómeno).

Pasamos a los volumenes usuales.

Consideremos por ejemplo una caja paralelepípeda tal como, la representada en la figura 28a.



Cuando recorremos con la mirada y con la mano la superficie, distinguimos las caras que lo componen, por ejemplo la cara cdh

g que forma la parte superior de la caja, la cara abdc la cual forma una de las caras laterales. Son igualmente presentadas l las líneas observables: líneas simples cerradas que sirven de frontera a estas caras diferentes.

Los puntos de una frontera, a diferencia de los puntos de una línea tal como (C), tienen vecinos en las caras adyacentes , por ejemplo M tiene por vecinos p y q (p ε cara cghg, q ε cara abdc).

Entre los puntos de la frontera, algunos son observables porque estan situados en el punto de unión de varias fronteras.

Siguiendo la terminología corriente hablamos de caras, aristas y cimas.

Examinamos una transformación topológica imaginando que las caras estan constituidas por membranas de caucho cuyos bordes , hemos pegado de dos en dos siguiendo un apareamiento análogo al al que realizamos cuando fabricamos un balón de football.Proveemos esta "vejiga" de una válvula e inflámosla.

Las caras se ladean, las aristas se doblan, los vértices se aplanan y se obtiene finalmente la circunferencia de la figura: (a') sobre la cual encontramos ocho puntos a', b', c',... k' trasformados de los puntos a, b, ... k, la línea cerrada simple (C') trasformada de (C), etc.

Las relaciones topológicas son conservadas: a',b',c'd', se

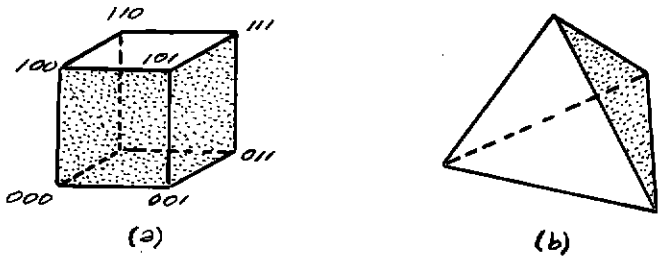
encuentran en el mismo orden con relación a : a,b,c,d; (C') esta situado en el interior de la región c'd'g'h'como (C) esta situado en el interior de la región cdgh, etc.

Un gran parentesco aparece así entre los problemas topológicos encontrados a propósito de las superficies (espacio en dos dimensiones) y aquellos que encontramos a propósito de los volumenes (espacio en tres dimensiones).

2. Ejercicios

a. Dibujos sobre un cubo.

Tomamos una caja cúbica o paralelepípeda y numeramos sus cimas como lo indica la figura 29a.



Llamamos "vecinos" de una cima cualquiera los que están directamente ligados a la cima en referencia. Por ejemplo la cima (100) tiene por vecinos (000), (101) y (110).

Tomemos a su turno cada una de las cimas y establezcamos la lista de sus vecinos. Observemos esta lista y y hagamos eventuamente observaciones a su propósito. Busquemos una manera razona

ble de presentar los resultados.

b. Vecinos sobre un tetraedro.

- Trasponga el ejercicio anterior al tetraedro de la figura: 29b;

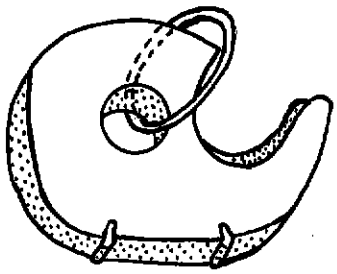
- Trace sobre la superficie de un balón, de una manzana, etc El conjunto de líneas y puntos corresponden al conjunto de aristas y de cimas del tetraedro considerado. (Si tiene dificultades para comprender la pregunta expuesta anteriormente imagine, lo que pasaría si tuviera la posibilidad de "inflar" el tetraedro para darle una forma esférica).

c. Volumenes perforados y no perforados.

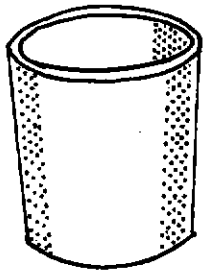
La distinción entre volumenes perforados y no perforados se hace facilmente por generalización, de las superficies perforadas y no perforadas ("simplemente conexas").

Reunimos un número de objetos usuales de los cuales algunos, son perforados y otros no: una tapa de estilógrafo, un royo de cinta pegante, un corcho, un vaso, una botella, un embudo, una sortija, un collar, un brazalete, un gorro, una llave, unas tijeras, un estuche para anteojos, un cenicero, las dos partes de una caja de fósforos (la "jaula" y el "cajón"), etc.

Figura 30



(a)



(b)

Nos proponemos clasificarlos en dos categorias: perforadas, y no perforadas. Para ésto podemos valernos del siguiente criterio: si podemos introducir la extremidad de un hilo por cualquier parte y realizar con él un anillo carrado que no pueda , ser desprendido del orificio sin ser cortado, tratamos con un volumen perforado. De otra manera no será perforado, así como en el caso de una botella por ejemplo, tiene la apariencia.

CAPITULO V

PLANOS Y ESQUEMAS TOPOLOGICOS

Se dice que lo propio del pensamiento es el "trabajo" sobre las representaciones.

A lo largo de los capítulos anteriores, hemos recurrido a las representaciones que han tenido en cuenta las sujeciones del libro, siendo todas las representaciones planas realizadas bajo la forma de trazos de "puntos" y de "líneas".

A nivel "natural" donde colocamos en la presente obra, la topología no puede pasar de imagenes representativas, de esto que hemos llamado siguiendo la terminología de Evariste Dupont, "imagenes". Inversamente la "técnica" del trazado de imagenes representativas han necesitado de la infraestructura "topo-lógica que le provee las nociones topológicas que hemos estudiado hasta aquí.

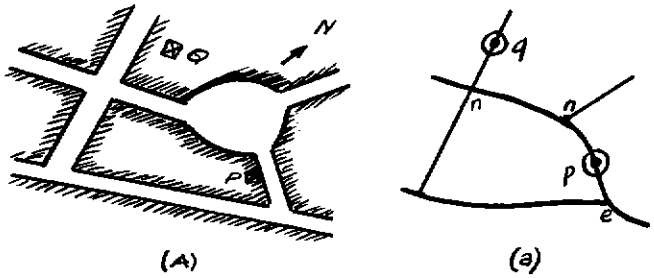
En el presente capítulo nos proponemos desarrollar este aspecto de la topología, aspecto que nos parece particularmente , apto para favorecer el desarrollo de la inteligencia del niño.

1. Planos, esquemas y representaciones cartográficas.

Observemos una fotografía aérea de una porción de espacio, por ejemplo una parte de la ciudad con casas, jardines y calles (figura 31A.)

Nos interesamos particularmente en las calles. Estan organizadas de tal manera que podemos dirigirnos de una casa cualquie

ra de la ciudad, por ejemplo P, a otra casa cualquiera, por ejemploQ. Supongamos que yo quiero explicarle a un amigo que vive en P el camino que debe seguir para venir a visitarme en Q.



Yo le muestro sobre la fotografía la disposición de los lugares y, con la ayuda de un lápiz, materializo los caminos que él puede tomar para ir de P a Q.

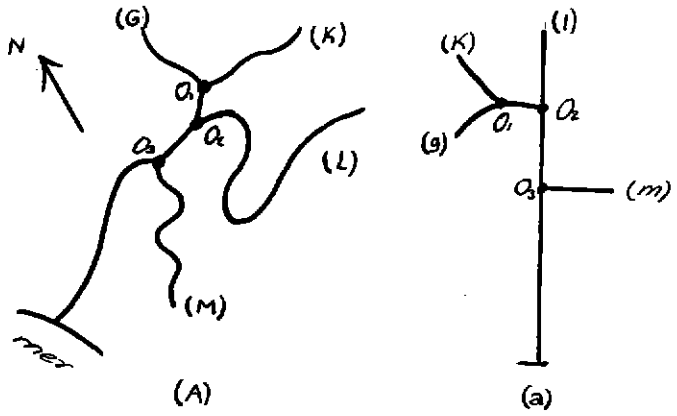
Sin embargo mi amigo, no se fía de su memoria, y se propone, transcribir sobre una hoja de papel lo esencial de las informaciones que le serán necesarias para encontrar su camino. Lo hace con la ayuda de un esquema del género de la figura 31a donde consignó nada más que lo esencial, es decir la disposición de las calles unas con relación a otras, cada calle está representada por un segmento de línea (arco) y cada esquina por el cruzamiento de dos líneas, mientras que los emplazamientos de las casas están marcados con la ayuda de puntos situados sobre la línea representante de la calle que bordean estas casas.

La figura 31A es un plano de la parte de la ciudad (barrio), (el espacio a representar esta reducido a una superficie plana) mientras que la figura 31a es un esquema de la red de comunicaciones.

Entre las líneas que he trazado sobre el plano para indicar, los caminos a seguir y las líneas del esquema hay una correspondencia topológica. Las dimensiones no estan representadas (el esquema no esta a "escala"), la orientación tampoco (el esquema no lleva indicación conserniente a la dirección de norte). Por el contrario, el orden esta representado así que las posiciones respectivas (del tipo interior/exterior) por líneas y puntos. El esquema aparece como un medio cómodo de sintetezar un conjunto de información de caracter topológico.

El "plano" del métro constituye un buen ejemplo de tales esquemas. Indica la sucesión de las estaciones respectando su orden así que los puntos de cruzamiento de líneas donde se forman los correspondientes.

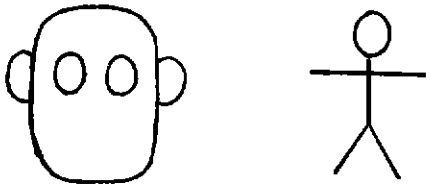
Consideremos otro ejemplo, el de una fuente fluvial.



El plano, realizado a escala y orientado, da una representación relativamente del recorrido del río y de sus afluentes (figura 32A).

El esquema de la figura 32a le es topológicamente equivalente. Es esto, en cualquier especie, un "esquema" de "estructura" dónde no figura esto que es pertinente para la utilización de, lo que se quiere hacer.

Podemos observar aquí, sin insistir en esto porque es el sujeto muy vasto, que las representaciones figuradas que realizan los niños cuando comienzan a dibujar se parecen a los esquemas.



(a) (b)

Así la figura 33a representa adecuadamente para el niño la cabeza de un hombre porque ella es topológicamente equivalente, al conjunto de líneas de la cara en las cuales él fija su atención: el contorno de la cara es cerrado; el contorno de los ojos igualmente; cada uno de estos dos contornos esta en el interior del contorno de la cara, están separados. El contorno de las orejas es igualmente cerrado, cada uno de ellos esta situa-

do en el exterior del contorno de la cara pero atados a él.

De la misma manera la silueta de la figura 33b representa adecuadamente un hombre, puesto que allí encuentra lo esencial , de la arquitectura humana.

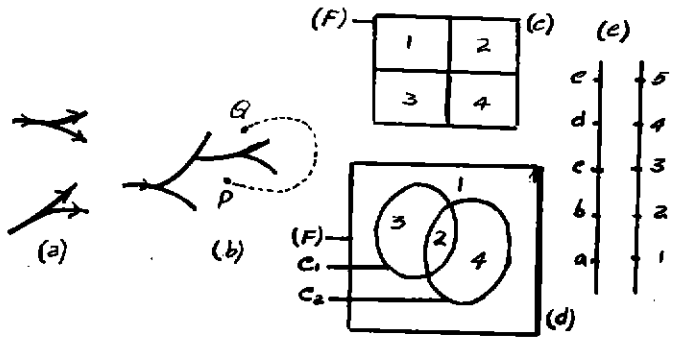
2. Esquemas de base

Entre los esquemas a los cuales nos referimos sin cesar, no solamente en matemáticas sino en la vida corriente, estan aquellos que vienen constantemente sea individualmente, o en planos de esquemas más complejos.

Pasemos revista a algunos esquemas de base.

Podemos empezar por la ramificación binaria (figura 34a) que es la versión topológica de la alternativa. Así una ramificación, un camino "bifurcado", es decir se parte en dos.

Las ramificaciones pueden ser conjuntos en serie. Obtenemos, entonces árboles o arborecencias (figura 34b).



La característica de los árboles es la de no comportar ninguna línea cerrada. En torno a un árbol el espacio es simplemente

conexo: siempre podemos encontrar un camino para ir de P a Q evitando las ramas del árbol.

Viene en seguida la cruz, asociada a una frontera simple cerrada (figura 34c). La cruz descopada, en el interior del dominio simplemente conexo cercado por la frontera (F), cuatro regiones. Para ir de una región a otra, tiene que atravesar al menos un brazo de la cruz, siendo entendido que en el punto de intersección I de aquellas dos ramificaciones estan consideradas, las dos.

Este esquema no es otro que el diagrama de Carroll.

El diagrama de Euler-Venn (figura 34d) tiene propiedades comunes con el anterior: Los dos círculos (C_1) y (C_2) dividen también el dominio interior F en cuatro regiones.

Un ejercicio útil con los niños que comienzan a utilizar tales diagramas es el de hacerles descubrir su estructura común haciendo establecer una correspondencia uno a uno entre las regiones de (c) y de (d).

Podemos igualmente mencionar la escala, realizada por marcas distintas inscritas a lo largo de una línea (figura 34e). El orden es en general indicado por referencia al orden de los números naturales (1, 2, 3,...) o al orden alfabético (a, b, c,...)

3. Gráficos planos topológicos

Volvamos al esquema (figura 31a) el cual nos permite repro -

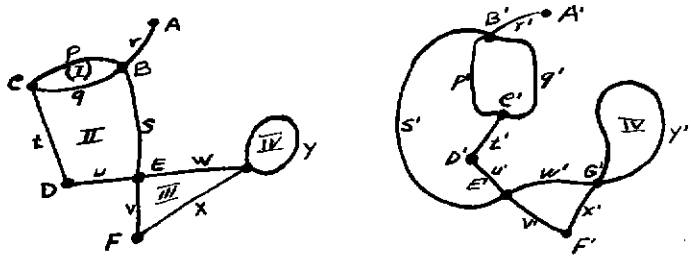
ducir lo esencial de la información presentada por un plano.

Constatamos que este esquema esta constituido por porciones, de líneas. Estas líneas se encuentran en los puntos para formar encrucijadas o cruzamientos. Podemos localizar un punto situado sobre una línea indicando su posición en relación a los dos puntos notables (cruzamiento) que lo enmarcan. Por ejemplo sobre - el esquema 31 (a) el punto p esta situado entre o y e, o, en otros términos, sobre el arco oe.

Se trata de una figura linealmente conexa, siguiendo los arcos sucesivos, saliendo de no importa que punto situado sobre una línea a no importa que punto igualmente situado sobre una línea: es esta una figura "de un solo mantenedor".

Nos proponemos estudiar sistemáticamente este género de esquemas.

a. Iniciemos precisando la terminología que emplearemos.



Llamaremos"cima" todo "punto notable" de la figura, es decir todo punto donde se encuentren líneas o que constituya una ext-

tremidad de líneas.

Sobre la figura 35a, las cimas estan indicadas por las letras mayúsculas, de A a G.

Llamaremos "arista" o "arco" toda línea que una dos puntos - consecutivos. Por ejemplo r es un arco. Une A a B que son las , cimas consecutivas. Pero DG no es un arco porque entre D y G se encuentra una cima E. El es caso donde la primera cima es con - fundida con la primera (anillo GG de la figura) el arco (o arista) toma el nombre de"anillo". Sobre el esquema hay un solo anillo: el recorrido cerrado BpCqB no constituye un anillo porque, entre By B se intercala la cima C.

En el esquema las aristas estan representadas por letras minúsculas, de r hasta y.

Observamos que allí puede haber muchos arcos o aristas entre el mismo par de cimas. Este es el caso de p y q los cuales unen B a C (o C a B).

En el ejemplo escojido, las cimas consecutivas son consideradas en un orden cualquiera: AB o BA, por ejemplo. Consideramos, pues los pares de cimas consecutivos y no los anillos. Si lo - consideramos de otro modo, el grafico será orientado y AB, por ejemplo, deberá ser distinguido de BA.

En fin, consideramos las porciones de espacio delimitadas , por las líneas del gráfico. Llamamos estas porciones de espacio regiones", "caras", "dominios" o "pays". En el gráfico de la fi

gura 35a, las regiones estan representadas por por los números, de (I) a (V). La región (V) es la región exterior a todas las , líneas del gráfico. Olvidamos frecuentemente considerar esta región, sobre todo cuando se utiliza el término de"cara", porque una cara evoca una porción cerrada de espacio. No obstante la consideración de esta región es esencial. Ella responde en efecto a la definición general: perteneciendo a una región todos , los puntos que se pueden unir entre ellos por un arco simple - sin haber atravesado una línea del grabado.

En fin, siguiendo con la terminología utilizada por Bernard-Roy (Algèbre moderne et théorie des graphes, Dunod, 1969, p. 3 370), llamamos "grafico plano topológico" el tipo de figura que vamos a considerar.

En esta expresión, la palabra "graphe" se entiende en el sentido de"representación gráfica", la palabra "planaire" recuerda que esta representación es "plana"; En fin, el término "topologique" recuerda que nos interesamos solo en las propiedades topológicas, excluyendo la orientación, de formas y dimensiones , de la figura.

Es así que podemos utilizar indiferentemente para los problemas estudiados aquí las dos figuras 35a y 35b. Son topológica - mente equivalentes: son dos realizaciones distintas del mismo , gráfico.

En los ejercicios ulteriores, veremos que a veces se llega a

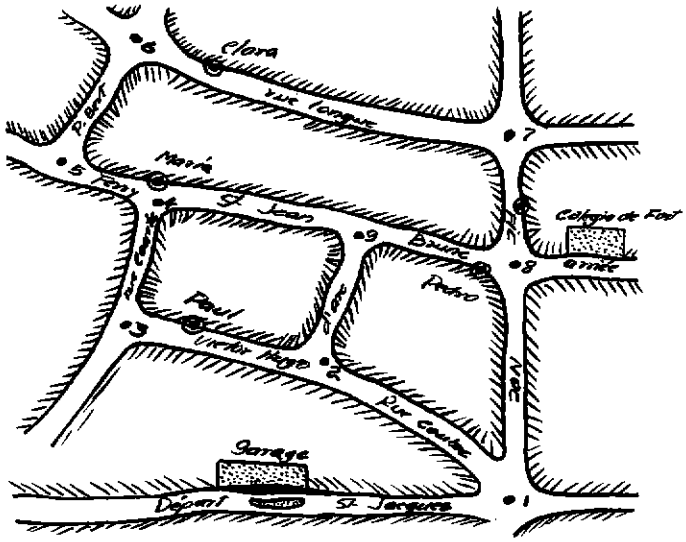
distinguir el número de aristas que salen o (llegan) a una misma cima: Daremos este nombre: "geado" de la cima[1]. En el gráfico de la figura 35a tenemos:

Cima A	:	grado uno
Cimas D y F	:	grado dos
Cima C	:	grado tres
Cimas B,E y G	:	grado cuatro

b. Proponemos algunos ejercicios que consisten en:

- Trasportar a un gráfico plano topológico la información dada por un plano.

- Utilizar un gráfico plano topológico.



1. Conviene anotar la convención siguiente: cuando se tiene un, anillo de cima A, las dos extremidades del arco formado por el anillo son contados separadamente, el grado de A es pues dos por un solo anillo.

- Reconocer los gráficos equivalentes.

Veamos primero un ejercicio de intinerario y orden.

El plano producido abajo representa una parte de un barrio , de una ciudad donde se encuentra el colegio de Fort.

Todas las mañanas, un carro escolar sale de su garaje, Boulevard Saint-Jacques. El debe pasar sucesuvamente por diversos puntos de la ciudad donde le esperan los alumnos que debe conducir en seguida al colegio de Fort. Los alumnos esperan por orden alfabético:

Claire, Jacques, Marie, Paul, Pierre.

El chofer tiene por consigna no pasar sino una sola vez por la misma calle.

1- Escriba la lista de las calles por donde usted pasaría sucesivamente si usted fuera el chofer del carro. Hay cero, uno o varios intinerarios responda la pregunta ?

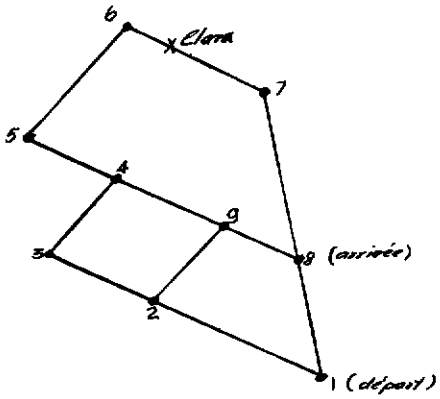
2- Indique el nombre del alumno que ha subido de primero al bus y el nombre del último que ha subido.

3- Compare su intinerario con el de su vecino.

4- Establezca el gráfico plano topológico correspondiente, considerando que las esquinas numeradas son las cimas y las calles las aristas.

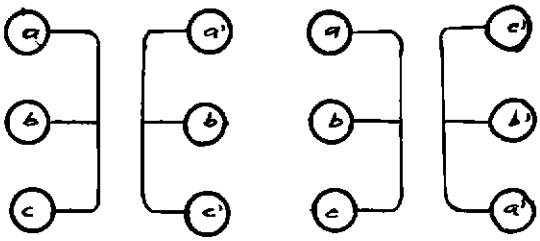
Observe que el problema establecido consta de ir de la cima 1 a la cima 8 pasando obligatoriamente por las aristas (2, 3) , (4, 5), (6, 7), (7, 8).

5- Complique el problema colocando los niños suplementarios, sobre las aristas (1, 2), (3, 4), (5, 6), (4, 9), (7, 8), (1,8) Entonces puede el carro hacer su recorrido sin tomar dos veces, la misma calle ?



Veamos un segundo ejercicio conocido bajo el nombre de pro - blema de Khalife de Bagdad.

Un cierto Khalife de Bagdad había puesto a los pretendientes de su hija, con el fin de probar su inteligencia, el problema siguiente.



Presentamos los esquemas de la figura 38.

Se trata en cada caso, unir con una línea continua cada cima como a a la cima correspondiente a' de tal manera que las línea trazadas no se encuentren con ninguna otra línea.

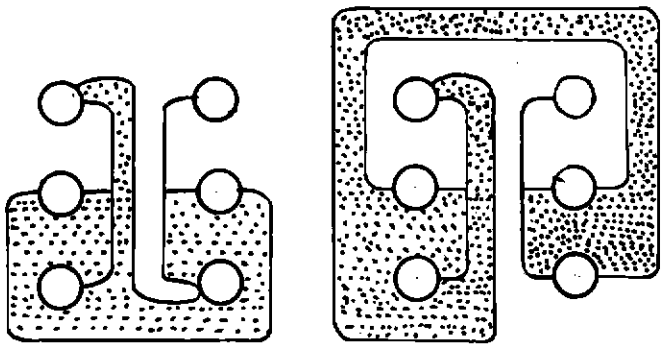
La solución es fácil de encontrar para el primer esquema. Indicado acá.

En el segundo caso, no hay solución, como se verifica en los dos casos particulares con la ayuda de los esquemas de la figura 39.

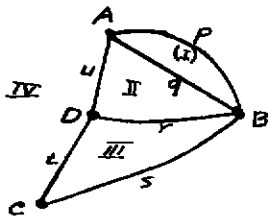
En los dos casos representados

c esta en el interior de la región plumeada,

c' esta en el exterior.



Un tercer ejercicio propone un método para "almacenamiento" con la ayuda de variables bulianas (variables de dos valores) , la información contenida en un gráfico plano topológico.



cimas

M	A	B	C	D
p	1	1	0	0
q	1	1	0	0
r	0	1	0	1
s	0	1	1	0
t	0	0	1	1
u	1	0	0	1

Consideramos el gráfico plano representado sobre la figura arriba caracterizada así:

Cimas S : A, B, C, D $|S| = 4$ (número de aristas = 4)

Arcos o aristas A: p, q, r, s, t, u $|A| = 6$

Caras F: (I), (II), (III), (IV) $|F| = 4$

El gráfico aporta un almacenamiento de información que nos i indican, partiendo, por ejemplo, de cimas tomadas dos por dos , cuyas aristas las unen.

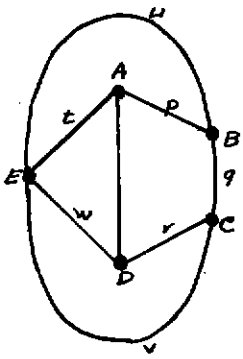
Esta información puede ser almacenada bajo otra forma utilizando una matriz buliana M constituida como está indicada en el tablero. Esta matriz se lee así p esta unida a A y a B, no está ligada a C y a D, r esta ligada a B y a D, no está ligada a A y a C, etc.

Totalizando los 1 inscritos en las columnas obtenemos el grado de la cima correspondiente:

grado A = 3, grado B = 4, etc.

El cuarto ejercicio es el inverso al primero. Damos (figura: 41) una matriz buliana, que permite encontrar el gráfico plano correspondiente.

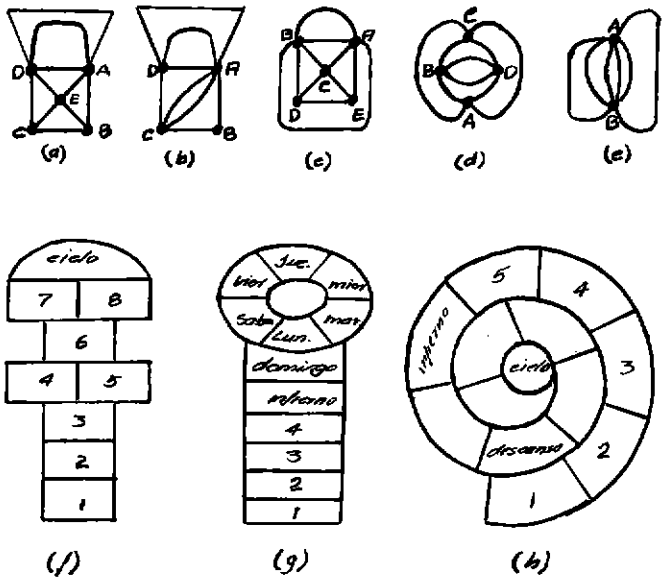
	A	B	C	D	E
p	1	1	0	0	0
q	0	1	1	0	0
r	0	0	1	1	0
s	1	0	0	1	0
t	1	0	0	0	1
u	0	1	0	0	1
v	0	0	1	0	1
w	0	0	0	1	1



Veamos (figura 41) una representación posible. (El esta re - cordando que para que el gráfico sea plano ninguna arista puede encontrar otra en otro punto que no sea una cima)

Observamos en seguida, el intinerario flechado sobre la ma - triz, que podemos recorrer de un solo trazo de lápiz el trayecto ABCDAEB.

El último ejercicio consiste en identificar por medio de una serie de planos topológicos (a), (b), (c), (d), (e), de la figura 42 aquellos que son equivalentes (las cimas están marcadas, por letras mayúsculas; un cambio de dirección no constituye una cima.



El juego de la marelle.

Indicamos por memoria el juego de la marelle al cual los niños juegan desde tiempo atrás y que podemos considerar como un juego de base topológica.

Existe con diversos nombres, pero el principio es siempre el mismo: marcar sobre el piso un conjunto de regiones (o casillas en los cuales el jugador debe empujar con el pie un tejo cada , vez, volverlo a cojer en un solo pie sin tocar las aristas de - las casillas, arrojar de nuevo con el pie el tejo fuera del cerco y regresar, siempre en un solo pie, hasta el punto de partida. Los números inscritos en las casillas prescriben en que orden deben ser abordadas.

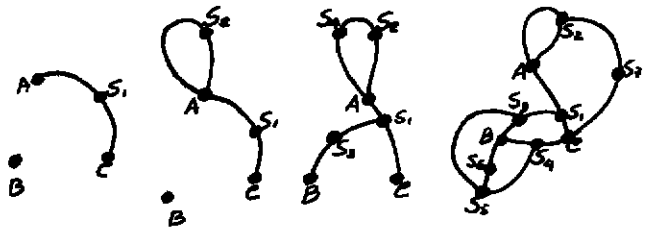
En ningún caso el tejo debe detenerse sobre una frontera y , el pie del jugador jamás debe ser puesto allí. En caso de in -- fracción a la regla, todo el juego debe volver a empezar. La salida es ganada por el primer jugador que alcance el "paraiso" o "cielo". La figura 42f representa una disposición frecuente de nuevas regiones, pero hay más complicaciones con el "infierno" y"descanso" (figuras 42g y 42h).

El juego de los Bourgeons.

Este juego, imaginado por Conway y Paterson, se juega entre, dos, el ganador es quien logre bloquear a su adversario.

Trazamos sobre una hoja de papel tres puntos A,B,C que pue - den volverse cimas de un gráfico plano topológico. Cada jugador traza un arco uniendo dos cimas. Sobre este arco agrega una cima. Utiliza pues dos cimas y crea un ("bourgeon"). El juego puede durar indefinidamente si no se limita a tres el grado de cimas(no más de tres arcos llegan a la misma cima). En un momento dado el gráfico esta saturado. El jugador que no pueda trazar , un nuevo arco pierde.

Sobre la figura 42bis, a manera de ejemplo, se ha trazado la sucesión de primeros gráficos correspondientes cada uno a un estado del juego, después el gráfico final (Cuando el juego esta, bloqueado).



c. Formula de Euler.

El matemático Euler (1707)-(1783), quien es considerado como un precursor de la topología, ha estudiado los resultados , que se encuentran entre los números de caras, aristas y cimas , de los pilíedros y ha descubierto a este propósito una formula notable por su simplisidad. Hablaremos de ello en un capítulo , ulterior . Vamos a presentar aquí el equivalente de este problema que se presenta con los gráficos planos.

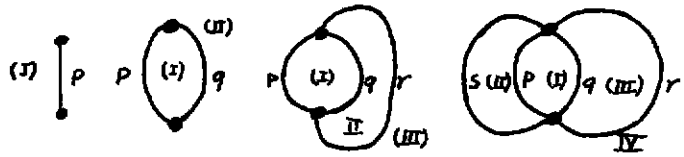
Consideramos planos gráficos planos topológicos cada vez más complicados. Designamos cada uno de ellos por:

$|S|$ el número de cimas S

$|A|$ el número de aristas A

$|F|$ el número de caras F

Partimos del caso simple de dos cimas: $|S| = 2$ (figura 43).



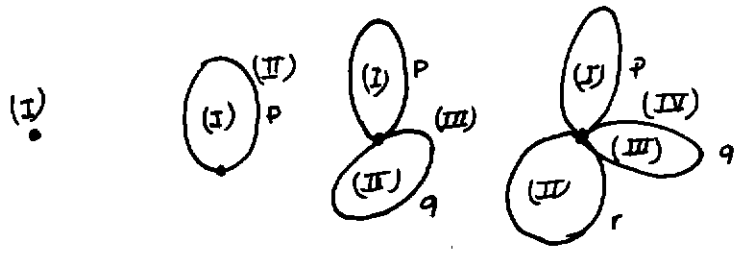
Hacemos las constataciones siguientes:

(a) $|A|=1$ $|F|=1$ (c) $|A|=3$ $|F|=3$

(b) $|A|=2$ $|F|=2$ (c) $|A|=4$ $|F|=4$

Cada vez que creamos una arista, creamos una región. En consecuencia en el caso donde $|S| = 2$, siempre tenemos la igualdad $|A| = |F|$.

No podríamos considerar un caso todavía más simple donde haya una sola cima y uno o varios anillos? Examinemos esta nueva situación ($|S| = 1$).



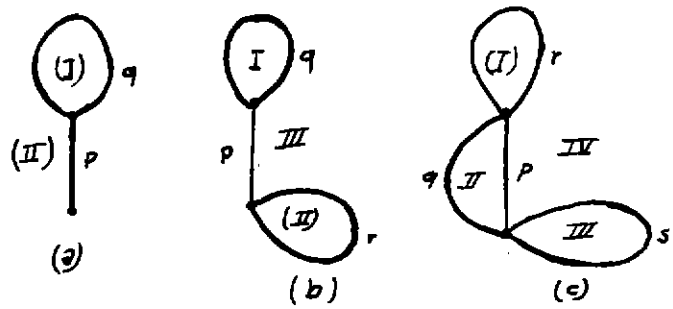
(a) $|A| = 0$ $|F| = 1$ (c) $|A| = 2$ $|F| = 3$

(b) $|A| = 1$ $|F| = 2$ (d) $|A| = 3$ $|F| = 4$

Constatamos que en este caso (S 1), se tiene la relación

$$|F| = |A| + 1$$

Pasemos al caso de dos cimas (S 2), pero introduciendo anillos.

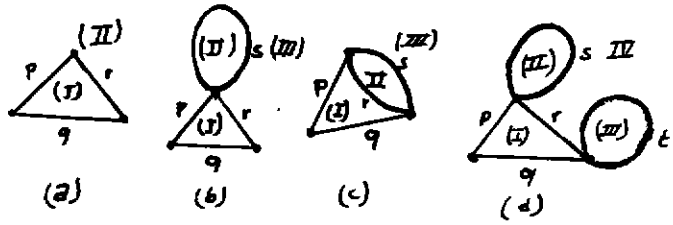


(a) $|A| = 2$ $|F| = 2$ (c) $|A| = 4$ $|F| = 4$

(b) $|A| = 3$ $|F| = 3$

Vemos que la igualdad encontrada anteriormente ($|A| = |F|$) es todavía verificada. La formula es general en el caso donde S 2.

Consideremos un gráfico de tres cimas ($|S| = 3$).

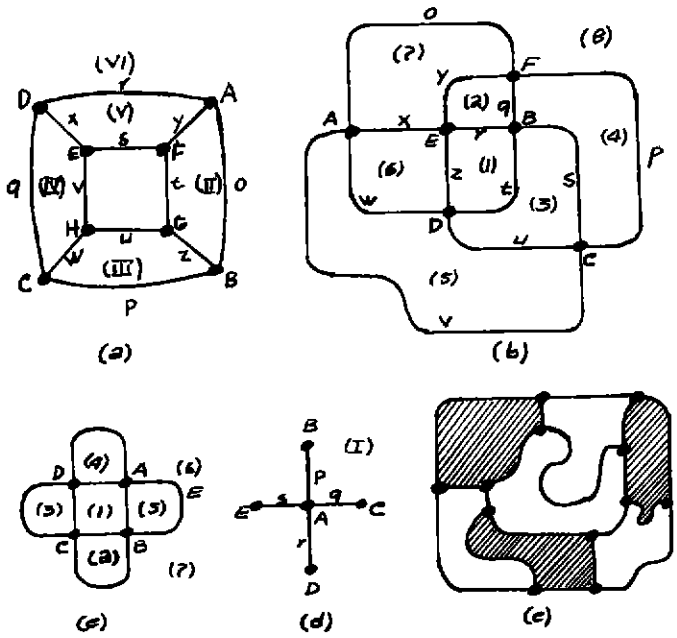


(a) $|A| = 3$ $|F| = 2$ (d) $|A| = 5$ $|F| = 4$

(b) y (c) $|A| = 4$ $|F| = 3$.

Con S 3 el número de aristas pasa de una unidad el número de caras $|A| = |F| + 1$.

Examinemos ahora gráficos más complicados (figura 47).



Tracemos un tablero en el cual colocamos los resultados del descuento de las cimas, aristas y caras para los cuatro casos: (a), (b), (c), (d).

Gráfico	S	A	F
(a)	8	12	6
(b)	6	12	8
(c)	5	10	7
(d)	5	4	1

El examen atento de este tablero permite poner en evidencia una relación entre |S| , |A| y |F| que es verificada en los cuatro casos examinados muy diferente.

Se trata de la relación

$$|A| = |S| + |F| = 2$$

que se enuncia: "Para las figuras estudiadas el número de aristas es inferior de dos unidades al número total de cimas y de caras de la figura."

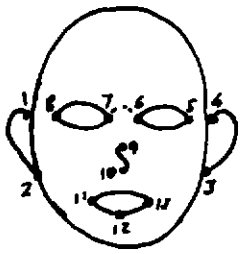
Constatamos que esta relación es verificada por todos los otros casos examinados anteriormente.

En efecto demostramos que esta regla es general.
Es una propiedad topológica de las figuras consideradas. Ellas, llevan el nombre de la fórmula de Euler.

No es necesario aprender de memoria y no debemos hacer que los alumnos la aprendan de memoria. El fin de los ejercicios presentados anteriormente es el de despertar el interés de los alumnos por la observación de las figuras.

Hay que darles la oportunidad de organizar sistemáticamente observaciones, colocar en lugar de los procedimientos de localización, de notar las constataciones bajo una forma clara y precisa, proceder a los embriones de verificaciones experimentales breve de practicar los pasos de investigación científica.

Hasta aquí, todas las figuras que hemos examinado eran de " un solo mantenedor" (conexos).
Qué pasa si asociamos en un todo, por una vista global, dos o varias figuras conexas, como es el caso para la figura 47 bis (que nos ha sido propuesta por un alumno de 9 años y medio)?



Vamos a ver que podemos generalizar fácilmente la fórmula anterior. Convenimos no contar la"face infinita" en la cual cobija las figuras anteriores y no cuenta como cara sino el interior de una figura cerrada. Sobre la figura de arriba, por ejemplo, contamos seis caras: la interior de las dos orejas, de los dos ojos, de de la boca, más el interior de la cara (sin los ojos y la boca). Por otra parte, escribimos la fórmula colocando en el primer miembro los tres términos a considerar: $|A|$, $|S|$, $|F|$.

La fórmula se puede escribir así:

$$|S| - |A| + |F| = n$$

donde designamos por n el número de componentes conexos, es decir el número de figuras de un solo mantenedor o seno de la figura global. En el ejemplo anterior el número es igual a 5: los componentes conexos son el aontorno de la cara con las orejas adyacentes, el contorno de cada uno de los ojos, el contorno de la nariz, el contorno de la boca. Las cimas son un número de 13 y las aristas (o arcos) 14. Verificamos que la fórmula se apli-

ca:

$13 - 14 + 6 = 5$

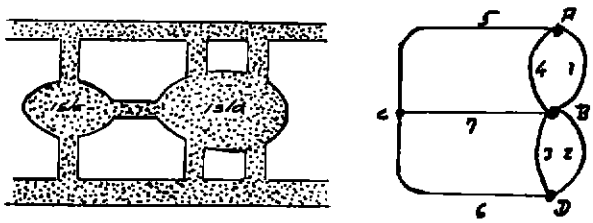
Observamos que si trazamos una arista suplementaria, por e-jemplo entre las cimas situados sobre los dos ojos (línea punteada de la figura) unimos una arista y disminuimos de una unidad el número de componentes distintos mientras que ninguna cara nueva es creada. El equilibrio de la fórmula es pues mantenido.

Observamos igualmente que la fórmula es mantenida, válida, cuando uno se refiere a una figura reducida a un punto ($|S| = 1$, $n = 1$).

Qué sucede cuando en fin, ya no aparece la figura del todo , como lo ha preguntado en clase de octavo una niña quien, después de haber examinado una serie de figuras variadas, buscó los contra-ejemplos ?

El lector podrá verificar que la fórmula de Euler se aplica si siempre!

Ejercicio: Damos el fragmento de puzzle de la figura 47e. Enumeramos las aristas, caras y cimas. Verificamos la fórmula de Euler.



d. Recorridos Eulerianos.

Continuamos sacando partido de los gráficos planos topológicos interesandonos en esto que llamamos "recorridos eulerianos"

La ciudad Alemana de Königsberg (hoy Kaliningrad) ofrece a sus habitantes un paseo clásico que se desarrolla a lo largo d del río Pregel y sobre las dos islas que se encuentran allí, las cuales están unidas a las orillas y entre ellas por siete , puentes como lo indica la figura 48a.

Los habitantes, dicen, haber buscado en vano un plano que les permita hacer el recorrido sin pasar dos veces por el mismo puente y sin omitir ninguno.

El matemático Euler estudia el problema y demuestra que esto no era posible.

Este género de problemas gana ser trascrito en término de gráfico plano topológico (ver figura 48b).

En el presente caso, el gráfico comporta cuatro cimas (A,B, C,D) y siete aristas (numeradas de 1 a 7) correspondientes a los siete puentes.

Recordemos que llamamos "grado" de una cima el número de aristas que salen o llegan a la misma cima (dos en el caso de un anillo).

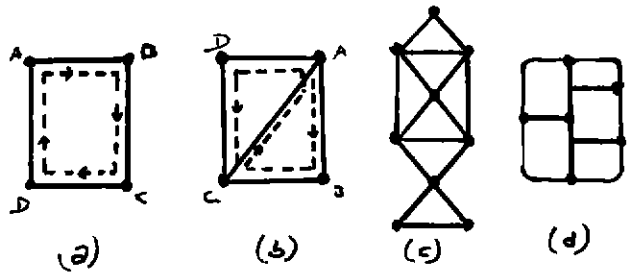
Euler a mostrado que la paridad de este número juega un papel esencial en este tipo de problemas.

Aquí A, C y D son de grado 3, B de grado 5; se trata de ci -

mas impares.

El presente ejercicio es una búsqueda experimental que consiste en considerar sucesivamente los gráficos de diversas figuras, enumerar sus cimas pares e impares y examinar si se puede encontrar sobre el gráfico un camino del tipo anterior (es decir recorriendo todas las aristas sin omitir ninguna, ni pasar dos veces por la misma).

Consideremos los diversos casos representados por los gráficos de la figura 49.



En los gráficos (a), (b) y (c), podemos encontrar un recorrido euleriano (indicado por la línea punteada sobre la figura). Para el gráfico (d) este no es el caso.

En el caso (a) todas las cimas son de grado par.

En el caso (b) hay dos cimas de grado par (B y D) y dos cimas de grado impar (A y C).

En el caso (c) todas las cimas son de grado par.

En el grado (d) hay ocho cimas impares.

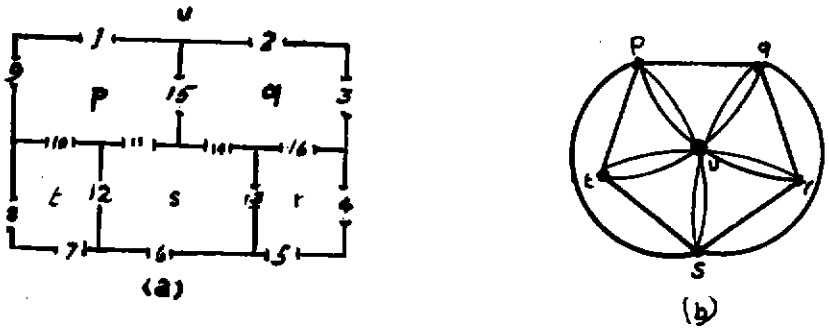
Les demostramos las leyes siguientes:

1. En todo gráfico, el número de cimas impares es par (así es imposible que un gráfico tenga una sola cima impar).

2. Los gráficos eulerianos son estos donde el número de cimas impares es igual a o o a 2. En el primer caso, podemos empezar el recorrido no importa dónde; en el segundo caso, el recorrido debe empezar en una de las dos cimas impares y se termina en la otra.

El caso (b) esta en esta segunda categoría.

Esto es estableciendo esa regla que Euler a podido afirmar en el paseo de los habitantes de Königsberg que es imposible.No tiene solución el problema. En efecto en este caso (ver fig. 48 b) todas las cimas son impares y son un número de cuatro.



La figura 50 representa el piso bajo de una casa de cinco piezas p,q,r,s,t y diez y seis puertas numeradas de 1 a 16 uniendo las piezas entre sí y con el exterior u.

El ejercicio consiste en buscar si existe uno o varios intinerarios que permitan pasar todas las puertas una sola vez.

El mismo problema esta presentado en la figura 50b bajo la forma de un gráfico topológico plano.

Verifiquemos si este gráfico describe fielmente la situación propuesta por el esquema. A qué corresponden las aristas ?

Utilice el gráfico para mostrar que no hay solución posible al problema expuesto (no hay recorrido euleriano en el gráfico)

Utilicélo para ver cual o cuales puertas habría que suprimir para hacer el problema posible.

4. Estudio topológico de los volumenes geométricos.

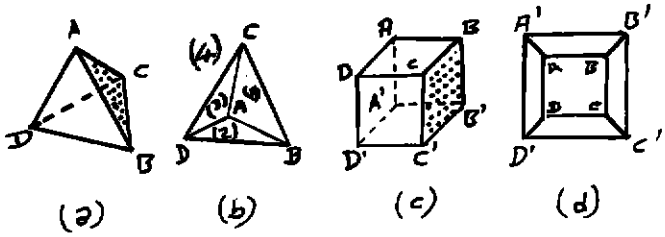
Por "volumenes" geométricos entendemos los sólidos que se parecen a los piliedros pero cuyas aristas no son forzosamente rectilíneas y las caras forzosamente planas. Dicho de otra forma, en el estudio de estos volumenes no tomamos en consideración ni el tamaño de los elementos que los componen, ni su orientación ni la regularidad de las superficies.

La terminología definida a propósito de los gráficos topológicos planos conexos es aplicable y la podemos exponer a propósito de las preguntas dibujadas que estan expuestas en los capítulos posteriores: fórmula de Euler, recorridos eulerianos.

a. Fórmula de Euler.

Consideremos el poliedro más simple representado en perspectiva sobre la figura 51a. La arista DC, la cual, no esta visible , esta marcada en puntos, la cara ABC, supuesta en la sombra , es

ta plumeada. En este tetraedro tenemos $|S| = 4$ $|A| = 6$ $|F| = 4$



Podemos colocar este tetraedro en correspondencia topológica con el gráfico plano de la figura 51b: Las cimas se corresponden de dos en dos (hemos utilizado las mismas letras mayúsculas en los dos casos), las aristas lo mismo; En fín encontramos cuatro caras sobre el gráfico como sobre el sólido a condición de contar - como lo hacemos siempre - por una cara la región conexa exterior a las líneas de la figura.

Ya que la fórmula de Euler es aplicable al gráfico, ella lo es así al tetraedro.

El mismo razonamiento puede ser traspasado sin dificultad al caso del cubo (o del paralelepípedo) (figuras 51a y 51 b). Dejamos al lector el cuidado de hacerlo.

A modo de ejercicio, podemos igualmente confeccionar los poliedros de elementos más numerosos - con la ayuda de papel cartón o de pasta de moldear - y descontar las cimas, aristas y caras para ver si la fórmula de Euler está bien verificada.

b. Recorridos Eulerianos.

Debemos transportar igualmente a los volumenes considerados lo que se ha visto a propósito de los gráficos que tengan que ver con los recorridos eulerianos. Por ejemplo, podemos recorrer todas las aristas del cubo, de la figura 51c, saliendo de A por ejemplo no pasando más que una vez cada arista ?

La respuesta es inmediatamente provisionada por el ejemplo del gráfico (d), equivalente al volumen estudiado (por el problema en causa). Las ocho cimas son de orden impar (tres aristas). No hay pues solución.

La misma conclusión para el tetraedro donde tenemos cuatro cimas de orden impar.

CAPITULO VI

CONJUNTO DE PUNTOS EN LOS "ESPACIOS TOPOLOGICOS ABSTRACTOS"

En este capítulo, nos proponemos presentar un bosquejo muy somero de las prolongaciones que la matemática contemporánea ha aportado a la topología intuitiva para conducir finalmente a los espacios topológicos que son conjuntos dotados de ciertas , estructuras, no habiendo ningún vínculo con esto que llamamos comunmente "el espacio".

Ya hemos tenido la ocasión de decir que la topología se estaba desarrollando más tardíamente que la geomatría euclidiana. Entre los precursores Euler quien hemos mencionado, debemos citar a Descartes (1596-1650). Pero solo hasta el siglo XIX y a principios del siglo XX esta rama ha tomado importancia con matemáticos tales como A. F. Moebius (1790-1868), J. B. Listing (1808-1882), B. Riemann (1826-1866) y, más recientemente, Oswald Veblen, Maurice Fréchet, Friedrich Hansdorff, Casimir Kuratowski, Henri Poincaré, Salomon Lefschetz, Nicolas Bourbaki[1].

En el curso de estos primeros años de existencia la joven disciplina, conocida bajo el nombre de análisis situs, quedó impregnada todavía de geometría clásica y razonando sobre las configuraciones geométricas.

1. Seudonimo adoptado por un"colectivo"de matemáticos quienes se renuevan permanentemente.

Es esta la topología que hemos acogido en la presente obra.

En seguida participan en la gran corriente que se esfuerza por unificar las diversas ramas de la matemática al seno de la "teoría de los conjuntos", la topología a adoptado un modo de , pensar similar y se esta interesando por los "espacios topoló - gicos" definidos abstractamente a partir de axiomas no teniendo ninguna relación intuitiva con el espacio.

No sería cuestión de presentar aquí una exposición rigurosa de esta topología formal. Deseamos simplemente, referirnos a a- quellos ejemplos - presentados "inocentemente" para hacerlos accesibles -, hacer tocar con el dedo del lector la manera co- mo la matemática formal - la única verdadera matemática - trata los problemas de su dominio.

Partimos de un conjunto (T) de "diferentes matemáticos" no , de otro modo definidos.

Distinguimos en el seno de este conjunto ciertos subconjun - tos (f), el conjunto (T) considerado y el conjunto vacío ($\emptyset$).

Considerados colectivamente estos subconjuntos forman una fa milia (F).

Si:

a) la reunión de un número cualquiera de elementos (f) de (F) es un elemento de (F),

b) La intersección de dos elementos cualesquiera de (F) es un elemento de (F),

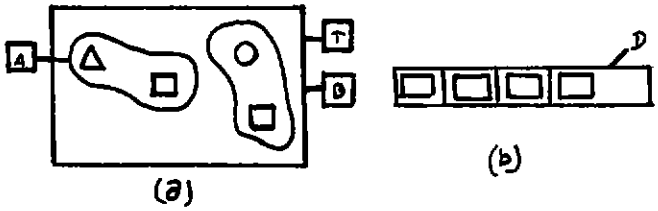
Entonces llamamos el anillo (T, F) un espacio topológico.

Ilustramos esta definición por algunos ejemplos.

Primer ejemplo

Consideramos un conjunto T de 4 objetos (figura 52a).

T



Llamamos A el subconjunto

B el subconjunto

Consideramos la familia F

$$F = \{ \emptyset, A, B, T \}$$

Las mesas de composición de los elementos de F para las operaciones de reunión ($\cup$) y de intersección ($\cap$) permiten constatar que las condiciones (a) y (b) necesarias para que uno pueda hacer un espacio topológico sean verificadas.

$$A \cap B = \emptyset \qquad\qquad A \cup B = T$$

El conjunto T provisto de la estructura F constituye un espacio topológico.

Señalamos que los elementos de la familia son llamados "abiertos" del espacio.

El conjunto vacío, particularmente, es abierto. Lo mismo para el conjunto pleno.

Segundo Ejemplo

Suponiendo un conjunto T de n elementos : a, b, c, d,...n

$$T = \{ a, b, c, \ldots n \}$$

Designamos por $\mathcal{P}(T)$ el conjunto de todas las partes de T. Entonces T, provisto de $\mathcal{P}(T)$, es un espacio topológico; todas las partes de T, por ejemplo $\{a,b,c\}$, $\{b, c, d, n\}$ son los espacios abiertos.

Tercer ejemplo

Se trata de otra presentación del ejemplo anterior, presentación destinada a hacer tocar el lazo existente entre los espacios topológicos que acaban de ser definidos y los conjuntos de puntos geométricos.

Consideramos un conjunto terminado (D) de dominós llevando , cada uno un número de identificación (figura 52b) así que la familia (L) de los sub-conjuntos que podamos formar tomando sucesivamente cero dominó, un dominó,... todos los dominós.

Después de lo que hemos visto (D) asociado a (L) constituye un espacio topológico.

Imaginemos ahora los dominios cada vez más pequeños y cada vez más numerosos.

Su alineamiento formará un tren continuo, del primero al último dominó.

Este conjunto de"dominós punteados" y la familia de sub-conjuntos que le es asociada aparentemente como una generalización de los espacios discretos de hace un momento hace la unión en - tre los espacios que no se refieren a los dados espacialmente y los que han visto el día para razonar sobre las configuraciones espaciales.

Volvamos sobre la definición del debut a fin de precisar la la terminología empleada[2].

El conjunto (T) del cual salimos es un conjunto de las diferentes partes de las matemáticas llamadas puntos. La familia (F de abiertos define sobre (T) una estructura topológica (O topología). Pos consiguiente un espacio topológico es un conjunto de "puntos" provistos de una estructura topológica.

Según lo anterior, vemos que "proveer un conjunto de una estructura topológica ", es operar los"entrelazamientos" de tales Y tales elementos del conjunto, "entrelazamientos" que respeten ciertas reglas. En el primer ejemplo, se tiene"entrelazado" el elemento Δ y el elemento ▭ de una parte, el elemento o y el elemento ▭ de otra parte, pero no tenemos entrelazado Δ y o,

2. Seguimos en aquello de N. BOURBAKI, Topologie générale, fascicule de résultats, Hermann, Paris, 1964.

esto que habría constituido un puente entre los dos entrelaza - mientos considerados.

Se siente, intuitivamente, que lo espacial es subyacente a estos "entrelazamientos", del mismo modo que sentimos que él s sea en filigrana en las operaciones de reunión y de intersección a las cuales se refiere la definición de estructura topológica.

Pero no esta representado como tal en el campo axiomático donde se coloca el matemático. Este se esta DESPRENDIENDO de toda referencia a la experiencia sensible,

CONCLUSION

A medida que el lector progresa a lo largo del camino propuesto en estas páginas, él ha podido - lo esperamos - elaborar una imagen cada vez más clara del conjunto de nociones cubiertas por el vocablo más general de topológía.

Esperamos igualmente haberle hecho compartir nuestra convicción concerniente a la importancia de las nociones topológicas , para los niños y los adultos, a doble nivel de formación general y de la vida práctica.

Concerniente a la formación general, el matemático Pierre Samuel, en el prefacio que nos ha hecho el favor de escribír para la presente obra, ha recordado cuanto la topología le pareció fundamental como disciplina matemática.

Volvamos un instante sobre este punto evocando muy brevemente el conjunto de trabajos del célebre equipo de Bourbaki, conjunto del cual se deduce que la totalidad de nociones estudiadas por la matemática se llegue a tres estructuras fundamentales, llamadas por N. Bourbaki "estructuras madres".

Se trata de:

- las "estructuras algebraicas", cuyo prototipo es el grupo;
- Las"estructuras de orden", que llevan sobre las relaciones y cuya red (o enrejado) es el ejemplo más significativo;
- las "estructuras topológicas", que son fundadas sobre las nociones de vecindad, de continuidad y de límite.

Haciendo esto, los Bourbaki llegaron a una conclusión extremadamente parecida a la que había llegado el psicólogo J. Piaget siguiendo un camino diferente. Este último encuentra que ha sido el asombro del matemático J. Dieudonné, de una parte, y de él mismo por otra parte, cuando, se encontraron en Melun en 1952 con ocasión de un coloquio sobre las estructuras matemáticas y mentales, ellos se dieron cuenta que sus puntos de vista respectivos se recortaban estrechamente, ellos jamás habían tenido la ocasión de confrontar sus trabajos[1].

Una tal convergencia es, en efecto, observable y más que reforzar la convicción que tratamos hace un instante concerniente al caracter fundamental de la topología.

Sin embargo, el lector, progresando en la obra ha debido observar otro caracter de la topología.

Al nivel donde nosotros lo hemos considerado,esta rama de la matemática nos envía constantemente a lo que se podría llamar un lenguaje visual. Los gráficos planos en efecto son los esquemas que "hablan" por ellos mismos. Ellos utilizan con este fin un"vocabulario visual", muy simple ya que esta compuesto solamente de "cimas", de "fronteras" y de"dominios", y una sintaxis comportando algunas reglas.

1. La anecdota figura en la obra de J. PIAGET y E. W. BETH, Epistémologie mathématique et psychologie, P.U.F., 1961, p.181ss

Este lenguaje, a pesar de esta pobreza es sin embargo capaz de exprimír como lo hemos visto, las situaciones relacionadas, complejas que no pueden tener nada en común, apariencia, con los problemas específicamente espaciales.

El empleo de este lenguaje es ventajoso en bien del caso. Por qué? porque es fácil de memorizar y porque autoriza un diálogo fecundo entre los procesos del análisis y los procesos de síntesis: cara o esquema que se ofrece al ojo, este puede fijarnos sucesivamente el detalle de tal o tal parte - y se trata entonces de un proceso analítico - o de la figura completa - se trata entonces de un proceso sintético.

En nuestra obra nos hemos obligado a multiplicar los ejemplos del empleo de este"lenguaje" porque estamos persuadidos de que esta llamado a jugar un papel muy importante en el mundo tecnificado donde se desarrolla nuestra vida.

Saber leer de una sola mirada el gráfico descrito de manera simplificada el laberinto de un cambio de ruta, saber comprender la rica información que aporta el esquema de câblage de un aparato electronico, saber desifrar el organigrama de una empresa son los saberes eminentemente útiles.

Nuestro deseo más vivo es que el lector que nos ha tenido confianza y nos ha seguido sobre los difíciles terrenos donde a veces lo hemos llevado no sienta su esfuerzo y encuentre en definitiva menos trabajo para comprender más allá de la diversi -

dad de las situaciones concretas, algunas de las grandes estructuras que la ciencia de hoy pone a disposición del hombre como instrumentos de conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Para la redacción de la presente obra hemos consultado principalmente los libros siguientes:

T. J. FLETCHER, L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui adapté de l'anglais, O.C.D.L., Paris, 1966.

Esta obra, de una lectura fácil, trata en su capítulo VIII (pp. 241 a 264) "de motivos y conexiones".

Z. P. DIENES, E. W. GOLDING, Topologie, géométrie projective , et affine, O.C.D.L., Paris, 1967.

Esta obra, traducida del inglés, lleva indicaciones para , los profesores y las fichas de trabajo para los alumnos de nivel primario.

B. Roy, Algebre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales, Dunod, Paris,1969.

Esta obra muy detallada, de una lectura a veces difícil, presenta un gran número de ejercicios sobre los gráficos , planos topológicos.

R. COURANT et ROBBINS, What is Mathematics ?, Oxford University Press, London-New York-Toronto, 1943.

Esta obra en inglés, de una lectura relativamente fácil, consagra su capítulo V (pp. 235-271) a la topología.

René ALLEAU, Dictionnaire des jeux, Claude Tchou, Paris, 1964.

Irving ADLER, Initiation a la mathématique d'aujourd'hui, O.C.D.L., Paris, 1964.

Esta obra, traducción del libro The New Mathematics publicada en los Estados Unidos, presenta bajo una forma clara , los conjuntos de números; en su capítulo V, trae una introducción de los espacios topológicos seguidos de los "inter-

valos ajustados" que corresponden a un número razonable.(pp 127 ss.).

A. et G. REVUZ, Le cours de l'A.P.M. III. Eléments de topologie A.P.M.E.P., Paris, 1966.

Esta obra esta a nivel de enseñanza superior.

Claude BERGE, Espaces topologiques, Dunod, Paris, 1966.

Esta obra esta a nivel de enseñanza superior.

INDICE

PREFACIO DEL Profesor Pierre SAMUEL 7

Introducción 10

Cap. I TOPOLOGIA Y DESARROLLO DE LA INTELIGENCIA DEL NIÑO..... 17

Cap. II EL DOMINIO DE LA TOPOLOGIA 27

Cap. III - EXPLORACION DEL DOMINIO TOPOLOGICO: LINEAS Y SUPERFICIES..... 34

1.Continuo-descontinuo 34

a. Imágenes, 34.- b.Ideas de ejercicios , 39.

2. Líneas cerradas..... 40

3. Fronteras y regiones, Interior y exterior 43

a. Imágenes, 43.- b. Ideas de ejercicios y juegos , 47.

4. Noción de "hueco" - conección 52

a. Imágenes, 52. - b. Ejercicios,54.

5. Orden 56

Experiencias e imágenes, 56.

6. Recapitulación general 60

a. Clasificación de figuras siguiendo los criterios topológicos, 60. - b.El juego de Conway, 61.- c. Laberintos, 66.

Cap. IV. PROSPECCION DEL DOMINIO TOPOLOGICO:VOLUMENES... 71.

1. Generalización de las nociones del cap. III "el espacio a tres dimensiones" (volumenes)..... 71

2. Ejercicios..... 75

a. Dibujos sobre un cubo, 75. - b. Vecinos sobre un tetraedro, 76. - c. Volumenes perforados y no perforados, 76.

Cap. V. PLANOS Y ESQUEMAS TOPOLOGICOS 78
1. Planos, esquemas y representaciones cartográficas. 78
2. Esquemas de base..... 82
3. Gráficos planos topológicos..... 83
a. Iniciemos precisando la terminología que emplearemos, 84. - b. Proponemos algunos ejercicios, 87. El juego de la marelle, 93. - El juego de los bourgeons, 94. - c.Formula de Euler, 95. - Recorridos Eulerianos, 102.
4. Estudio topológico de los volumenes geométricos... 105
a. Fórmula de Euler, 105. - b. Recorridos eulerianos 114.

Cap. VI. CONJUNTO DE PUNTOS EN LOS "ESPACIOS TOPOLOGICOS ABSTRACTOS"..... 108

CONCLUSION 114

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS..... 118

Imprimido en Bélgica por Casterman, S. A., Tournai, Mayo 1972.
E 4983-5787. D. 1972/0053/100.