1-1-2008

La resolución de problemas vinculada al desarrollo del pensamiento variacional mediada por la geometría dinámica

Johanna Andrea Fuentes Díaz
Universidad de La Salle, Bogotá

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VINCULADA AL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIADA POR LA GEOMETRÍA DINÁMICA

JOHANNA ANDREA FUENTES DÍAZ

UNIVERSIDAD DE LA SALLE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN DOCENCIA
BOGOTÁ
2008

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VINCULADA AL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIADA POR LA GEOMETRÍA DINÁMICA

JOHANNA ANDREA FUENTES DÍAZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar el título de Magíster en Docencia

Dr. PAULO EMILIO OVIEDO
Director

UNIVERSIDAD DE LA SALLE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN DOCENCIA
BOGOTÁ
2008

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

Esta investigación presenta la resolución de problemas como una estrategia de enseñanza de las matemáticas para el desarrollo del pensamiento variacional mediado por la geometría dinámica, como uno de los retos del Ministerio de Educación Nacional frente al desarrollo del pensamiento matemático en la educación básica y media vocacional, desde el cual se reconoce el papel mediador de las nuevas tecnologías para la enseñanza de las matemáticas.

Por lo tanto se construyen dos ambientes de variación de fenómenos de la naturaleza: *La balanza virtual y La máquina Hidráulica* que describen las leyes de compensación entre pesos y presiones respectivamente, en el software *Cabri Geometri*, para el estudio de situaciones de variación que permitan el desarrollo del pensamiento variacional desde la modelación de las variaciones por medio de la función lineal y la función inversa, planteando una secuencia didáctica para el estudio de dichas situaciones que identifican las acciones de comprensión para la noción de la función descritas por *Sierpinska* (*1992*), las cuales se evidencian en los procesos de estudio de las situaciones.

Los procesos de resolución de problemas son descritos desde las acciones de comprensión de los estudiantes en el estudio de la variación, presentando sus hipótesis y la disposición del uso de las representaciones matemáticas para explicar la variación. Así como, un análisis cuantitativo y cualitativo de los procesos de resolución y de las acciones de comprensión para el estudio de las situaciones de variación.

INTRODUCCIÓN

Los nuevos retos para la educación matemática se generan en la búsqueda de estrategias de enseñanza para el desarrollo del pensamiento matemático y la incorporación de nuevas tecnologías en el aula, reconociendo la resolución de problemas como una parte fundamental en el desarrollo de habilidades y estrategias propias del quehacer matemático, lo cual ha propiciado diversas concepciones frente a la manera de concebirla en el currículo; las acciones en el aula de los docentes y estudiantes y el conocimiento matemático propio para cada nivel académico.

En el marco de esta investigación se da el tratamiento a la resolución de problemas como una estrategia de enseñanza que permite orientar los procesos de aprendizaje de las matemáticas vinculados al pensamiento variacional; dando una mirada de cómo es posible pensar la mediación de las herramientas tecnológicas en la educación mediante la construcción y propuesta por parte del investigador de dos contextos de variación en el software de Geometría dinámica -***Cabri Géométri***[1]-. Contribuyendo desde un caso particular, a instaurar las acciones de *modelación* como un lugar privilegiado para el desarrollo del pensamiento variacional, por medio de la descripción de los procesos de resolución de problemas de estudiantes de grado octavo del Liceo Hermano Miguel La Salle, desde las comprensiones de la noción de función; es decir, no se trata de transmitir conocimientos matemáticos referidos al cálculo, el álgebra o cualquier *rama* particular de las matemáticas, se trata entonces de privilegiar y potenciar la acción del sujeto en pro de la construcción del conocimiento.

---

[1] ***Cabri Géométre*** es un software educativo, que permite dinamizar la geometría de manera virtual, creado a final de los 80 por el CNRS (Centro Nacional de la Investigación Científica) y de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble. Desarrollado y distribuido por la sociedad Cabrilog, fundada en marzo del 2000 por ***Jean-Marie Laborde***, director del CNRS. El dinamismo del programa permite la construcción, verificación, manipulación, ejecutabilidad y visualización de los objetos geométricos construidos, programa que permite el estudio de diversas relaciones de las matemáticas a partir del estudio de objetos geométricos.

1. PLANTEAMIENTO

1.1. ANTECEDENTES.

Para la educación básica y media vocacional el Ministerio de Educación Nacional (1998) se propone el desarrollo del pensamiento variacional como uno de los ejes para el desarrollo del pensamiento matemático, que involucra el estudio de situaciones de cambio a partir de la formulación y solución de problemas, la modelación de procesos y fenómenos de la realidad, de otras ciencias y de la matemática; desde la percepción, la identificación, la caracterización de la variación y el cambio que se evidencia en la comprensión de la noción de función; "*El cambio y la variación se transforma con e transcurso del tiempo. El poder identificar el fenómeno de cambio, describirlo, interpretarlo, predecir sus consecuencias, cuantificarlo y modelarlo*" (*MEN*, 2004: 18)

A continuación se describen algunas investigaciones en educación matemática entorno al pensamiento variacional, a nivel nacional de la *Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Distrital* y la *Universidad de los Andes* e internacional con investigadores del proyecto **T**$^{\mathbf{3}}$ *(Teachers Teaching with Technology)* a nivel europeo y el *CINVESTAV* de México, estas son:

Cruz (1998), propone el estudio de la función a partir del análisis de las transformaciones en la representación algebraica y gráfica de familias de funciones. *Gómez* et al., (1999), generan el estudio de las características de las funciones y familias de funciones en el diseño de situaciones problemáticas como tablas, familias de funciones, construcción de objetos, relaciones entre las representaciones tabular, simbólica y gráfica con el uso de calculadoras gráficas.

García (2000), presenta un acercamiento didáctico frente al estudio de la función y de la función lineal desde la relación de dependencia en el tratamiento de la variable, la variación y el cambio, con situaciones en las que se estudia la relación de dependencia, por medio del estudio de gráficos y tablas, para establecer patrones de variación e interpretar los cambios. *Moreno Armella (MEN, 2001),* en su trabajo *"Graficación de Funciones*" con el uso de una herramienta tecnológica, los estudios de la variación se dan en torno a las relaciones entre las representaciones algebraicas y gráficas haciendo una traducción simultánea, se identifican los cambios al modificar algún elemento de una representación con respecto a la otra, proponiendo así el estudio de familias de funciones según la variación que modela, con la definición del universo numérico para las relaciones funcionales. *Santos Trigo, (MEN, 2001)* propone el estudio de situaciones de variación a partir de atributos de figuras geométricas como el perímetro y el área, con el fin de construir en el plano cartesiano la relación entre las dimensiones de la figura con el perímetro y el área, haciendo uso de representaciones tabulares y simbólicas para describir su relación con la representación analítica.

Böhm (2001) y *Queralt* (2001:2), evalúan el papel de las calculadoras gráficas en la enseñanza de las matemáticas como "*un instrumento generador de problemas y facilitador de la comprensión y aprendizaje de los contenidos matemáticos"*, las posibilidades de la herramienta desde la visualización y la dinámica en sus representaciones permite el estudio de diversas relaciones entre las representaciones matemáticas, los tipos de variación, procesos de cambio y las características de las funciones.

Los estudios de la variación en estas propuestas se caracterizan en tres grandes aspectos:

1. Estudio de las relaciones existentes entre las representaciones tabular, algebraica y gráfica asociadas a una función, que codifiquen aspectos relevantes de la variación, con el análisis de familias de funciones.
2. Contextos de naturaleza Matemática.
3. Traducción entre los distintos sistemas de representación donde es posible nombrar la función.
4. El uso de las herramientas tecnológicas como generadoras de problemas frente al uso de las representaciones matemáticas.

De este modo, el estudio de la variación y el aprovechamiento de las calculadoras en las propuestas anteriormente citadas recae explícitamente en la posibilidad de analizar directamente representaciones de funciones en el sentido algebraico y gráfico, dejando un poco a la sombra la actividad de modelar[2] en matemáticas; en tanto se prioriza el análisis sobre las correspondencias entre unidades significantes propias a cada representación referida a un concepto en particular, sin optar por la situación como mediadora en estas correspondencias. Dichos análisis sobre representaciones se llevan a cabo en virtud de las calculadoras gráficas y en consecuencia el dominio de la herramienta cobra gran relevancia, en tanto poder determinar las transformaciones que sufre una representación gráfica a partir de los cambios efectuados en los parámetros correspondientes en la representación algebraica, requiere por parte de un sujeto conocer la manera de operar en el software diseñado, ya que para graficar funciones, intervenir y construir expresiones algebraicas debe manejar varias de las funciones que traen incorporadas estos software y que permiten transformar los objetos virtuales que producen dichas herramientas.

De tal modo, se propone un nuevo reto a quienes piensan la educación matemática donde surge la necesidad de problematizar el estudio de las matemáticas desde la resolución de problemas, involucrando herramientas tecnológicas, a saber: Desarrollar Pensamiento Matemático a través del estudio de situaciones problema mediados por una herramienta tecnológica.

Justamente algunos de los trabajos en ésta dirección presentan construcciones en software que simulan aparatos del mundo real como los presentados por Kaput (2001), *Moving around on jerky elevators,* que pretenden simular fenómenos físicos y matemáticos, los cuales se constituyen en situaciones problema, permitiendo observar relaciones entre magnitudes que cambian y los procesos que dan lugar a su cambio.

[2] "La modelación matemática se trata de la utilización de todas las funciones conocidas, de otras ya inventadas pero desconocidas, así como de nuevas que se van a inventar, para simular, representar o modelar procesos reales que están ocurriendo en el mundo. Se trata de capturar sus variaciones por medio de modelos matemáticos de distintos tipos para poder seguirlos, hacer simulaciones y predicciones, e intentar controlarlos y modificarlos" (Vasco, 2000:26)

Es así como, los educadores en matemáticas empiezan a generar propuestas de enseñanza para la incorporación de las herramientas tecnológicas, por lo cual desde el trabajo de investigación *La modelación matemática mediada por una herramienta tecnológica; Fuentes & Pérez (2004)* se instaura la mediación desde la creación por parte del docente, de situaciones problema *"La Balanza Virtual"* que permitan la invisibilización de la herramienta tecnológica, permitiendo que la problemática de la acción se concentre en el estudio de las relaciones matemáticas y no en el aspecto técnico de las herramientas tecnológicas, convirtiéndose en un instrumento para el desarrollo del pensamiento matemático. Reconociendo las ventajas de la tecnología en las posibilidades de *manipulación* de los objetos matemáticos del contexto creado en el mundo virtual, donde el estudiante puede actuar sobre éste y transformar sus estados, la *ejecutabilidad* en la transformación de las variables dando la posibilidad de encontrar una infinitud de posibilidades para generar cambios en el instrumento y la *visualización* de los fenómenos de variación que pueden validarse por medio de las relaciones matemáticas. Por lo tanto "*La Balanza Virtual",* se constituye en un ambiente generador de problemas en el aula y en un instrumento que le permite al estudiante construir caminos de solución a los problemas que se plantean.

El MEN (2004), recoge las experiencias de docentes que desde el proyecto nacional de incorporación de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas presentan sus experiencias pedagógicas para la educación básica y media vocacional; desde las cuales se generan situaciones didácticas que promueven el desarrollo del pensamiento variacional y potencian el papel mediador de las nuevas tecnologías, estos situaciones son:

- *Modelación del movimiento pendular,* desde el cual se construyen péndulos y por medio del CBL[3] se obtienen los datos de la variación desde la gráfica en el plano cartesiano de la calculadora gráfica, analizando los datos y los procesos de cambio.

[3] El CBL es una herramienta de la calculadora gráfica de la Texas Instrument, el cual tiene un sensor de movimiento y transmite los cambios en la calculadora, graficando su función en términos del tiempo y desplazamiento, organizando datos en tablas numéricas de la calculadora.

- *Simulación del movimiento de aviones* en el software cabri se representan con puntos A, B, C sobre rectas paralelas la simulación de tres aviones los cuales al moverse con diferentes velocidades por medio de la aplicación *Animación*, generando preguntas frente a los cambios en la velocidades presentando en la pantalla la medición numérica de las velocidades de cada punto.

- *La Función seno y su gráfica*, construida por medio de objetos geométricos en software Cabri.

- *Estudio de la simulación del lanzamiento de un cuerpo*, por medio de experiencias reales se estudian los cambios en las velocidades del lanzamiento vertical de un cuerpo, modelando las situaciones de cambio por medio de una expresión algebraica que relaciones las variables, se hace uso de las representaciones simbólicas y gráficas que ofrece la calculadora.

- *Simulaciones en cabri para diseñar otras actividades;* variación del radio y la circunferencia para estudiar perímetros y áreas, variación del ancho, la altura y el área de un rectángulo con perímetro fijo, variación de un ángulo de un trapecio inscrito en una semicircunferencia y la altura del trapecio para el análisis de relaciones geométricas.

- *La derivada como razón de cambio* por medio del software Cabri se construye una alberca simulando su profundidad con la simulación en la que se aumenta la cantidad de líquido para llenarla, se estudian las variaciones en las dimensiones de la alberca y la capacidad.

En consecuencia se inicia este trabajo investigativo desde el análisis frente al desarrollo del pensamiento variacional, la manera como se posibilita el ambiente de clase por medio de la resolución de problemas, la identificación de los procesos de resolución de los estudiantes, el tipo de conocimiento matemático que se construye y el papel de las nuevas tecnologías en el aula, partiendo del interés en la búsqueda de escenarios de enseñanza que permitan al estudiante explorar y construir el conocimiento para dar explicación a fenómenos de la naturaleza y situaciones de la realidad que genere transformaciones en el conocimiento y en el desarrollo de la sociedad; es así como pensar en el papel del docente, el estudiante, el conocimiento y de las herramientas de mediación, genera cambios en la manera como se conciben estas relaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

1.2. JUSTIFICACION

La educación matemática busca proponer estrategias de enseñanza que permitan el desarrollo del pensamiento matemático, a través del estudio de las estrategias de aprendizaje de los estudiantes y del proceso de enseñanza del docente. Así, potenciar el Pensamiento Matemático supone, en principio, generar en el estudiante una serie de procesos que van desde la matematización de situaciones, la generalización de procesos matemáticos, la posibilidad de conjeturar, argumentar y proponer en diferentes contextos desde el conocimiento matemático, entre otros. Es para la sociedad indispensable que un sujeto sea capaz de actuar en su medio recurriendo en lo posible a sus conocimientos, como también a las comprensiones construidas en relación a las matemáticas a lo largo de su experiencia académica.

Particularmente, en la educación matemática se hace esfuerzos por esclarecer y determinar cuáles son las *habilidades* y *destrezas* que debe desarrollar un ciudadano desde las matemáticas y que contribuyan a preparar individuos capaces de responder exitosamente a los problemas que plantean las necesidades del desarrollo social. *Habilidades* y *destrezas* que van desde la capacidad de ***Resolver Problemas***, ***matematizar*** situaciones a partir del mundo real, ***reflexionar*** sobre las situaciones presentadas, alcanzar abstracciones y actuar según ***procesos deductivos,*** así como desarrollar aplicaciones que permitan volver a la realidad, constituyendo todo este conjunto de acciones lo que se puede denominar ***pensar matemáticamente****, MEN (1998).*

Así, la capacidad para plantear y resolver problemas es uno de los procesos matemáticos principales para el desarrollo del pensamiento, a partir del cual se espera que los estudiantes desarrollen la capacidad de interpretar, argumentar y proponer estrategias en la resolución de problemas matemáticos, científicos o de la vida cotidiana.

El Ministerio de Educación Nacional ha planteado la necesidad de incorporar Nuevas Tecnologías para la enseñanza de las matemáticas en la escuela colombiana, a partir del año 2001 se planteo el proyecto de incorporación iniciando con algunos los colegios públicos del país. Dichas herramientas tecnológicas van desde los ordenadores hasta las calculadoras gráficas, generando la necesidad por parte de la comunidad de investigadores en educación matemática, de caracterizar la manera como es debido y pertinente utilizar dichas herramientas dentro del aula, los procesos en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y cómo a partir de esta mediación desarrollar el pensamiento matemático, así como determinar las posibles transformaciones en el currículo, identificando probables cambios en la manera de concebir el conocimiento científico y el conocimiento profesional del profesor.

Justamente este intento de dimensionar la tecnología en el ámbito de la Educación Matemática requiere en principio examinar cuidadosamente las ventajas y desventajas que ofrecen estas herramientas en relación al desarrollo del Pensamiento Matemático, así como determinar cuáles son las comprensiones posibles en relación a las matemáticas escolares que se logran desde el uso de estas herramientas.

Desde la perspectiva de los *Lineamientos Curriculares en matemáticas (1998:10),* para el área de las Matemáticas:

> *"Para entender un concepto matemático o para resolver un problema es necesario, a partir de la comprensión inicial, realizar alguna representación de las relaciones que tienen que ver con el concepto o con el problema: Los símbolos de los números y sus relaciones tienen sentido sólo cuando representan una multiplicidad de significados; no cuando son, simplemente, el resultado de un aprendizaje mecánico. En este contexto, toda representación simbólica matemática es un modelo, cuando se conoce con sentido".*

Es decir, *"...A través de situaciones y problemas por resolver es como un concepto adquiere sentido". (Vergnaud, 1990: 88).*

Luego, para que un sujeto logre otorgar sentido[4] a un concepto matemático requiere una constante relación con las situaciones donde se encuentra inmerso, de tal modo que a partir de de sus preconceptos pueda construir modelos matemáticos por medio de la resolución de problemas. Estos modelos complejizan sus redes conceptuales equilibrando sus estructuras mentales, reelaborando esquemas cada vez más complejos. De ahí la importancia de privilegiar situaciones donde la modelación se constituya en estrategia que permita abordar comprensivamente dicha situación.

Por lo cual, desarrollar el Pensamiento Matemático implica constituir situaciones o ambientes de clase que privilegien la actividad matemática por parte de los estudiantes a través de la construcción de modelos matemáticos –y todo lo que implica esta construcción—.

> *"Es así, como enriqueciendo el contexto se deberá crear situaciones problemáticas que permitan al alumno explorar problemas, construir estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos; estimular representaciones informales y múltiples y, al mismo tiempo, propiciar gradualmente la adquisición de niveles superiores de formalización y abstracción; diseñar además situaciones que generen conflicto cognitivo teniendo en cuenta el diagnóstico de dificultades y los posibles errores." (MEN, 1998: 16).*

En el desarrollo del pensamiento variacional dentro del pensamiento matemático, es necesario construir situaciones problema donde se privilegie el hacer matemático del estudiante, más concretamente que procuren el estudio sobre fenómenos donde las magnitudes estén sujetas al cambio.

> *"El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. (MEN, 1998: 50)*

Es aquí donde se pretende constituir ambientes de variación simulados por una herramienta tecnológica que permita formular a partir de ellos situaciones problema y de este modo vincular la resolución de problemas a los procesos de aprendizaje de estudiantes de grado séptimo del Liceo Hermano Miguel de La Salle, para el desarrollo del pensamiento variacional, haciendo un uso del *Software* ***Cabri*** como herramienta

[4] "El **sentido** es una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados por una situación o por un significante en el sujeto individual, los que constituyen el sentido de esta situación o de ese significante para ese individuo." *(Vergnaud G.1990: 107).*

tecnológica como instrumento de mediación del conocimiento de tal manera que se construyan o se generen contextos que permitan problematizar el pensamiento de los estudiantes, por lo cual se hace necesario el análisis de dichos procesos de enseñanza y aprendizaje mediante la resolución de problemas a través de la pregunta de investigación:

¿De qué manera la resolución de problemas desarrolla procesos de pensamiento variacional en estudios de situaciones de cambio mediados por la Geometría Dinámica en estudiantes de educación básica?

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. OBJETIVO GENERAL

Desarrollar pensamiento variacional en estudiantes de grado octavo del Liceo Hermano Miguel La Salle a través de la resolución de problemas mediada por la Geometría Dinámica –*Software CABRI*-.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Definir dos situaciones problema de variación en el software CABRI II Plus.
- Incorporar secuencias didácticas del proceso de resolución frente al estudio de las variaciones en las situaciones problema con estudiantes de grado octavo del Liceo Hermano Miguel La Salle.
- Describir los procesos de resolución de problemas de los estudiantes de grado octavo del Liceo Hermano Miguel La Salle, desde las comprensiones de la noción de función.
- Determinar las acciones de comprensión de la noción de función con base en los procesos de resolución de problemas de situaciones de variación.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este marco de la investigación toma relevancia el tratamiento de la resolución de problemas como una estrategia pedagógica que permita orientar la enseñanza de las matemáticas para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante, así como el tratamiento de herramientas tecnológicas ***(Software Cabri Geometri)*** en la enseñanza de las matemáticas para la creación de situaciones problema como instrumentos de mediación para el desarrollo del pensamiento matemático.

2.1. LA RESOLUCION DE PROBLEMAS:

Desde el Ministerio de Educación Nacional se ha reconocido una transformación en el currículo de la educación básica y media, desde visión de la enseñanza y aprendizaje de la ciencias, de un conocimiento que no es estático, que puede ser redescubierto y construible, orientado dichos procesos ha modelos de resolución de problemas. Este término con diversos enfoques frente a los procesos de aprendizaje, puede verse como acciones que van desde trabajar con ejercicios rutinarios, resolución de situaciones problema o el desarrollo de la matemática.

Según *Debney* (1971) puede verse como una actividad descrita en el marco de la creatividad del trabajo científico; solucionar problemas, ha sido descrito como *pensamiento creativo*; *"solucionar problemas es pensar creativamente, pero la creatividad es más que simplemente producir una respuesta"*, así podría considerarse con *Garrett* (1988), que la creatividad supone novedad u originalidad y utilidad, lo cual puede darse como una relación de proporcionalidad directa o inversa. Tratando de solucionar situaciones problema abiertas que sean de interés para los estudiantes y favorezcan el desarrollo del pensamiento en el aprendizaje de las ciencias.

Algunas Investigaciones con el objeto de analizar los procesos empleados en la resolución de problemas, las formas de interacción, los tipos de problemas a los cuales se enfrenta el estudiante, el papel del docente y el estudiante en dicho proceso. Por su parte, *Polya* (2002) considera que la resolución de problemas en matemáticas, implica tanto un proceso de aprendizaje como una técnica que debe ser desarrollada; ya que para resolver un problema puede trazarse un camino de solución y a su vez la comprensión del mismo en cada fase para su solución: *Comprender el problema, trazar un plan, Ejecución del plan y la visión retrospectiva*, es decir volver atrás para validar el proceso. Polya es uno de los matemáticos que considera la una actividad en la que sus experiencias deben ser relacionadas con la forma en que la matemática es hecha.

Pomes (1991) reconoce la resolución de problemas como una estrategia que permite favorecer el desarrollo cognitivo del estudiante, ya que para la comprensión de situaciones problema en ciencias se precisan habilidades como: Transformar y procesar los datos en varias direcciones, procesar simultáneamente hechos o pasos en la ejecución, separar información relevante de la irrelevante y utilizar los conocimientos previos de conceptos y hechos específicos de la cuestión objeto de estudio.

¿La diferencia entre ejercicio y problema?

Así mismo, *Pomes* (1991) reconoce que “un problema puede ser útil para la optimización de las estrategias de razonamiento, mientras que la utilidad de un ejercicio con frecuencia debe estar dirigida a esclarecer, aplicar o ejemplificar un concepto teórico”, el problema tiene como característica poder aportar algo nuevo y desconocido para el estudiante a través de la tensión que puede ejercer el querer responder a una pregunta.

Tipos de Problemas:

Existen numerosas clasificaciones de estructuras de problemas: Problemas de carácter *deductivo* e *inductivo* de acuerdo al tipo de razonamiento que tendría que realizar un sujeto, la clasificación clásica de la *Gestalt,* más concretamente *Wertheimer*, citado por *Garret* (1998), distinguían entre *pensamiento productivo*; que consistía en la organización o reorganización de los elementos del problema, y el *pensamiento reproductivo*; de la aplicación de métodos ya conocidos.

De acuerdo a *Mayer* (1986), ha caracterizado para la resolución de problemas matemáticos, los conocimientos necesarios para establecer una solución a éstos:

Conocimiento Lingüístico y Semántico: ***La comprensión del lenguaje y las palabras claves en el problema***, el establecimiento de significados y relaciones entre las palabras, los conocimientos previos para la comprensión del contexto del problema.

Conocimiento Esquemático: El cual permite la traducción del lenguaje escrito a alguna ***representación***; ya sea pictórica, gráfica, algebraica o tabular. La comprensión del lenguaje y significación de las palabras y variables involucradas en un problema, permiten el ***establecimiento las relaciones*** entre las variables del problema

Conocimiento Operatorio: Este conocimiento es útil para comprender y representarse el problema, al proponer los procedimientos matemáticos para resolver el problema, ya sean algoritmos aritméticos o algebraicos.

Conocimiento Estratégico: Una estrategia es una técnica general para resolver problemas, ya sean algoritmos o ecuaciones y los conocimientos matemáticos determinar la solución a un problema.

La enseñanza basada en la solución de problemas pretende facilitar el dominio de estrategias, así como la capacidad de utilizar los conocimientos disponibles para su solución, plantearse preguntas y proponer caminos de solución. Dicho proceso de enseñanza no trata solo de desarrollar dichas capacidades sino de *plantearse* problemas y resolverlos como una forma de aprender (Pozo, 1999).

De acuerdo con *Pozo*, los pasos para la solución de un problema exigen: La comprensión de la tarea, la concepción de un plan, la ejecución del plan y por último el análisis de los planteamientos que lleve a la solución del problema. Estas fases de solución son las descritas por *Polya* los cuales han sido considerados como los métodos generales de resolución de problemas: La *comprensión de un problema* consiste en entender las palabras, el lenguaje o los símbolos del planteamiento, así como asumir la situación como *problema* y asumir la búsqueda de una solución. *Concebir un plan de solución*; las estrategias o heurísticos de solución de problemas, están relacionadas con la caracterización del problema, las relaciones establecidas entre las variables y la relación de dicho problema con otros similares en su planteamiento. La *ejecución del plan*, consiste en comprobar cada uno de los pasos de solución, desarrollar los algoritmos propuestos en el plan y por último *el análisis de la ejecución,* planteando la solución al problema.

2.2. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS:

La resolución de problemas se ha convertido en una estrategia importante para el aprendizaje de las matemáticas ya que el estudiante debe tener la oportunidad de problematizar su aprendizaje, reconocer la importancia en la presentación de sus ideas y el planteamiento de preguntas; a partir de las cuales se cuestione, investigue y proponga estrategias para resolver o rediseñar nuevos problemas; como considera *Vergnaud* (1990: 109)

> *"Son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero ese sentido no se encuentra en las situaciones mismas. Tampoco está en las palabras y los símbolos matemáticos.*
> *…El sentido es una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados por una situación o por un significante en el sujeto individual, los que constituyen el sentido e esta situación o ese significante para ese individuo…"*

Así la enseñanza de las matemáticas está centrada en la construcción del saber por el estudiante, donde el docente planea situaciones didácticas basado en las dificultades y obstáculos de aprendizaje, puede definir o delimitar el estudio, orientar y ayudar a generar procesos de solución frente a los cuestionamientos, inquietudes, conjeturas y propuestas de solución de los estudiantes, por lo cual se reconoce el saber como un producto humano, cuya falibilidad le es inherente, con una historia y movimientos no lineales ni predeterminados, exige como criterio de validez racional la aceptación por parte de una comunidad interesada en la solución de la situación problema. Así, no existe un criterio de verdad sino de validez.

Santos Trigo (2002) reconoce que el aprendizaje de las matemáticas es más que la adquisición de herramientas que permitan la solución de un problema; hechos, definiciones, algoritmos, y procedimientos, establece que en el aprendizaje de las matemáticas los estudiantes deben tener la posibilidad de proponer conjeturas, percibir conexiones de resultados y construir su propio conocimiento de los conceptos matemáticos, el análisis y la validación de los resultados a través de una dinámica de clase que permita la socialización e institucionalización del conocimiento. La responsabilidad del maestro consisten entonces en generar una comunidad en el salón de clases donde se problematice el estudio de las matemáticas, al preparar y proveer situaciones problema basadas en el reconocimiento de las dificultades de los estudiantes, la construcción y generación de pensamiento matemático.

Así, desde la educación matemática se entiende con *Charnay* (1994: 3) como problema:

> *"Una terna: Situación-alumno-entorno. Sólo hay problema si el alumno percibe una dificultad: Una determinada situación que "hace problema" para un determinado alumno, puede ser inmediatamente resuelta por otro (y entonces no será percibida por este último como un problema). Hay, entonces, una idea de obstáculo a superar. Por fin, el entorno es un elemento del problema, en particular las condiciones didácticas de la resolución (organización de la clase, intercambios, expectativas explícitas del docente)".*

Desde este punto de vista, se puede establecer dos tipos de objetivos en la resolución de problemas; un objetivo *metodológico*; en el que aprender a resolver problemas, a investigar, comunicar, argumentar solo se logra en la actividad misma., y *cognitivo* que apunta a la reconceptualización de los conocimientos presentes o hacia la construcción de un nuevo conocimiento a través de la actividad de resolución de problemas.

Es importante plantear problemas donde los estudiantes empleen sus recursos y la discusión reflexiva, la motivación en el estudio de una situación problema le apuesta más a la forma como se espera que el estudiante interactúe con la situación y no a la tarea misma, por lo cual los contextos pueden ser de la vida real, científicos o matemáticos, en la generación de un ambiente donde se promueva la participación del estudiante en la formulación de problemas y la búsqueda de explicaciones con argumentos que implique el uso del lenguaje matemático.

Esto implica diversas consideraciones en el currículo; desde lo que se considera fundamental en las matemáticas escolares, la práctica en el desarrollo de las ideas matemáticas, en el aprendizaje de los estudiantes, lo cual implica cambios en las acciones del docente y del estudiante en el aula. El docente tiene la responsabilidad de problematizar el estudio de las matemáticas; como creador o facilitador de situaciones problema para el estudio y construcción de un concepto matemático, donde el estudiante deben tomar el papel activo de cuestionar, proponer estrategias de solución y generar otro tipo de problemas a partir de su análisis y reflexiones. Así, problematizar los contenido en la enseñanza de las matemáticas está fundamentado en la idea que el conocimiento del área implica la construcción y validez de los procesos de aprendizaje de los estudiantes en la solución de problemas.

Los contextos que pueden abordarse por parte del docente para el diseño de las actividades de aula que favorezcan por parte del estudiante el planteamiento de preguntas, la utilización de diversos recursos, representaciones y estrategias, de acuerdo con *Santos Trigo (*2002) pueden ser contextos *puramente matemáticos, del mundo real o hipotéticos* los cuales incentiven la participación del estudiante en las actividades propias del quehacer matemático. Los contextos *puramente matemáticos*, permiten que los estudiantes hagan uso de diversos recursos matemáticos para comprender las relaciones entre los objetos matemáticos y proponer estrategias de solución a la situación, los contextos *del mundo real* se centran la identificación de las variables de la situación real que son examinadas a partir de recursos matemáticos, en el planteamiento de un modelo matemático que permita reconocer las relaciones entre las variables de al situación y su comportamiento y los contextos *hipotéticos* a partir de la creación de situaciones que se construyen a partir de suposiciones acerca del comportamiento de las variables de la situación, que no se basa en datos o información real, pero que su estudio permite el tratamiento de diversas representaciones y estrategias a nivel matemático para su solución. Así, en este trabajo no importa el contexto de la situación, se debe buscar que el estudiante acceda a diferentes recursos matemáticos y estrategias que le permitan analizar y construir modelos para estudiar los comportamientos de cada una, a partir del planteamiento de conjeturas, argumentos y validación de los mismos, mediante el uso de diferentes representaciones matemáticas.

Se propone así una educación matemática que propicie acciones que no tengan un énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento aplicable y útil para el desarrollo de los estudiantes en su participación y construcción de sociedad. Identificar así la resolución de problemas en el currículo como una parte fundamental para que los estudiantes desarrollen habilidades y destrezas en el desarrollo de un pensamiento reflexivo, crítico ante las situaciones que se presenten a partir del estudio de las representaciones de los objetos matemáticos y las diversas relaciones en situaciones problema.

2.3. EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

En los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998), se considera que la matemática escolar debe promover el desarrollo del pensamiento matemático a través de la cuantificación de situaciones, mediante la apropiación de los conceptos a partir del estudio de ciertos sistemas matemáticos, estos se constituyen en: El pensamiento numérico, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistema de medidas, el pensamiento aleatorio y sistemas de datos y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, que posibilita en el estudiante habilidades del pensamiento como el análisis, la comprensión, la observación, síntesis, generalización y transferencia de los conocimientos construidos a partir de su experiencia escolar y el trabajo por medio de la resolución de problemas.

2.3.1 El Pensamiento Variacional

Indudablemente, el ser Humano esta frecuentemente enfrentado a situaciones de “cambio”, es decir, a situaciones donde un fenómeno produce transformaciones en “objetos” a través del tiempo o del movimiento. De ésta manera, el conocimiento de estas situaciones, así como la posibilidad de un estudio sistemático de éstas, permite tener mayor comprensión de estos fenómenos con el propósito de controlarlos, predecirlos y reconstruirlos de acuerdo a sus necesidades prácticas.

Desde la historia, se reconoce la intención de estudiar sistemáticamente fenómenos donde el cambio aparece como una característica predominante. Justamente, en estos estudios sistemáticos aparece el cálculo como una herramienta teórica que permite explorar, analizar, controlar y predecir situaciones de cambio, como también permite instaurar en un mundo simbólico estos fenómenos, es decir, se logran representaciones simbólicas de la situación. De tal modo; las funciones, los números reales, el álgebra, entre otros, se constituyen en lugares posibles para abordar situaciones de cambio, así como estos forman, en sí mismos, objetos representacionales de dichas situaciones.

Desde esta perspectiva, potenciar Pensamiento Variacional en un ser humano, supone iniciar un estudio sistemático sobre situaciones de cambio, de tal manera que el sujeto activo en este estudio, logre por lo menos desde el cálculo, analizar, organizar y modelar matemáticamente estas situaciones. En últimas, el pensamiento variacional se explicita en la medida en que un sujeto logre comprender y modelar una situación de cambio, desde el dominio de un campo conceptual.

Así, desde la propuesta del MEN (2004) desarrollar pensamiento variacional supone el trabajo desde situaciones donde el cambio este presente, se identifiquen patrones, así como el énfasis sobre los procesos infinitos; es aquí donde la modelación matemática entendida como la acción de hacer uso de representaciones matemáticas para conformar las estructuras o expresiones matemáticas que sirvan de modelo para presentar las relaciones entre las variables de una situación, cobra especial significado en tanto desde ésta se logra matematizar, controlar, manipular, intervenir una situación de variación. Los contextos a nivel de contenidos donde se explicita la variación son: Los conjuntos numéricos infinitos, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables presentando diferentes modelos de función, el contexto algebraico con el sentido simbólico, el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, el contexto de la proporcionalidad y la creación de modelos matemáticos desde las relaciones funcionales.

Quien aborda una situación problema y pretende matematizarla, recurre a sus conocimientos previos y a todas las estructuras cognitivas que dispone para abordar estas situaciones, dando paso de ésta manera a la consecución de un nuevo concepto matemático; en últimas, modelar situaciones desde las matemáticas se constituye en un escenario propicio para generar o construir conocimiento matemático.

Generar y potenciar procesos de pensamiento en el aprendizaje de las matemáticas, sería reconocer distintas acciones cognitivas en los estudiantes, como la interpretación, generalización, deducción, argumentación y acciones de MODELACIÓN[5] como un lugar privilegiado para el desarrollo del pensamiento matemático, más específicamente del pensamiento variacional; es decir, no se trata de transmitir conocimientos matemáticos referidos al cálculo, el álgebra o cualquier *rama* particular de las matemáticas, se trata entonces de privilegiar y potenciar la acción del sujeto en pro de la construcción de conocimiento, en otras palabras:

> *"El conocimiento no es una copia de la realidad, conocer un objeto es actuar sobre él; es modificarlo, transformarlo y comprender el proceso de esa transformación y como consecuencia entender cómo es construido". (Jean Piaget, citado por Mockus, 1988: 40).*

En este sentido la *acción* –sobretodo aquella que concierne al ámbito de las matemáticas—se constituye en fuente tanto de conocimiento como de complejización de las estructuras cognitivas que hacen posible la resolución de una situación y su modificación. Así, actuar matemáticamente significa entonces:

> *..."Traer al terreno de lo siempre ya conocido; es llevar de un juego de lenguaje en algún sentido incierto a otro que—al costo de limitaciones y regulaciones explícitas—ha ganado en certeza y universalidad" (Mockus, 1988: 120)*

---

[5] "La modelación matemática se trata de la utilización de todas las funciones conocidas, de otras ya inventadas pero desconocidas, así como de nuevas que se van a inventar, para simular, representar o modelar procesos reales que están ocurriendo en el mundo. Se trata de capturar las variaciones por medio de modelos matemáticos de distintos tipos para poder seguirlos, hacer simulaciones y predicciones, e intentar controlarlos y modificarlos".
(Vasco, 2000: 26).

De tal modo, pensar variacionalmente significa entonces poner las magnitudes cambiantes de tal forma que se *visualicen*[6] y *cuantifiquen* las relaciones existentes entre éstas, recurriendo para tal fin al uso de dispositivos ya sean gráficos y algebraicos que permitan *representar y disponer* dichas variaciones, pero que además permita entender los procesos que dan lugar al cambio, en este sentido el pensamiento variacional, es—por así decirlo—instrumental[7]**.**

En este sentido los conceptos pueden considerarse de dos formas distintas: *Estructuralmente (como objeto) y operacionalmente (como proceso)*[8]*,* así desde una perspectiva estructural, la función se concibe como un lugar desde el cual el sujeto modela una situación de cambio a través del estudio de variaciones presentes en la situación.

Privilegiar estos actos de MODELACIÓN involucrando herramientas tecnológicas como el software CABRI, implica en principio, permitir que la problemática de la acción se concentre en las matemáticas y no en el aspecto técnico de los recursos tecnológicos, de tal modo estos recursos deberían ostentar de "invisibilidad" para el sujeto actor del proceso de aprendizaje. Dicha "invisibilidad" no supone entonces una completa indiferencia frente al recurso, por el contrario implica ponerlo de tal manera que el actor lo adhiera en sus estructuras de acción. Lo que se ha convertido en un reto para la educación matemática; la mediación de instrumentos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas que permitan el desarrollo del pensamiento matemático, lo cual da al docente una serie de acciones a nivel investigativo en el sentido de proponer situaciones que puedan modelarse a partir de los instrumentos tecnológicos, para

---

[6] Visualizar es pues "*poner bajo un forma extencional, todo lo que siendo relevante para alguna cuestión sea susceptible de grado e igualdad*"; es decir, *Visualizar* –en un sentido cartesiano—*aquello de lo que hablamos es necesariamente extensionalizado, transformado en "magnitudes" (hoy preferimos decir "variables") cuyas relaciones pueden ser presentadas gráficamente y expresadas sintéticamente mediante signos algebraicos.*(Mockus, 1988: 120).

[7] "La acción típicamente humana emplea instrumentos mediadores, tales como las herramientas o el lenguaje, y estos instrumentos mediadores dan forma a la acción de manera esencial". *(*Wertsch*, 1999: 29)*

[8] "Ver una entidad matemática como un objeto significa ser capaz de referirse a ella como si fuese algo real, una estructura estática, que existe en algún tiempo y lugar. También significa ser capaz de reconocer la idea a primera vista y de manipularla como un todo sin requerir los detalles. En contraste, interpretar una noción como un proceso implica verla como una entidad potencial más que como una entidad real, que tiene existencia por ser consecuencia de una serie de acciones. Así, mientras que la concepción estructural es estática, instantánea e integradora, una concepción operacional es dinámica, secuencial y detallada" (Kieran, 1994: 3)

generar acciones de aprendizaje que permitan el desarrollo del pensamiento matemático.

2.3.1. *La comprensión de la noción de función como objeto de aprendizaje:*

Algunas concepciones asociadas a la evolución histórica de la noción de función investigadas por Sierpinska (1992) y Ruiz (1998), desde el estudio de los obstáculos epistemológicos del aprendizaje de la noción de función.

2.3.1.1. Planteamientos de Anna Sierpinska

Sierpinska *(1992)* hace un análisis epistemológico-histórico de la noción de función para determinar los principales obstáculos epistemológicos del aprendizaje asociados a esta noción:

1. *Los objetos variables son aceptados en ciencias naturales o en aplicaciones, pero no en la matemática pura.*
2. *Las magnitudes son entidades cualitativamente diferentes de los números, la proporcionalidad es diferente de la igualdad.*
3. *Fuerte creencia en el poder de las operaciones formales con las expresiones algebraicas.*
4. *Lo más importante de la matemática es proveerse de un cálculo poderoso que le permita a los científicos resolver sus problemas.*
5. *Los objetos geométricos son tomados implícitamente como un todo que contiene en él mismo sus longitudes, su área o su volumen.*

Expone las diferentes concepciones de los estudiantes, asociadas a la función basada en un estudio clínico con cinco estudiantes y en relación con las situaciones de experiencia plantea:

- ***Concepción Primitiva****:* Una función es un desplazamiento de puntos sobre el plano o sobre una línea.
- ***Razón o proporción****:* En un desplazamiento de puntos sobre el plano; la nueva posición se puede describir en relación con la posición inicial por una razón de distancias desde un punto fijo.

- ***Una visión sintética de la curva:*** La función se identifica con su representación en el plano.
- ***Tabla numérica:*** Las funciones vienen dadas por su tabla de valores.
- ***Expresiones algebraicas:*** Una función se identifica por su ecuación.
- ***Una visión analítica de la curva:*** La función es un ente abstracto en unos ejes de coordenadas.
- ***Una relación funcional:*** Existe un tipo especial de relaciones que llamamos funciones.

En su trabajo *On understanding the notion of function*, (1992) plantea la existencia de cuatro categorías de actos de comprensión:

Identificación: de un objeto entre varios objetos.

Discriminación: entre dos objetos, no solo detectando sus diferencias sino también sus propiedades relevantes.

Generalización: entendida como posibilidad de extender el orden de las aplicaciones, abrir nuevas posibilidades de interpretación y descubrimiento.

Síntesis: la percepción de hechos aislados, tales como propiedades, resultados, relaciones, se puede organizar en un todo consistente.

Posteriormente pasa a enunciar una teoría de las acciones de comprensión de la noción de función:

- ***Identificación;*** *desde la identificación de los mundos que cambian.*
- ***Discriminación:*** *A partir del reconocimiento de los procesos que dan lugar al cambio y las relaciones entre las magnitudes variables.*
- ***Generalización:*** *Desde la identificación de las regularidades por las que se produce el cambio y el control de las variaciones.*
- ***Síntesis:*** *A partir del estudio de la simetría entre los mundos que cambian.*

2.3.1.2. Planteamientos de Ruiz Higueras

***Ruiz** (1998),* describe las concepciones de la noción de función a través de las cuales se ha desarrollado históricamente, basándose en el estudio de situaciones problemáticas tratadas en los distintos periodos históricos, dichas concepciones son:

- ***Identificación de regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades y magnitudes variables:***

  Los fenómenos sujetos al cambio, tales como el calor, la luz, la distancia, la velocidad, etc., poseen distintos grados de intensidad y cambian en ciertos límites dados, dichos ejemplos de magnitudes variables encierran la presencia potencial de las medidas, la identificación de los elementos variables en el análisis cuantitativo de todo proceso real de cambio conduciría a la determinación de las variables, pero inicialmente las relaciones sistemáticas entre variaciones se establecieron de manera cualitativas para pasar más tarde a ser cuantitativas.

  Las tablas numéricas construidas mediante el cálculo de valores cambiantes de diferentes magnitudes dependientes de estudios matemáticos, condujeron a una primera aproximación de las relaciones funcionales, pasando de la tabulación de datos empíricos a la búsqueda de regularidades, implica la existencia de un cierto "instinto de funcionalidad".

  Esta concepción se caracteriza por:

  - ✓ *Situaciones:* Todas las ligadas a los fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables.
  - ✓ *Invariantes:* Establecimiento de regularidades entre relaciones de causa – efecto.
  - ✓ *Representaciones:* Medidas y cantidades. Tablas.
  - ✓ *Momento histórico:* Desde la matemática prehelénica, perdurando largo tiempo.

- ***Razón o proporción:***

  Históricamente la herramienta ideal para realizar el análisis cuantitativo de lo real ha sido la proporción, filósofos y matemáticos trataban de buscar la proporcionalidad como relación privilegiada entre magnitudes variables, esta concepción se ha mantenido desde el pensamiento griego y con matemáticos tales como Oresme y Galileo.

Esta concepción se caracteriza por:

- ✓ *Situaciones:* Relacionadas a las magnitudes físicas y en especial en dominios tales como la geometría o la astronomía.
- ✓ *Invariantes:* Relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.
- ✓ *Representaciones:* Las proporciones en principio expresaban las relaciones establecidas (teorema de Thales), pasando posteriormente a expresiones tales como a : b : : c : d
- ✓ *Momento histórico:* Desde la matemática helénica, perdurando en matemáticos tales como Oresme y Galileo.

- ***Gráfica (Visión sintética):***

Representar la relación de variabilidad entre magnitudes por medio de gráficas. Oresme utiliza el grafismo para representar los cambios y así describirlos y compararlos, utiliza la continuidad de los segmentos, pues no disponía de un continuo numérico para representar el movimiento. Estas gráficas se obtenían más por consideraciones cualitativas que por cuantitativas, se consideraban como modelos geométricos de las relaciones y no necesitaban representar muy fielmente dichas relaciones.

Esta concepción se caracteriza por:

- ✓ *Situaciones:* Relacionadas a las magnitudes físicas en las que se intentaba representar gráficamente tanto la variación como las dependencias entre dichas magnitudes.
- ✓ *Invariantes:* Proporcionalidad entre magnitudes. Relación de dependencia cualitativa representada por medio de una figura que describe la cantidad de una determinada cualidad de relación con otra de la cual depende.
- ✓ *Representaciones:* Se usaban en términos específicos: formas, latitud, longitud, se representa la dependencia por medio de gráficos que adquirían su significado de forma global (sintética).
- ✓ *Momento histórico:* Comenzó en las escuelas de Oxford y París en el S.XIV y tuvo su representante más significativo en Oresme.

- ***Curva (analítico – geométrica):***

  La noción de curva surge a partir de la idea de ecuación representada por la relación entre ***x*** e ***y*** como un medio para introducir la dependencia entre dos cantidades variables.

  Esta concepción se caracteriza por:

  - ✓ *Situaciones:* Búsqueda de un método de expresión de las relaciones numéricas establecidas entre las propiedades de objetos geométricos, utilizando el método de coordenadas, conectando la geometría y el álgebra.
  - ✓ *Invariantes:* Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva (Descartes).
  - ✓ *Representaciones:* Ejes cartesianos, coordenadas, representación algebraica.
  - ✓ *Momento histórico:* Surgió a través de los trabajos de Descartes y Fermat, S.XVII y permanece en la matemática.

- ***Expresión analítica:***

  El nacimiento del álgebra permite expresar la dependencia entre variables por medio de expresiones analíticas; existe una ecuación en x e y que permite expresar la dependencia entre ambas *(Descartes, Fermat).* Más tarde *Euler* la identificará con una expresión analítica y *Lagrange* la ampliará a toda expresión de cálculo.

  Esta concepción se caracteriza por:

  - ✓ *Situaciones:* Los problemas de astronomía y física; el estudio del movimiento curvilíneo y de las fuerzas que afectan al movimiento, los problemas de cálculo infinitesimal y los aspectos geométricos representativos ligados a las expresiones algebraicas.
  - ✓ *Invariantes:* Se identifican las cantidades variables con expresiones analíticas; *una función de una cantidad es una expresión analítica compuesta de cualquier manera que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes.* El cambio a la ley analítica o la existencia de leyes diferentes sobre dos intervalos o más de su dominio, para *Euler* y sus contemporáneos determinaba una función no continua que llamarían mixta.

- ✓ *Representaciones:* En 1673 *Leibnitz* introduce el término función representándolo con $f\ x$, *Euler* más tarde lo generaliza como una expresión analítica por medio de la serie: $f\ x = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + ... + a_nz^n + ...$
- ✓ *Momento histórico:* Descartes y Fermat, prosigue con los trabajos mecanicistas y geométricos de Newton y *Leibnitz* (S.XVII) en los inicios del cálculo infinitesimal y continúa con *Bernoulli, Lagrange y Euler* (S.XVII – XVIII) creando poco a poco una disciplina autónoma: El análisis matemático.

- ***Correspondencia arbitraria: Aplicación***

Considerar la función como la idea principal del nuevo análisis, se considera tratarla como una correspondencia de tipo muy general; *cada cantidad, el valor de la cual depende de una o varias cantidades, se denomina función de estas últimas, independientemente que sepamos o no, por qué operaciones es necesario atravesar para pasar de estas últimas a la primera (Lacroix).*

Esta concepción se caracteriza por:

- ✓ *Situaciones:* Las conexiones entre la física y la matemática, como el problema de la cuerda vibrante, a partir de la cual surge la necesidad de crear una concepción más general de la función y de los problemas existentes respecto a la continuidad de funciones.
- ✓ *Invariantes:* La noción de correspondencia arbitraria; *si una variable **y** está relacionada con otra variable **x**, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a **x** hay una regla según la cual queda determinado <u>un único valor de **y**</u>, se dice que y es una función de variable independiente **x**.*
- ✓ *Representaciones:* El término función corresponde con la expresión $f(x)$, o con **y** se representará a partir de la introducción de la teoría de conjuntos y el estructuralismo bourbakista como $f : X \to Y$, o bien $X \to f(x)$. Las representaciones gráficas en el plano cartesiano y aparecen los diagramas de Venn como representaciones de la función con fines didácticos.
- ✓ *Momento histórico:* Desde los últimos trabajos de *Euler* (S.XVIII), continúa en el siglo XIX con las series de *Fourier* y se consolida con los trabajos sobre los números reales de *Cauchy, Dedekind, Lobachevsky, Riemman o Dirichlet*, entre otros.

- ***Función como terna f = (F,X,Y):***

  Se determina la función como una terna *f = (F,X,Y), como un conjunto de pares ordenados que tine la propiedad especial que si dos pares (x, y) y (x, z) del conjunto* $X \times Y$ *tienen el mismo primer elemento, deben tener idéntico el segundo.*

  Esta concepción se caracteriza por:

  ✓ *Situaciones:* Las variaciones modeladas funcionalmente dentro de cualquier dominio científico.

  ✓ *Invariantes:* $f = (A, B, G)$ *es función* $\Leftrightarrow G \subset A \times B, x \in A, y \in G$.

  $$R \text{ es función } \Leftrightarrow x, y, z, (x, y) \in R \text{ y } (x, z) \in R \Rightarrow y = z$$

  ✓ *Representaciones:* Las expresiones algebraicas y las gráficas en el plano cartesiano.

  ✓ *Momento histórico:* A partir de la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjuntos, principalmente, cuando ésta se tomó como base y fundamento de toda la matemática (Finales del S. XIX y primeras décadas del S. XX).

2.3.2. Las representaciones en matemáticas:

Las matemáticas cobran existencia, o son posibles de referir como un lugar donde el ser humano decide consagrar sus acciones, ya sea sobre la naturaleza o en problemas que se instauran desde lo meramente subjetivo, en tanto desde sistemas de signos constituidos culturalmente, se pueden "nombrar" tanto los objetos pertenecientes a este contexto de acción, como las relaciones que se establecen entre estos. De tal modo las matemáticas poseen un soporte "material" que le permite hacer "visible" tanto sus objetos de estudio como propiamente sus resultados.

Justamente es ésta "materialidad" la que permite el desarrollo de las matemáticas, desde la necesidad de sus representaciones para modelar los estudios de diversas situaciones matemáticas:

> *"El progreso en matemáticas tendría lugar mediante ciclos de conjetura, propuesta de prueba, búsqueda de contraejemplos, análisis de la prueba y posterior afinamiento tanto de la conjetura como de la prueba. La mayor parte de los conceptos habrían surgido en este ciclo que sin embargo quedaría ocultado por la manera usual (euclidea) de enseñar las matemáticas y de presentar los descubrimientos matemáticos. En este sentido, la*

> *“representación” surge o por lo menos se afina en el proceso de discusión racional; no es algo extraño a ella”. (Mockus, 1998: 160)*

Las representaciones dan la posibilidad ya sea de objetivar las conjeturas y diseñar las pruebas, o de constituirse en soportes intervenibles desde las reglas establecidas en matemáticas, es así como en principio se podría suponer que cualquier actividad matemática que se movilice para determinado fin está íntimamente ligada a una actividad de representación.

Duval (1999) afirma que “*en las matemáticas el instrumento de mediación en los procesos cognitivos son los sistemas semióticos de representación*”, al igual que al describir la existencia de los objetos matemáticos como entes abstractos, dichos objetos pueden ser dispuestos a través de todas sus representaciones. Los sistemas de representación asociados a la noción de función son: Expresiones verbales, representaciones pictóricas, tabular, simbólico o algebraico y gráfico; que establecen una aproximación a las características de la noción, los escenarios de la variación y los procesos de modelación de las relaciones entre variables para explicar el cambio.

La *representación gráfica*; permite el establecimiento de relaciones de dependencia entre variables, los análisis cuantitativos y cualitativos; el sentido de la distribución de puntos en los cuadrantes, de aumento o disminución, el rango de valores. *La representación tabular;* permite estudiar la variación, el cambio mediante procesos aritméticos que permiten comprender las nociones de variable y el estudio de regularidades que pueden ser representadas en expresiones algebraicas. *La representación simbólica;* expresa las relaciones de dependencia entre las variables por medio de símbolos algebraicos que permiten generar reglas de comportamiento de las variaciones. La relaciones entre los sistemas de representación permiten la interpretación y análisis global de las variaciones de una situación, cada una permite diferentes procesos de análisis frente a la relación de dependencia entre las variables y sus momentos de cambio.

2.4. LA MEDIACION DEL CONOCIMIENTO

Desde la evolución del hombre, las acciones realizadas con alguna intención o razón han sido mediadas por algún instrumento; por ejemplo: En el descubrimiento del fuego, en la caza, la recolección de alimentos o el conteo de las pertenencias, vistos como herramientas que a través de la historia han ido transformándose de acuerdo a las necesidades en la adaptación del hombre a su ambiente. *Wertsch* (1999) enuncia que "*toda acción humana, tanto en el plano individual como en el social, está mediada por herramientas y signo*s" al igual que *Vigosky* citado por *Wertsch* (1999) reconoce como "*propiedad definitoria de las funciones superiores, exclusiva de los humanos, el hecho que estén mediadas por herramientas y signos tales como el lenguaje natural*", así toda acción humana está mediada por una herramienta; ya que la relación entre el actor y el ambiente, *Habbermas* citado por Wertsch (1999), es lo que establece la noción de acción. La necesidad de comunicación del hombre tanto interior como exterior en su relación con el contexto sociocultural, surge de la tensión entre los elementos del entorno, ya que "*La acción mediada se caracteriza por un tensión irreductible entre el agente y los modos de mediación*" o herramientas culturales *(Wertsch, 1999)*. Así, las matemáticas son un área calificada como "*mediación semiótica*" ya que la actividad matemática se realiza a través del reconocimiento perceptual de las representaciones de los objetos matemáticos, no es posible hablar de un objeto matemático sino a través de las formas de representación, *Duval* (1999). Así, para la educación matemática y para el estudios de variación se manejan diferentes sistemas de representación como los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas y las algebraicas, por lo cual los instrumentos tecnológicos se convierten en mediadores del conocimiento en el momento que permitan generar una tensión a nivel cognitivo y transformar la visión frente a las relaciones de los objetos matemáticos en distintos contextos.

2.4.1. *Instrumentos Tecnológicos Como Mediadores Del Conocimiento:*

En este sentido, los instrumentos tecnológicos *(Geometría Dinámica- Software **Cabri**)* cobran relevancia en la escena educativa en tanto desde su uso[9] e implementación en el aula de matemáticas posibilitan el *desarrollo del Pensamiento Matemático*, parece que la importancia de implementar tecnología en educación radica en la necesidad de mejorar la calidad de la educación y elevar el nivel de productividad tecnológica y científica creando así mejores condiciones sociales y económicas que suponen un imprescindible desarrollo del país, a través del reconocimiento del potencial de los instrumentos tecnológicos en el proceso de enseñanza y de aprendizaje *(MEN, 1998).*

Ahora bien teniendo en cuenta dicha importancia el instrumento tecnológico empieza a formar parte no solo del entramado social sino que además se instaura en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las Matemáticas, por tanto afecta los roles tanto del conocimiento como del profesor y el alumno. En este sentido; ¿Cómo se transforman estos roles, al implementar recursos tecnológicos en el aula?, ¿Cuál es el papel que toman estos recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje?, ¿Qué tipos de actividades deben diseñarse para desarrollar pensamiento matemático, haciendo uso de los recursos tecnológicos?, ¿De qué forma se deben plantear a los estudiantes éstas actividades?, preguntas que se constituyen importantes en tanto ponen como punto de reflexión el actuar del profesor en el aula, así como su conocimiento profesional.

Es así como la pregunta por la presencia de la tecnología en la educación matemática abre las puertas de la dimensión epistemológica del conocimiento que se genera en la escuela, que a posteriori la permite el profesor redimensionar su conocimiento profesional así como su labor en la escuela.

De este modo, se considera que las herramientas tecnológicas, en particular las calculadoras gráficas, son "*HERRAMIENTAS DE AMPLIFICACIÓN Y DE RE-ORGANIZACIÓN COGNITIVA*

---

[9] El uso aquí nombrado puede ser tan complejo como se quiera, en tanto no supone un mero actuar con la maquina, sino por el contrario, es el contexto propicio donde se da una relación *dialógica* –desde el punto de vista de Bajtín— entre la maquina y el sujeto.

> *...Es inevitable que al introducir las herramientas tecnológicas en la actividad de los estudiantes, se termine produciendo una nueva actividad matemática que, a su vez, genere una re-organización del conocimiento de los estudiantes. La presencia de tales instrumentos puede re-organizar todo el funcionamiento cognitivo"... (Moreno Armella, citado en MEN, 2001: 85)*

Desde esta perspectiva, entender las calculadoras como herramientas de AMPLIFICACIÓN implica considerar que en ellas es posible *"...ver, amplificado, aquello que podía ser visto a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto de nuestra visión." (Moreno Armella, MEN, 2001: 85)* y entenderlas como herramientas de RE-ORGANIZACIÓN[10] implica considerar que en ellas es posible ver lo que antes no era susceptible de ser observado.

Es así como el software *Cabri Géométre*[11] permite la dinamización de objetos geométricos, la construcción de situaciones geométricas de diversos tipos, en este se pueden manipular los objetos construidos, efectuar verificaciones, medir, calcular, hacer animaciones, procesos que permiten generar conjeturas y realizar modelaciones de problemas propuestos.

> *"La diferencia fundamental entre un entorno de lápiz y papel y un entorno de geometría dinámica es precisamente el dinamismo. Como las construcciones son dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren temporalidad: ya no son estáticas, sino móviles, y por lo tanto sus propiedades deberán estar presentes en todas las posibles posiciones que tomen la pantalla"* (*Castiblanco*, 2003: 42)

Así, permite visualizar el comportamiento de las variables y la posibilidad de trabajar con varios sistemas de representación simultáneamente que por la naturaleza de la herramienta son dinámicos, lo cual permite establecer relaciones entre varias representaciones y poder indagar y determinar las posibles variaciones y cambios en cada una.

---

[10] **"**La metáfora de las herramientas de re-organización, sugiere pensar en un microscopio. Con el microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta. Accedemos entonces a otro nivel de la realidad, cualitativamente distinto. Se abre entonces, la posibilidad de acceder a un conocimiento nuevo." *(Moreno Armella, MEN, 2001: 85).*
Es de anotar, que funciones como **AMPLIFICAR** y **RE-ORGANIZAR,** más que ser características propias de estas herramientas tecnológicas se constituyen en un proceso que concretamente se refiere a la manera como se vinculan dichas herramientas, en la actividad humana, en particular en la actividad matemática.

[11] ***Cabri Géométre*** nació al final de los 80 en los laboratorios de investigación del CNRS (Centro Nacional de la Investigación Científica) y de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, es ahora desarrollado y distribuido por la Sociedad Cabrilog, fundada en marzo de 2000 por Jean-Marie Laborde, director de investigación del CNRS.

3. METODOLOGÍA

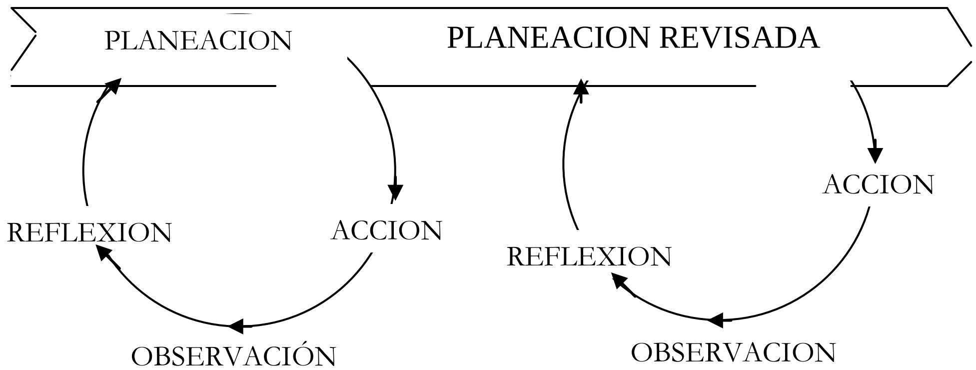
3.1. ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN: Cualitativa

Se trata de una investigación orientada a un enfoque cualitativo, en donde el direccionamiento del investigador de acuerdo a *Pérez Serrano* (1994) citado por *Oviedo (2006:)*; *“radica en la realización de: descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables, incorporando la voz de los participantes, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones tal y como son expresadas por ellos mismos”.* En este sentido la investigación es *descriptiva*, ya que comprende el registro, análisis e interpretación de los datos, frente al desarrollo del pensamiento matemático desde la caracterización de los procesos de resolución de problemas vinculados a situaciones de variación, de estudiantes de grado octavo del Liceo Hermano Miguel de La Salle.

3.1.1. Diseño de Investigación: Investigación acción:

Caracteriza trabajos en los cuales la autorreflexión, la participación en procesos de cambio, fruto de la acción colectiva, constituyen el centro de las tareas de investigación. Para Mckernan (1999), la investigación-acción es “el proceso de reflexión por el cual en un área-problema determinada donde se desea mejorar la práctica o la comprensión personal, el profesional en ejercicio lleva a cabo un estudio –en primer lugar para definir con claridad el problema; en segundo lugar para especificar un plan de acción– que incluye el examen de hipótesis por la aplicación de la acción al problema. Luego se emprende una evaluación para comprobar y establecer la efectividad de la acción tomada. Por último, los participantes reflexionan, explican los progresos y comunican estos resultados a la comunidad de investigadores de la acción. La investigación-acción es un estudio autorreflexivo de los profesionales para mejorar su práctica”.

En este sentido el procedimiento metodológico adoptado en la investigación acción lo ilustra la espiral autorreflexiva compuesta por ciclos sucesivos de planeación, acción, observación, reflexión, así:



Planeación. Especificación del plan de acción basado en resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de grado octavo del Liceo Hermano Miguel La Salle. Desde el diseño de dos situaciones de variación en el software Cabri por parte del investigador, las cuales serán estudiadas por los estudiantes a partir del planteamiento de una secuencia didáctica basada en los momentos de comprensión de la función, según *Sierpinska* (1992).

Acción. Desarrollo del plan de acción. La propuesta de las situaciones problema por parte del investigador vinculadas al pensamiento variacional y la puesta en marcha de la secuencia didáctica del estudio de las situaciones que se convierten en ambientes generadores de problemas para el estudiante. Desde la "emisión de hipótesis", la cual permite la visualización de los momentos de resolución de los estudiantes frente a las situaciones problema propuestas y frente a estas el "análisis de resultados", que favorece la creación de conflictos cognitivos al comprobar la existencia de discrepancias entre lo que se ha hipotetizado y los resultados obtenidos, o bien entre los resultados y el marco teórico en que se ha trabajado, necesitando una revisión crítica del proceso para la solución del conflicto planteado con el fin de propiciar los procesos de pensamiento que contribuyen al desarrollo del pensamiento variacional.

Observación, de los procesos de resolución de problemas y de las acciones de los estudiantes en la apropiación de las situaciones problema; en sus momentos de socialización de los procesos de resolución a partir de los registros escritos y participaciones en el aula.

Reflexión, de los procesos de resolución de las situaciones problema de los estudiantes a partir de la metodología de resolución de problemas en el aula desde los procesos de acción, formulación y validación e institucionalización del conocimiento construido por los grupos la socialización de los mismos.

Metodología desde se documentan los momentos de solución frente al estudio de las situaciones de variación propuestas, que permitan potenciar desde la resolución de problemas el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

3.2. POBLACIÓN

La población de estudiantes con la cual se desarrollo la propuesta didáctica, son 44 integrantes de octavo grado entre los 12 y 14 años de edad, del *Liceo Hermano Miguel La Salle* una institución educativa de carácter privado que atiende una población masculina en los niveles de preescolar, básica y media, que imparte una formación bajo los principios cristianos y los valores Lasallistas.

3.3. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Los instrumentos de recolección de datos se harán a partir de:

El ***Estudio de los registros escritos de los estudiantes*** como el principal instrumento para describir los procesos de resolución de problemas de los estudiantes, de la evaluación del trabajo en grupo y de los procesos de validación del trabajo grupal. Ya que en los registros escritos se evidencian los acuerdos grupales en la solución de los problemas y los diferentes tipos de representaciones matemáticas que se usan en cada momento de comprensión de la situación de variación. Acompañado a su vez de la ***observación directa***; de los momentos de aula en el desarrollo de la secuencia didáctica, como participante activo en la orientación de las actividades y como investigador en el diálogo permanente con los estudiantes en los momentos de trabajo a nivel grupal y de socialización e institucionalización de los procesos de resolución.

3.4. ELEMENTOS DE COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Esta investigación al ser de tipo cualitativo describe los procesos de solución de problemas de los estudiantes en cada momento de comprensión de las situaciones de variación estudiadas, por lo tanto la investigación busca analizar tres aspectos tratados para la enseñanza y el aprendizaje de la función a partir del estudio de situaciones de variación desde la noción de función lineal y función inversa, por medio de la resolución de problemas, dichos aspectos son:

3.4.1. *La resolución de problemas de situaciones de variación*

Este análisis es de tipo cualitativo y cuantitativo ya que se basa en el estudio de los momentos de comprensión de la función descritos por Sierpinska (*1998*), frente al estudio de las situaciones de variación *La Balanza Virtual y La Máquina Hidráulica* que hacen los estudiantes de grado octavo del Liceo Hermano Miguel La Salle, los cuales describen las exploraciones en cada momento de estudio de las variaciones iniciando por relaciones de tipo cualitativo para luego explicitarlas en relaciones cuantitativas.

- ***Identificación;*** *desde la identificación de los mundos que cambian.*
- ***Discriminación:*** *A partir del reconocimiento de los procesos que dan lugar al cambio y las relaciones entre las magnitudes variables.*
- ***Generalización:*** *Desde la identificación de las regularidades por las que se produce el cambio y el control de las variaciones.*
- ***Síntesis:*** *A partir del estudio de la simetría entre los mundos que cambian.*

3.4.2. *Las representaciones matemáticas en el estudio de situaciones de variación.*

Este análisis es de tipo cualitativo y cuantitativo en el que a partir de los momentos de compresión de la función se observan las representaciones usadas por los estudiantes para dar a conocer sus comprensiones frente a la situación de variación y la correlación existente entre cada una de ellas, la necesidad del uso de la representación en el estudio de las variaciones y no el estudio de las representaciones impuestas. *"La* *calidad de la comprensión de la situación de variación dependerá de las relaciones que el estudiante pueda establecer entre las diferentes representaciones matemáticas" (MEN, 2004: 21)*

3.4.3. *Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas por medio de la resolución de problemas*

Este análisis es de tipo cualitativo como reflexión del investigador como docente de matemáticas con el fin de exponer el papel del docente, el estudiante y el conocimiento frente al uso de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas por medio de la metodología de resolución de problemas.

3.5. PROPUESTA DIDACTICA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VARIACIÓN MEDIADOS POR LA GEOMETRÍA DINÁMICA

Esta propuesta tiene como finalidad dar una mirada a los procesos de solución de problemas de los estudiantes frente a situaciones de variación, procesos mediados por la geometría dinámica, en la cual se reconoce en la resolución de problemas un camino para el desarrollo del pensamiento variacional.

Por lo tanto se tendrá como referencia el tratamiento que hace *Sierpinska* de la noción de función, donde para la comprensión del concepto de función describe cuatro categorías de actos de comprensión: ***La identificación, discriminación, generalización y síntesis***; los cuales están directamente relacionados con el contexto a estudiar, por lo cual considera que frente a este estudio se deben privilegiar *"La conciencia de existencia de los mundos que cambian, de los procesos que dan lugar al cambio, de la identificación de las regularidades por las que se produce el cambio y crear la conciencia de la asimetría entre los mundos que cambian (Variable dependiente e independiente)*" (*García*, 2000: 5).

Haciendo énfasis en manejo de las representaciones matemáticas para el estudio del cambio; la *representación gráfica* permite evidenciar las cualidades cambiantes de los objetos, la *representación tabular* como un sistema convencional en la presentación de las relaciones numéricas entre variables que permiten estudiar las reglas de variación para ser representadas como *expresiones algebraicas*.

En consecuencia dicho tratamiento a partir de la resolución de problemas induce a formular tres *fases*, las cuales no son momentos lineales en dicho trabajo, sino que se presentan de acuerdo a las acciones generadas en el aula, dichos momentos se ilustran en el siguiente cuadro, Cuadro tomado de: Charnay (1994: 58).

La resolución de problemas como *fuente, lugar y criterio* de la elaboración del saber

- Acción
  - Situación-problema (el Alumno busca un procedimiento de resolución).
- Formulación Validación
  - Formulación-confrontación de los procedimientos, puestas a prueba.
- Institucionalización
  - Nueva herramienta
  - Ejercitación
  - Síntesis, lenguaje convencional
  - Problemas: evaluación para el maestro, resignificación para el alumno

A continuación se presenta las situaciones de variación construidas en el software cabri modeladas por las relaciones funcionales lineal e inversa.

3.6. SITUACIONES PROBLEMA DE VARIACIÓN:

El planteamiento de los contextos de variación está basado en uno de los trabajos en psicología cognitiva de *Piaget* (1972) en torno al esquema operatorio[12] del equilibrio**,** quien plantea un estudio frente al esquema de la proporcionalidad en relación con el problema del equilibrio para cada estadio del pensamiento. Para tales efectos realiza una serie de observaciones a partir de las experiencias que un sujeto establece con una

[12] "Piaget pone un gran énfasis en la representación mental de las acciones y en la acción mental (reversible) sobre tales acciones interiorizadas, énfasis que se manifiesta en la importancia otorgada a la noción de operación; *(El conocimiento no es una copia de la realidad, conocer un objeto es actuar sobre él; es modificarlo, transformarlo y comprender el proceso de esa transformación y como consecuencia entender cómo es construido)*, por consiguiente la operación es un conjunto de acciones que modifican el objeto y que capacitan al sujeto para obtener las estructuras de la transformación". *(Mockus, 1988: 39).*

herramienta que pone en evidencia las estadios por los que pasa un sujeto en la consecución de tal esquema[13].

La herramienta empleada por *Piaget* justamente es la balanza, no solo por la posibilidad de priorizar en ella el mecanismo del equilibrio, sino por la explicitación de la proporción para explicar tal equilibrio. Así, este trabajo se constituye en una base fundamental para el diseño y planteamiento de la secuencia de enseñanza y la construcción de una balanza virtual y una Bomba Hidráulica en el mundo de CABRI, como contextos de variación para el estudio de la proporcionalidad.

Así el trabajo de Piaget en torno al esquema operatorio del equilibrio, es un primer paso para dar inicio a la construcción de la noción de función por medio de las variaciones que se presentan en las relaciones que se establecen entre las variables involucradas en el sistema de equilibrio.

Evocar dichos objeto como construcciones geométricas en el mundo dinámico de CABRI entendiendo estos *contextos hipotéticos* como lo especifica *Santos Trigo* (2002), traen consigo las ventajas que la herramienta tecnológica puede brindar en torno al estudio de una situación; la *manipulación* de la balanza y la bomba hidráulica ya que el estudiante puede actuar sobre ésta y transformar sus estados, la *ejecutabilidad* ya que se puede modificar los pesos y distancias, dando la visión de transformación de los mismos y *la visualización* de los fenómenos que ocurren en las situaciones.

Se pretende que dichos contextos adquieran doble sentido en un contexto de aula:

- Se constituya como un ambiente generador de problemas.
- Se convierta en un instrumento que le permita construir caminos de solución a problemas que se planteen.

Ahora Bien, ¿Qué significa que la balanza virtual y la bomba hidráulica se constituyan en ambientes generadores de problemas?, estos traen una riqueza conceptual en acción, es decir, observar sus funcionamientos, así como indagar por el mismo, implica entrar en el terreno de la proporción inversa o directa, en últimas quien se enfrente al

[13] Véase en referencia a este tema: Piaget Jean, Inhelder B, DE LA LÓGICA DEL NIÑO A LA LÓGICA DEL ADOLECENTE: Ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales, Paidos, Buenos aires, 1972.

estudio de las variaciones presentes necesariamente tendrá que pensar proporcionalmente, además deberá someterse a los movimientos que se pueden reproducir en dichos contextos, de tal modo que se pone de relieve las transformaciones que se suceden en ella, intentando explicar las razones por las cuales se dan estas transformaciones. Justamente, a partir de estas posibilidades se generan problemas, de tal modo que el alumno construya un saber en interacción con su entorno de aula.

3.6.1. La Balanza Virtual[14]

Para diseñar la balanza en la realidad virtual del mundo CABRI es necesario determinar su funcionamiento en términos de las relaciones geométricas que en ella imperen. En principio, se requiere estudiar los dos fenómenos característicos en la balanza: El equilibrio y desequilibrio. Estos estados se reconocen —por lo menos visualmente— por referencia a la posición del brazo de la balanza, es decir, si el brazo está completamente vertical indica equilibrio, de lo contrario advierte desequilibrio.

En este sentido, reconocer el equilibrio en la balanza por referencia a la verticalidad del brazo, implica suponer que dicho brazo es perpendicular tanto a la base de la balanza —entendiendo por base: El soporte donde descansa el brazo, que incide en el centro de masa del sistema— como a los vectores que representan los pesos suspendidos en tal sistema *(Ver Ilustración 1).*

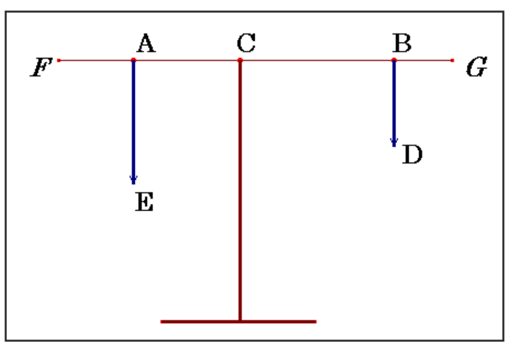


Ilustración 1

Así, el fenómeno de equilibrio –en un sistema como la balanza— ocurre, hipotéticamente, en la medida en que existan fuerzas contrarias[15] equivalentes,

[14] Instrumento construido investigación desarrollada para optar al título de pregrado en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. **FUENTES D**, Johanna Andrea, **PEREZ H.**, Edgar. ***La Modelación Matemática Mediada por una Herramienta Tecnológica***. Bogotá. 2003.

dispuestas de tal modo que el producto entre el peso y la distancia que lo separa del centro de masa sea exactamente igual al producto entre el peso y distancia del otro lado de dicho centro.

Se trata entonces de mostrar que dicho estado de equilibrio se describe por la proporción: $\frac{d}{d'} = \frac{p'}{p}$.

Donde $d \; y \; d'$ representan las distancias que separan a los pesos $p \; y \; p'$ del punto C que representa el centro de masa del sistema, así: $d = m\overline{AC}, \; d' = \overline{CB}$ y $p = m\overline{AE}, \; p' = \overline{BD}$.

En particular, la característica dinámica que adquiere la balanza virtual, permite modificar pesos y distancias para obtener equilibrio o desequilibrio y por tanto brinda la posibilidad de iniciar estudios con respecto a las relaciones que deben guardar estos pesos y distancias para obtener los estados anteriormente mencionados, lo que en definitiva permite ubicarse en un contexto de variación[16].

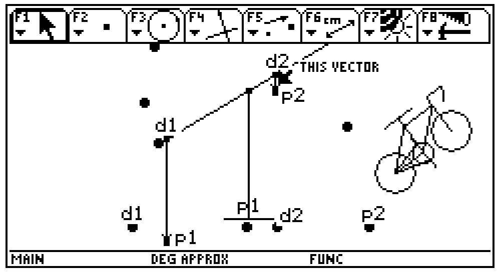
---

[15] En concordancia a la definición III expuesta por Newton: «*La fuerza ínsita de la materia es un poder de resistencia de todos los cuerpos, en cuya virtud perseveran cuanto está en ellos por mantenerse en su estado actual, ya sea de reposo o de movimiento uniforme en línea recta» (Isaac Newton, Principios Matemáticos de la Filosofía Natural, tecnos, Madrid, 1997, Pág.28),* el peso como fuerza ejercida sobre todos aquellos cuerpos inmersos en este campo gravitacional y que promueve algún movimiento en los mismos, presenta una « *fuerza ínsita*» con el fin de recuperar su estado de reposo.

[16] Una rápida visión a la evolución histórica, desde las matemáticas, del estudio de la variación permite afirmar que ésta se inicia con las tablas babilónicas, con las gráficas de variación (Oresme en la Edad Media) y con las fórmulas algebraicas de origen renacentista. Particularmente, el contexto de la variación proporcional para modelar las situaciones de variación cobra especial relevancia por ser la única teoría matemática con la que se contaba en la Edad Media. Pero es en el contexto del estudio matemático del movimiento donde se alcanza la construcción matemática de la variación, lo que configura el Cálculo. *(MEN, 1998: 49).*

Así el paquete de instrumentos diseñados con tales propósitos es:

3.6.1.1. Primer Instrumento: *Desebala*

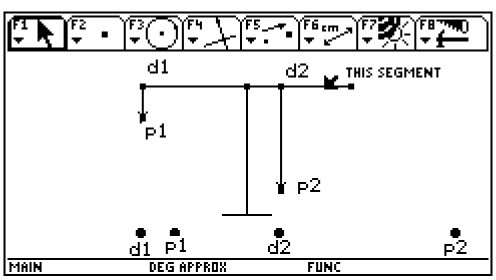


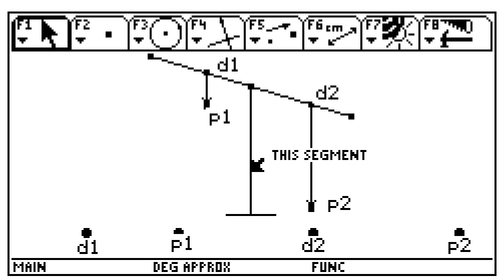
Estado**:** Balanza en estado de equilibrio o desequilibrio.

Descripción**:** Esta balanza permite simular estados de equilibrio o desequilibrio de acuerdo a la ubicación del peso en cada brazo de la balanza y la cantidad de peso que coloque allí.

Funcionamiento**:** Esta balanza virtual, al igual que los siguientes instrumentos es manipulada por cuatro puntos que tienen como etiquetas $d_1, d_2, p_1, p_2,$ que se encuentran ubicados en la parte inferior de la pantalla. Dichos puntos pueden ser desplazados únicamente de manera horizontal y cada uno tiene un intervalo de desplazamiento. Estos botones permiten transformar los pesos y las distancias en la balanza.

3.1.1.2. Segundo Instrumento: *disbala*

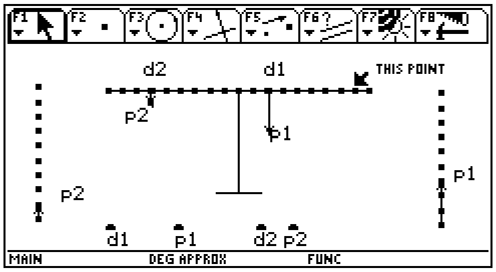


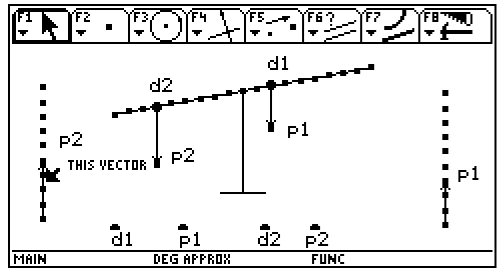


Estado**:** Balanza en estado de equilibrio o desequilibrio.

Descripción**:** De igual manera, esta balanza permite simular equilibrios y desequilibrios, y el funcionamiento es exactamente igual que el primer instrumento, a diferencia que en éste no aparece el juego anterior.

3.1.1.3 Tercer Instrumento: *discreba*

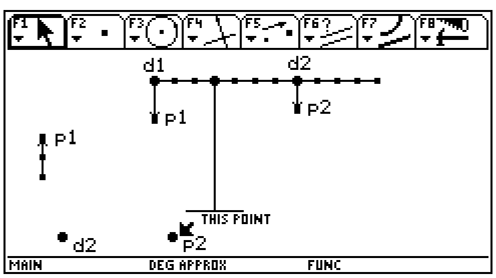


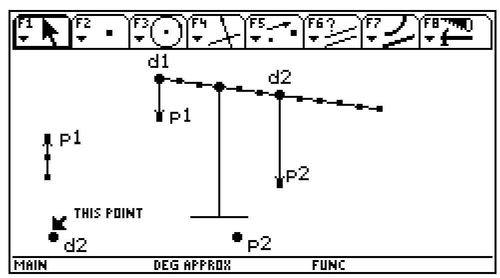


***Estado*:** Balanza discreta en estado de equilibrio o desequilibrio

***Descripción*:** En este instrumento los pesos y las distancias son susceptibles de ser cuantificados, es así como en el instrumento aparecen los pesos (*p1*, *p2)* y las distancias *(d1*, *d2)* referenciados por una serie de marcas que permiten dar cuenta de la cantidad de peso y distancia con los cuales se está trabajando, medidas por unidades tomadas como la distancia entre un punto y el inmediatamente consecutivo a él.

3.1.1.4 Cuarto Instrumento: *discreba2*

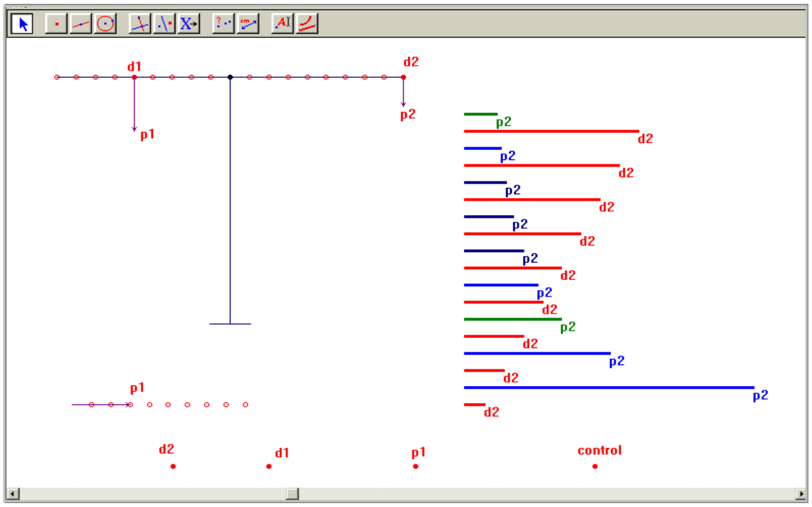




***Estado*:** Balanza discreta en estado de equilibrio o desequilibrio.

***Descripción*:** Este instrumento permite medir un peso y dos distancias por medio de la unidad construida en el instrumento anterior, es decir, hay un único peso *(p2)* que se mueve de manera continua en comparación a las distancias *(d1,d2)* y el otro peso *(p1)* que se mueven de manera discreta.

3.1.1.5 Quinto Instrumento: *grafiba*



Estado: Balanza discreta en estado de equilibrio

Descripción: Este instrumento opera sobre el equilibrio de la balanza, para ello solo es posible intervenir dos distancias y un peso; el otro peso queda sujeto a las condiciones que establezca el usuario para obtener el estado de equilibrio. Además permite observar como segmentos a los pesos *(p2)* y distancias *(d2)* necesarios para equilibrar la balanza dejando constante el peso *(p1)* y la distancia *(d1)*. Aún en este instrumento se mantienen las unidades de medida para pesos y distancias.

Estos instrumentos están construidos –como se ha mencionado anteriormente— para simular un fenómeno de cambio desde el cual se pretende realizar un trabajo de modelación matemática por parte de un grupo de estudiantes.

Históricamente, los conceptos matemáticos aparecen como consecuencia de una serie de actividades matemáticas en torno a problemas que se plantean desde la vida práctica –*público*— o desde un contexto restringidamente matemático—*privado*—.

Es decir, quien aborda un situación y pretende matematizarla, recurre a sus conocimientos previos y a todas las estructuras cognitivas que dispone para abordar estas situaciones, dando paso de ésta manera a la consecución de un nuevo concepto matemático. En últimas, modelar situaciones desde las matemáticas se constituye en un escenario propicio para generar o construir conocimiento matemático.

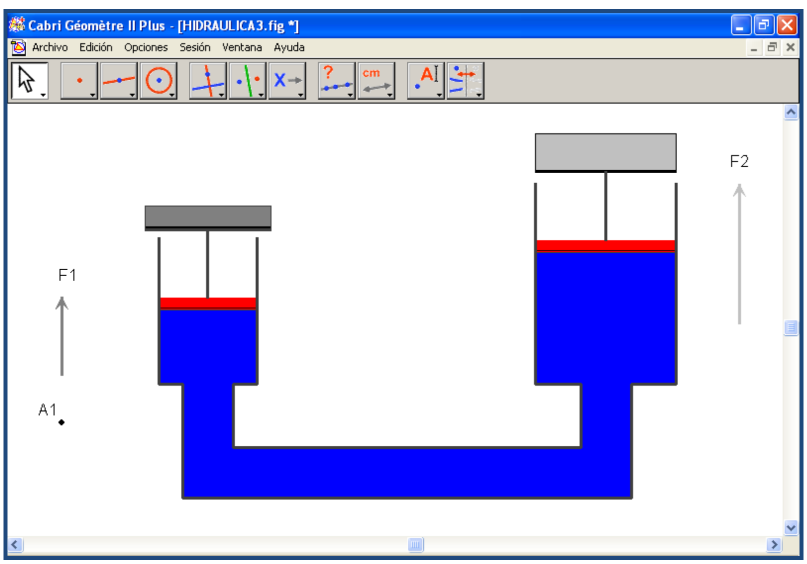
3.1.2. Máquina Hidráulica:

Este instrumento es una simulación hipotética de las relaciones existentes entre las áreas y fuerzas que se aplican en una máquina hidráulica, a partir de las cuales se modela el principio de Pascal, el cual se puede explicar como *La presión que se aplica a un líquido encerrado dentro de un recipiente se transmite por igual a todos los puntos del fluido*, la presión se manifiesta como una fuerza perpendicular a la superficie, cualquiera sea la orientación de ésta, entendiendo la presión como la magnitud de la fuerza perpendicular por unidad de área, así: $P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

A diferencia del equilibrio en la balanza, la igualdad en las presiones no es evidente en el instrumento, esta se da únicamente a partir de la relación anteriormente mencionada, por lo tanto los análisis se te pretende generar alrededor de este instrumento es la variación en las presiones; cuando es mayor, menor o igual.

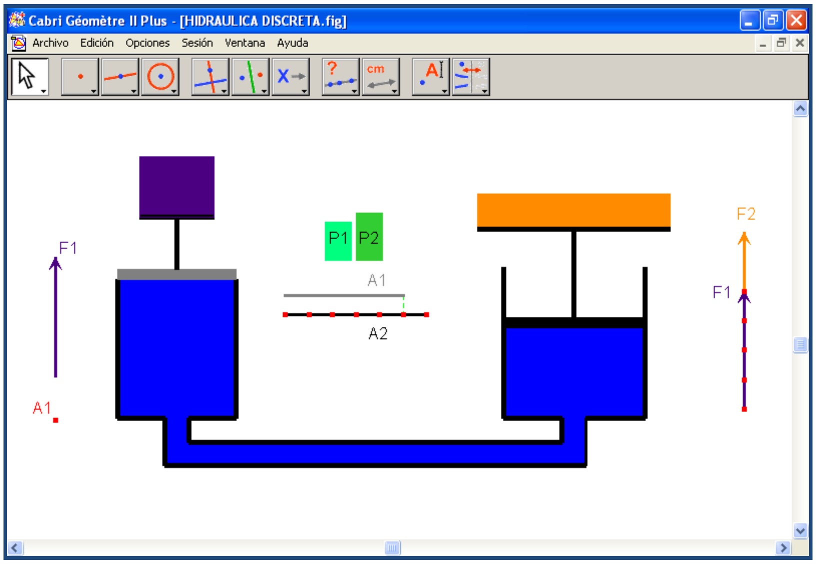
Por lo tanto los dos instrumentos para la máquina hidráulica son:

3.1.2.1. Primer Instrumento:



Este instrumento permite los estudios cualitativos de las variaciones presentes, como un primer momento para la identificación de las magnitudes variables, en donde es posible modificar los pesos[17] F1 y F2 y el área A1, el área A2 es constante y en un segundo momento establecer las relaciones entre las variables y a partir de ellas definir lo que varía en la máquina hidráulica: La presión. Así estudiar variaciones de desigualdad en las presiones, cuando hay mayor o menor presión.

3.1.2.2. Segundo Instrumento:



El dinamismo en este instrumento permite la modificación del peso F1 y el área A1, el peso F2 y el área A2 son constantes, nos introduce a estudios cuantitativos ya que se dan herramientas como los vectores F1 y F2 sobrepuestos en los que se indica la cantidad de unidades de uno con respecto al otro y los segmentos A1 y A2 que igualmente evidencian la comparación entre las unidades de cada área, que permiten ver relaciones a nivel discreto. Así como a partir de los medidores de presión se puede ver la igualdad o desigualdad entre las mismas. Lo que se busca con este instrumento es a partir de las relaciones y comparaciones entre los pesos y las áreas se establezca el principio de Arquímedes bajo el análisis de la igualdad entre presiones.

---

[17] El **peso** es la fuerza que resulta de la acción de la gravedad en la materia.

3.7. LAS SECUENCIAS DIDÁCTICAS[18] FRENTE AL ESTUDIO DE LAS VARIACIONES EN LA BALANZA VIRTUAL Y LA MÁQUINA HIDRÁULICA

Las acciones para el estudio de situaciones de variación están fundamentadas por el estudio que reconoce *Sierpinska* (1992) frente a los momentos para abordar situaciones de variación, de tal modo que se en dicho estudio se cree la conciencia de:

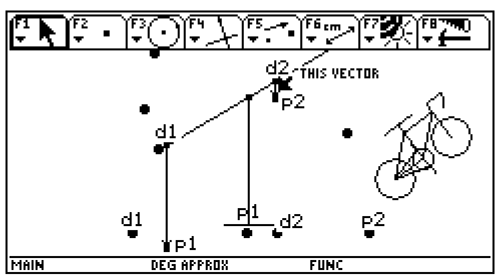
- *La existencia de los mundos que cambian*
- *Los procesos que dan lugar al cambio*
- *La identificación de las regularidades por las que se produce el cambio*
- *La simetría entre los mundos que cambian (Covariación)*

Por lo cual las acciones en el aula que pretenden problematizar la situación están planteadas para crear la conciencia de las variaciones presentes.

3.7.1. La Secuencia Didáctica para el estudio de las variaciones en la Balanza Virtual.

3.7.1.1. Identificación: Identificación de las Magnitudes Variables**:**

Instrumento: Desebala.



Planteamiento: Por medio de la manipulación de los botones d_1, d_2, p_1, p_2 hacer que el extremo de cada brazo de la balanza toque los puntos que están indicados y se complete la figura que aparece en el extremo derecho de la pantalla.

Luego que los estudiantes logran descubrir la figura por medio de la manipulación de la balanza, se indaga:

a. Haga un recuento de las cosas que hizo para hacer aparecer la figura.

[18] Entendida como el conjunto de acciones propuestas por el docente para problematizar el estudio de una situación en el aula, la cual tiene un fundamento teórico y práctico para su planteamiento.

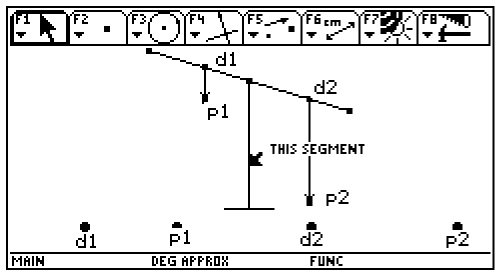
b. ¿Qué tendría que hacer para que los brazos de la balanza obtengan una inclinación muy grande?

c. ¿Qué tendría que hacer para que los brazos de la balanza obtengan una inclinación muy pequeña?

d. ¿Encuentra alguna similitud entre el objeto que acaba de manipular y la balanza del mundo real?, ¿Cuáles?

3.7.1.2. Discriminación: Las relaciones entre las Magnitudes Variables.

Instrumento: Balanza "continua" en desequilibrio. *Disbala*.



Planteamiento:

¿Para que una balanza esté en equilibrio es necesario que las masas pesen igual?

Preguntas que direccionan el trabajo:

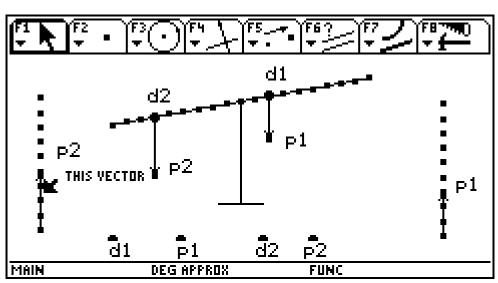
a. ¿Es posible que la balanza con pesos iguales se encuentre en desequilibrio?, ¿Cómo?, ¿Por qué?

b. ¿En qué lugar de los brazos de la balanza hay que poner dos pesos distintos para que se equilibren?

3.7.1.3. Generalización: El control de las Variaciones.

3.7.1.3.1. Primera Parte:

Instrumento: Balanza discreta en desequilibrio.



Planteamiento:

Hemos llegado a determinar una regla que permite el equilibrio en la balanza con pesos distintos:

A MAYOR PESO MENOR DISTANCIA AL CENTRO DE LA BALANZA Y A MENOR PESO MAYOR DISTANCIA A ESTE CENTRO

1. Bajo ésta regla, encuentre todas las distancias que hacen posible el equilibrio en la balanza, para los pesos de 1 unidad y 2 unidades respectivamente. *Organice la información que obtenga.*

2. ¿Las distancias que encontró en el punto anterior son las únicas posibles? En caso de una respuesta negativa determine cuales.

3.7.1.3.2. Segunda Parte:

Instrumento: Balanza discreta en desequilibrio.

Planteamiento:

Teniendo en cuenta las siguientes condiciones.

1. Encuentre todas las distancias que hacen posible el equilibrio en la balanza, para los pesos $p1$ de 1unidad y $p2$ de 3 unidades respectivamente.

2. Encuentre todos los pesos que hacen posible el equilibrio en la balanza, para las distancias $d1$ de 3 unidades y $d2$ de 2 unidades respectivamente.

Para cada una:

a. Organice la información que obtenga y explique el procedimiento que realizó para encontrar los pesos y las distancias que permitan el equilibrio respectivamente.

b. Argumente si las distancias o los pesos que encontró son los únicos posibles. En caso de una respuesta negativa determine cuales.

c. De acuerdo a lo realizado, determine una regla matemática con la que se pueda encontrar el equilibrio para cualquier peso y distancia.

3.7.1.3.3. Tercera Parte:

Instrumento: Balanza discreta en desequilibrio.

Planteamiento:

¿Con cuáles pesos y distancias puedo equilibrar la balanza, con un peso p1 de 2 unidades y una distancia d1 de 3 unidades?

A. Explique el procedimiento que realizó para encontrar los pesos y las distancias.

B. Organice los datos obtenidos y haga una generalización a partir de éstos.

3.7.1.3.4. Cuarta Parte:

Planteamiento:

Hemos construido las siguientes tablas:

Observe el comportamiento numérico de las magnitudes que varían y determine:

1. Describa el comportamiento de las magnitudes en cada tabla.
2. Determine cuáles son las similitudes o diferencias en el comportamiento de las magnitudes entre las tablas.
3. A partir de esto qué puede concluir.

TABLA 1

d1	p1	d2	p2
1	2	**2**	1
1,5	2	**3**	1
2	2	**4**	1
2.5	2	**5**	1
3	2	**6**	1
3,5	2	**7**	1
4	2	**8**	1
4,5	2	**9**	1
5	2	**10**	1
5,5	2	**11**	1
6	2	**12**	1
	2		1
X	2	**2X**	1

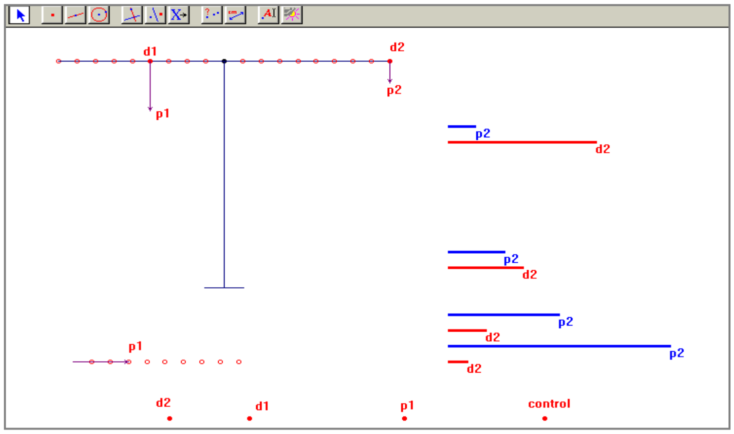
TABLA 2

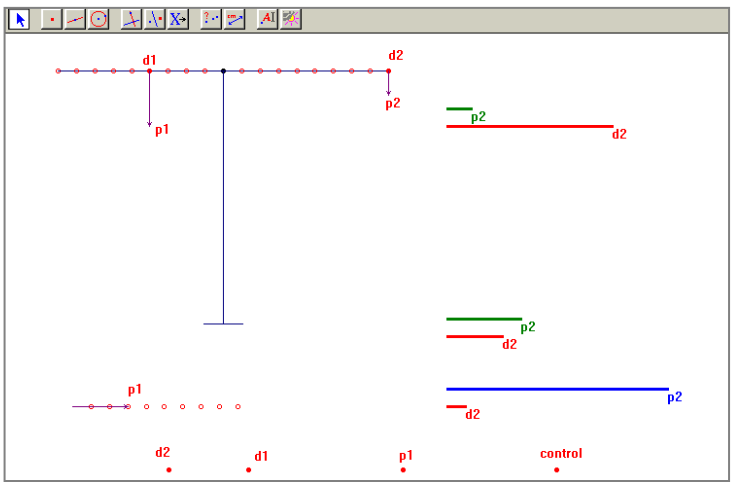
d1	p1	d2	p2
3	2	1	6
3	2	2	3
3	2	3	2
3	2	4	$\frac{6}{4}$
3	2	5	$\frac{6}{5}$
3	2	6	1
3	2	7	$\frac{6}{7}$
3	2	8	$\frac{6}{8}$
3	2	9	$\frac{6}{9}$
3	2	10	$\frac{6}{10}$
3	2	11	$\frac{6}{11}$
3	2		
3	2	X	$\frac{6}{X}$

3.7.1.4. **Síntesis:** El estudio de las Transformaciones.

3.7.1.4.1. Primera Parte

Instrumento: Balanza discreta en estado de equilibrio.





Planteamiento: Con **p1** a **3** unidades y **d1** a **4** unidades, analice:

1. **a)** ¿Qué sucede en la balanza cada vez que se mueve **d2**?
   b) ¿Qué relación puede establecer entre los movimientos de la balanza y los segmentos que aparecen al lado derecho en la pantalla?

2. Qué relación puede establecer con:
   a) **d2** del primer y segundo dato.
   b) **d2** del segundo y cuarto dato.
   c) **d2** del cuarto y octavo dato.

3. Qué relación puede establecer con:

a) **p2** del primer y segundo dato.

b) **p2** del segundo y cuarto dato.

c) **p2** del cuarto y octavo dato.

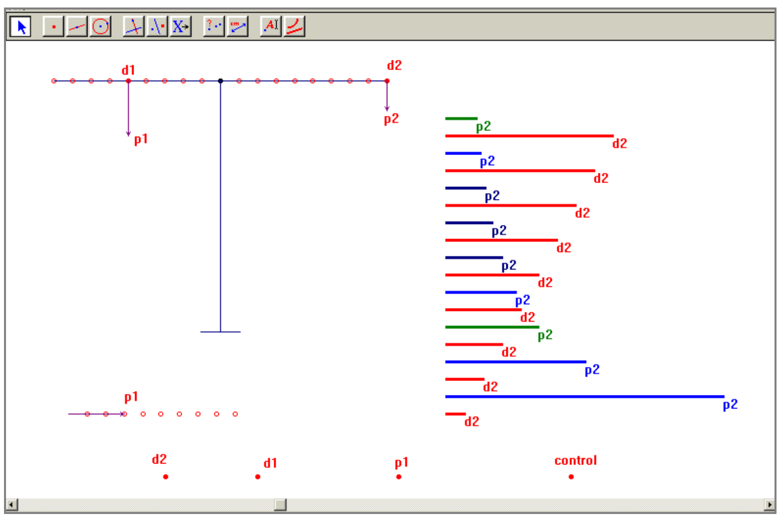
4. Realice los mismos análisis del **2** y **3** punto, pero con el primer, tercer y noveno dato.

5. Al aumentar **d1** en una unidad, ¿Qué sucede con las relaciones que antes habíamos establecido?

6. ¿Qué puede concluir del trabajo realizado?

3.7.1.4.2. Segunda Parte

Instrumento: Balanza discreta en estado de equilibrio.



Planteamiento:

1. Con d1 a 3 unidades y p1 a 2 unidades, proponga una manera de organizar todos los pesos **p2** y distancias **d2**, de tal manera que se puedan vislumbrar la relación entre éstos.

2. ¿Por qué al organizar estos datos de la manera como lo hizo, permite vislumbrar las relaciones entre éstos?

3. ¿Que relación tiene ésta nueva manera de organizar estos datos, con la generalización a que llegaron desde el estudio numérico: $p2 = \frac{6}{d2}$

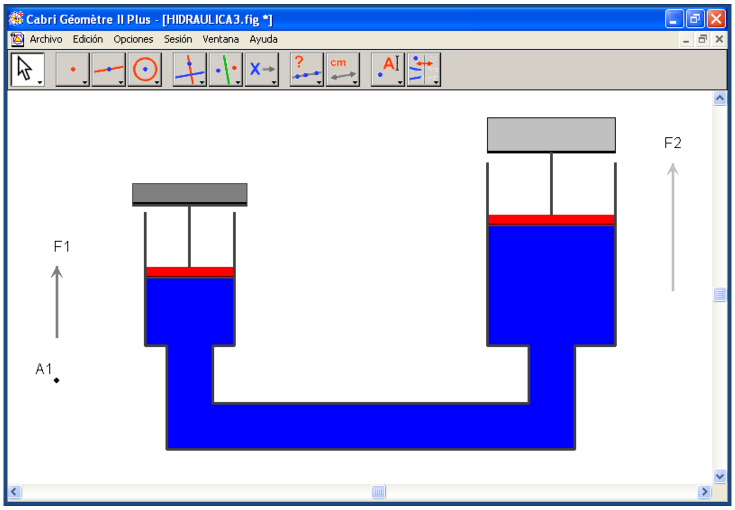
4. ¿Qué sucede con la manera de organizar a **d2** y **p2** que usted propuso, si se aumenta **d1** y **p1** cada uno en dos unidades?, Realice la organización para éste caso.

5. ¿Y qué sucede si se aumenta **d1** y **p1** en cualquier cantidad de unidades?

3.7.2. La Secuencia Didáctica para el estudio de las variaciones en la Máquina Hidráulica.

3.7.2.1. Identificación: Identificación de las Magnitudes Variables.

Instrumento: *Hidráulica*.



Planteamiento:

1. Modificando el punto **A1** y los vectores **F1** y **F2** que aparecen en el instrumento, observe como se modifica y escriba a que objeto se le asemeja.
2. Modificando cada uno de los objetos: El punto **A1** y los vectores **F1** y **F2**, escribe qué están modificando en la máquina y qué relación encuentran entre estos.

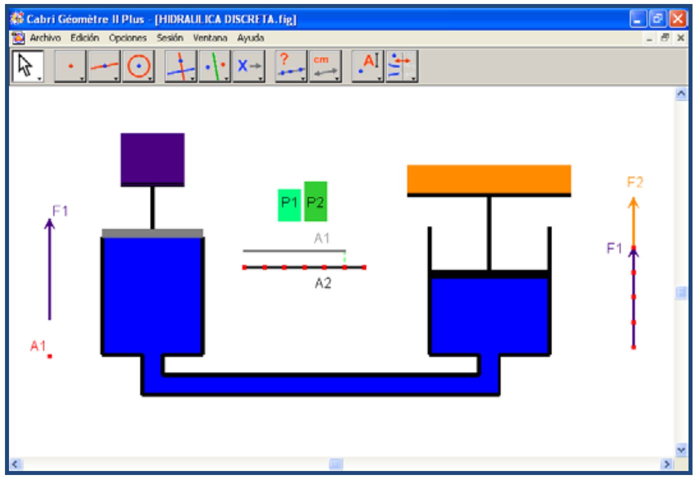
3.7.2.2. Discriminación: Las relaciones entre las Magnitudes Variables.

Instrumento: *Hidráulica*

Planteamiento:

1. Dejando a **F2** máximo y el punto **A1** mínimo. Cuando aumenta **F1** ¿Qué modifica en la máquina? Expliquen qué transmite esta variación en la máquina?

Instrumento: Hidráulica Discreta

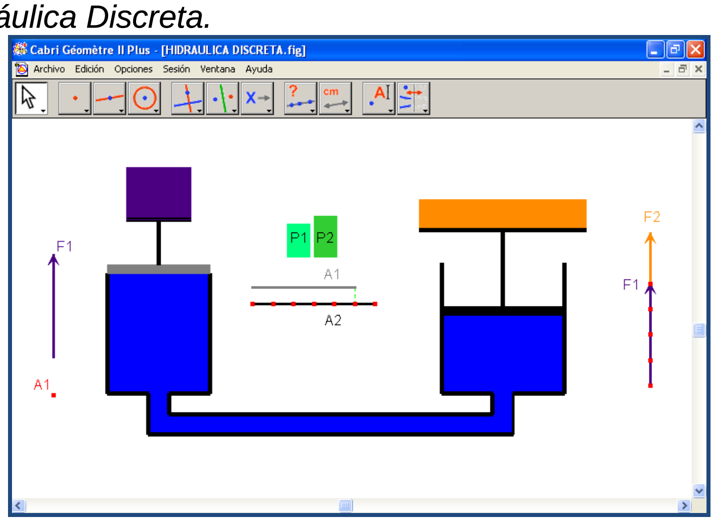


Planteamiento:

2. Dejando el peso F1 máximo, ¿Qué sucede en la máquina cuando se disminuye el área A1?. Argumente su respuesta.
3. Dejando el área A1 máxima. ¿Qué sucede en la máquina cuando se disminuye el peso F1?. Argumente su respuesta.
4. ¿Qué modifica en la máquina las variaciones entre el peso F1 y el área A1?.
5. De acuerdo a lo trabajado explica el funcionamiento de esta máquina. ¿Para qué creen que puede servir en el mundo real?

3.7.2.3. Generalización: El control de las Variaciones.

Instrumento: *Hidráulica Discreta.*



1. *¿Cuáles son las condiciones para qué la presión sea igual en ambos lados de la máquina?, Da ejemplos.*

2. Encuentre todos los pesos F1 y áreas A1 que hacen que la presión sea igual en ambos lados de la máquina, para el peso F2 de 6 unidades y el área A2 de 6 unidades.

   a) Organice la información que obtenga.

   b) Los pesos F1 y áreas A1 que encontró en el punto anterior son las únicas posibles?. En caso de una respuesta negativa determine cuales.

3. De acuerdo a la relación que encontró para determinar la igualdad en las presiones, completa la siguiente tabla con el peso F2 de 2 unidades y el área A2 de 3 unidades, explica el proceso que utilizada.

F1	A1	F2	A2
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3
		2	3

4. De acuerdo a lo realizado, determine una relación entre los datos hallados por medio de la formulación de una regla matemática con la que se pueda ejercer la misma presión para cualquier peso y área.

3.7.2.4. Síntesis: El estudio de las Transformaciones.

Planteamiento: Hemos definido **la igualdad de presiones** en ambos lados de la máquina como:

$$P1 = P2$$

$$\frac{F1}{A1} = \frac{F2}{A2}$$

$$F1 \times A2 = F2 \times A2$$

1. Completa la siguiente tabla de tal manera que las presiones sean iguales en ambos lados de la igualdad y determina la razón de las presiones, explica su comportamiento.

F1	A1	F2	A2
		2	6
		2	6
		2	6
		2	6
		2	6
		2	6
		2	6
		2	6
		2	6
		2	6
		2	6
		…	…
Expresión General		2	6

2. Encuentre una expresión general para la relación entre las variables **F1** y **A1**, explique dicha relación. Y argumente qué valores pueden tomar cada una de estas variables y cuántos valores pueden tomar dichas variables.
3. Construyan una manera gráfica en la que se pueda ver la relación entre las variables **F1** y **A1** y analicen su comportamiento.

4. RESULTADOS[19]

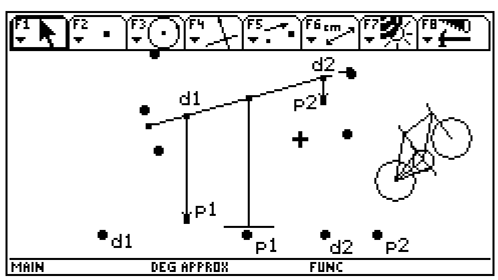
4.1. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE LAS VARIACIONES EN LA BALANZA VIRTUAL

4.1.1. Identificación: Identificación de las magnitudes variables.

***Estrategias de solución*:**

En el momento que los estudiantes se enfrentaron a descubrir la figura por medio de la manipulación de la balanza que se encontraba inclinada hacia el lado derecho, se presentó dificultad de cómo cambiar la inclinación hacia el otro lado de la balanza. Por lo cual se presentan algunas de las estrategias e hipótesis que se plantearon los estudiantes para lograr este cambio.

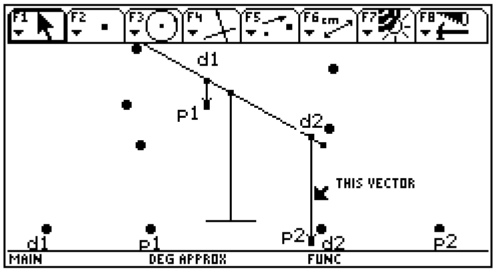
- *"Todo el peso de la balanza estaba hacia la derecha, movimos p_1 hacia la derecha y empezó a salir peso hacia la izquierda y la balanza se fue nivelando, luego movimos p_2 hacia la izquierda y se recortó el peso tomando otra inclinación".*

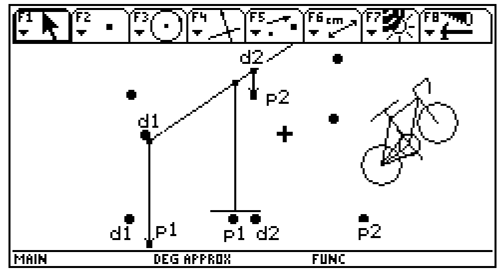


- *"Para que la balanza cambie de inclinación, tenemos que poner más peso al lado izquierdo. Movemos d_1 hacia la derecha para que se aumente el peso".*
- *"Para cambiar la inclinación movemos d_1 hacia el extremo para quitar peso al lado derecho, movemos a d_2 hacia el centro y luego aumentamos p_1 y disminuimos a p_2".*

---

[19] Para cada actividad, se presenta los resultados de acuerdo a las respuestas frente a cada tarea mostrando las representaciones a las que recurren los estudiantes en sus procesos de solución. Aclarando así, que las representaciones verbales son tomadas de los registros escritos de los estudiantes y las experiencias de aula.





La Inclinación:

Los estudiantes determinan una inclinación cuando en un lado de la balanza hay más peso que en el otro.

Inclinación Grande:

Algunos estudiantes asocian inclinaciones grandes con colocar pesos cada vez más lejos del centro de la balanza, las cuales dependen de la cantidad de peso que se coloque en alguno de los lados.

- *“ p_1 tiene más peso que p_2 por ello la inclinación es hacia la derecha, porque hay más peso para este lado”.*
- *“Correr los puntos d_1 y p_1 hacia la izquierda y d_2 y p_2 hacia la derecha o viceversa”.*
- *“Encontrar la inclinación con las distancias o solo moviendo los pesos”.*
- *“Si se quiere tener una inclinación hacia la derecha, muevo el punto d_1 para la izquierda y así el peso p_1 se va hacia el centro y coloco d_2 hacia el extremo”.*
- *“ d_2 y p_2 hacen dar una mayor inclinación”.*

Inclinación Pequeña:

Algunos estudiantes asocian inclinaciones pequeñas con colocar pesos muy cercarnos al centro de la balanza.

- *“Poner d_1 y d_2 en el extremo derecho o izquierdo; a d_1 se le pone el peso mínimo y a d_2 le aumenté un poco el peso”.*
- *“ p_1 representa un primer peso y p_2 representa un segundo peso. Encontramos que en la balanza estos dos pesos dan una inclinación grande o pequeña dependiendo en qué lugar se encuentran”.*
- *“El peso de la balanza se encontraba hacia la derecha y necesitábamos colocar el peso hacia la izquierda; para ello corrimos p_1 hacia la derecha y empezó a salir peso al lado izquierdo; luego movimos p_2 hacia la izquierda para que el peso del lado derecho se recortara”.*

- *“Al desplazar el punto d_1 a la izquierda de la balanza, la parte izquierda de la balanza fue tomando altura”.*

Respecto al reconocimiento de las magnitudes:

- *“ p_1 y p_2 son los que ponen peso, d_1 y d_2 son los que hacen que los pesos se puedan mover en los brazos de la balanza”.*
- *“ d_1, d_2, p_1, p_2 hacen que se pueda mover la balanza, p_1 y p_2 aumentan o disminuyen peso, d_1 y d_2 modifican los pesos o la fuerza”.*
- *“ d_1 y d_2 mueven los pesos de un lado a otro, p_1 y p_2 son los pesos”.*
- *“ d_1 y d_2 alejan o acercan el peso con relación al centro de la balanza, p_1 y p_2 son los que controlan la cantidad de peso en la balanza”.*

Respecto a la representación de la balanza en cabri:

Los estudiantes reconocen en gráfica que se presenta en cabri la representación de una balanza; instrumento al cual le atribuyen algunas características de la balanza que han manipulado en la vida real.

Similitudes:

- *“La balanza de la calculadora tiene pesos y se inclina, al igual que la balanza del mundo real se inclina para el lado que tiene más peso”.*
- *“Esta balanza se puede equilibrar”.*
- *“Tiene una base, dos puntos de pesos e inclinación hacia los lados”.*
- *“En la balanza del mundo real; cuando el peso de uno de los lados es mayor que el otro, tendrá éste una inclinación superior al igual que en la calculadora al mover los puntos p_1 y p_2 ”.*
- *“Podemos manipularla y obtener una inclinación”.*
- *“Tiene dos brazos, un soporte central y sirve para saber entre dos objetos cuál es el que tiene más volumen”.*
- *“Al mover d_1 hacia la izquierda disminuye el peso para el ángulo p_1 y d_1 en la balanza”.*

Diferencias:

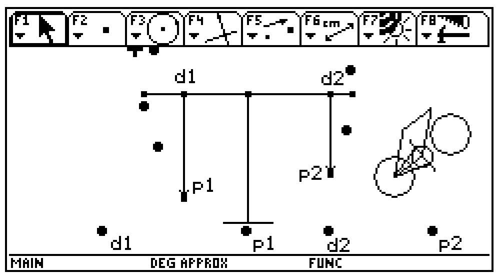
- *“La balanza real tiene su forma de platón y numeración, en cambio ésta se trata de líneas, rectas y círculos y para quitar su peso se van descomponiendo”.*
- *“En la balanza del mundo real no se pueden mover los pesos -cambiar de distancia-”.*

Preguntas:

Las preguntas que surgieron frente a las primeras exposiciones fueron:

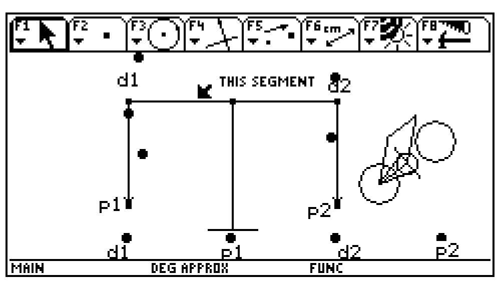
- *¿Cómo hacer para que la balanza quede equilibrada?*
- *¿Qué pasa si se pone a* p_1 *y* p_2 *en el centro de la balanza?*
- *Si todos los puntos* d_1, d_2, p_1, p_2 *están distintos, ¿Cómo saber que esos cuatro puntos tienen el mismo peso para que la balanza esté en equilibrio?*

Frente a la primera pregunta los expositores buscaron un equilibrio con pesos distintos, este equilibrio se aseguraba en el momento que no hubiera una inclinación y los brazos de la balanza estuvieran totalmente rectos, como la siguiente:



Frente a esta respuesta los estudiantes se preguntaban: *Si* p_1 *y* p_2 *no están a igual distancia de la* ***base***[20] *porqué está en línea recta? Y ¿Por qué está en equilibrio la balanza, si* p_1 *y* p_2 *tienen diferente peso?.*

En algunas exploraciones los estudiantes llegan a determinar equilibrio con pesos iguales, ya que: *"* p_1 *y* p_2 *ejercen la misma fuerza y ambos están en la misma parte", "Si colocamos la misma cantidad de peso en ambos lados no hay inclinación alguna ya que el peso es el mismo".*



[20] Para los estudiantes, el término BASE les refiere al centro de masa de la balanza, es decir, es aquel punto donde incide el soporte de misma. En adelante se entenderá por tal término lo aquí expresado.

Dificultad en el manejo del instrumento:

Ya que la balanza no puede ser manipulada directamente, sus transformaciones se determinan a través de la manipulación de los puntos d_1, d_2, p_1, p_2 y la disposición de estos puntos en la pantalla está determinada de tal forma que son colineales, cada uno con un rango de movimiento, que pueden traslaparse con el de otro. Dicha disposición ocasionó que cuando los puntos d_1, d_2, p_1, p_2 se ponen uno encima de otro —dando la sensación que uno de ellos se ha desaparecido—, la máquina o bien no permite manipularlos —ya que ella reconoce dos objetos en el mismo lugar— o el estudiante considera que alguno de estos puntos está totalmente desaparecido. Dificultad que fue superándose en la medida que ellos se fueron familiarizando con el lenguaje del software CABRI.

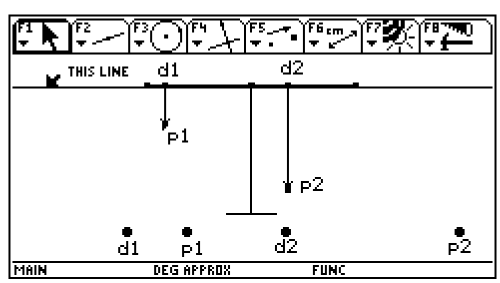
4.1.2. Discriminación: Las relaciones entre las magnitudes variables.

Hipótesis:

Las hipótesis planteadas frente a la pregunta problema *¿Para que una balanza esté en equilibrio es necesario que las masas pesen igual?,* fueron:

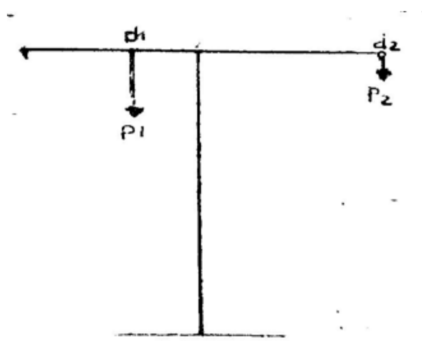
- En primera instancia no se puede equilibrar una balanza con pesos distintos porque siempre va a estar inclinada donde esté el peso mayor.
- La balanza puede estar en equilibrio con pesos distintos a diferencia de las balanzas comunes que deben tener igual peso o unidades.

En la medida que los estudiantes determinan un equilibrio en la balanza, surge un cuestionamiento: ¿Cómo probar que la balanza se encuentra en equilibrio?, frente a esta pregunta los estudiantes argumentan que la balanza está en equilibrio cuando los brazos se encuentran rectos, es decir no se ve ningún quiebre. Este argumento se basa únicamente en la visualización, ya que solo pueden asegurar un equilibrio visualmente, así, frente a esta respuesta se pregunta a los estudiantes si ¿hay algo en la herramienta que nos permita asegurar el equilibrio?, dos estudiantes plantearon que: Si los brazos de la balanza están rectos se pueden comparar con una recta.



Primera Clase: Encuentran equilibrio con pesos desiguales, armando una correspondencia inversa entre los pesos y las distancias.

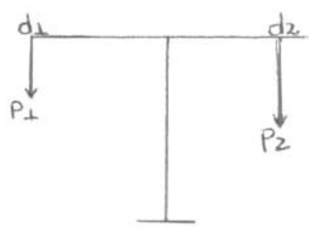
Cantidad de estudiantes: 32 estudiantes.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN
PICTÓRICA</th><th>REPRESENTACIÓN VERBAL
-ORAL O ESCRITA-</th></tr>
<tr><td>
</td><td>

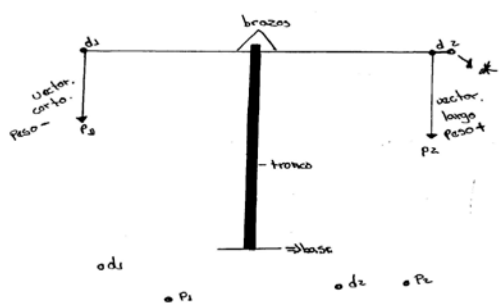
Para que la balanza quede equilibrada con pesos distintos se debe saber ubicar el peso en los brazos de la balanza.

Ubicados los pesos de ésta manera; "al estar éstos dos vectores de ésta forma hace que la balanza esté recta, porque donde está el vector en d_1 éste pierde peso y queda igual que el vector p_2".

Con p_1 y p_2 aumenta y disminuye peso y con d_1 y d_2 se aumenta o disminuye distancia.

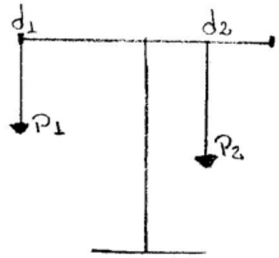
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

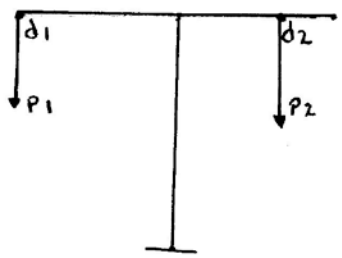
p_1 es más corto, entonces tiene menos peso y p_2 es más largo, por lo tanto quedará en equilibrio, lo que hicimos fue poner a p_2 más cerca de la base y p_1 en la punta del lado izquierdo.

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

La balanza está en equilibrio con pesos distintos, ¿Será que lo que le sobra al vector p_2 para que sea igual al vector p_1 se le disminuye del punto que está d_2 al otro punto que tiene al mismo lado * *?.*
Los puntos d_1 y d_2 son para correr un determinado peso. p_1 y p_2 son los que quitan y ponen el peso correspondiente a la balanza.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN PICTÓRICA</th><th>REPRESENTACIÓN VERBAL –ORAL O ESCRITA –</th></tr>
<tr><td>




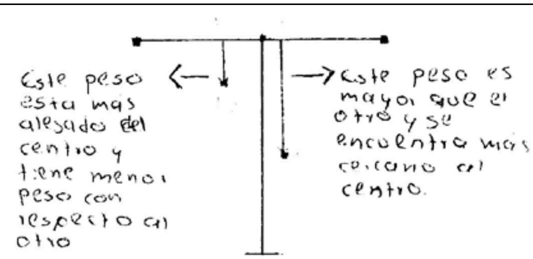
</td><td>

d_2: Representa la distancia que hay del centro de la balanza hasta donde está ubicado p_2 (Peso).

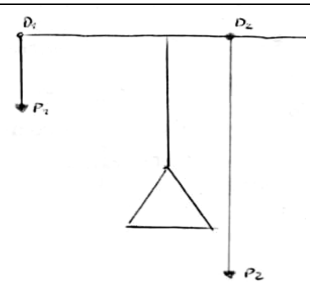
d_1: Representa la distancia que hay del centro de la balanza hasta donde está ubicado p_1 (Peso).

La balanza se puede equilibrar con p_2 que es el mayor peso y tiene una distancia muy pequeña a la base, mientras p_1 que es el peso menor tiene una distancia mayor de la base.

Al manejar el peso y la distancia de una manera adecuada podemos mantener la balanza en equilibrio, es decir diferentes formas de poder equilibrar la balanza.

Se puede obtener equilibrio corriendo los pesos a la base de la balanza, ya que queda sin peso en cualquier brazo. Así como, cuando p_2 tiene el mismo tamaño que p_1 y los dos se colocan a la misma distancia de la base.
</td></tr>
<tr><td>


</td><td>

d_1 y d_2 son los que mueven los pesos. p_1 y p_2 son los que quitan y ponen peso en la balanza. Así, la balanza se puede nivelar con un peso grande cerca al centro de la balanza y otro al extremo o cerca de éste pero con un peso menor.
</td></tr>
<tr><td>


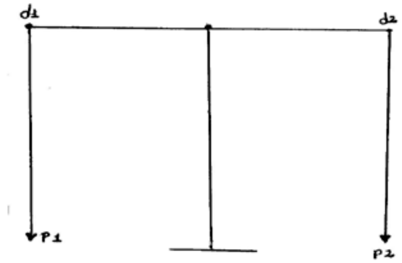
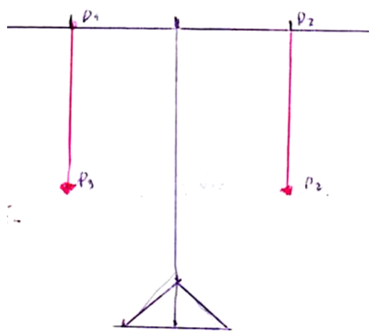
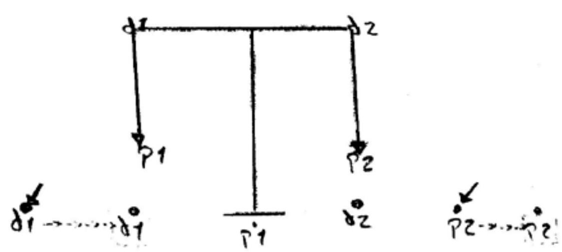
</td><td>

La balanza podría estar en equilibrio de varias maneras:

1. *Teniendo la misma cantidad de peso a ambos lados de la balanza, siempre y cuando tengan la misma distancia del punto central.*
2. *Teniendo distinta cantidad de peso, siempre y cuando un peso se encuentre más cercano al centro de la balanza que el otro.*
3. *A mayor distancia menor peso y a mayor peso menor distancia del centro.*
</td></tr>
</table>

Segunda Clase: Determinan equilibrio únicamente con pesos iguales.

Cantidad de estudiantes: 12 estudiantes

REPRESENTACIÓN PICTÓRICA	REPRESENTACIÓN VERBAL –ORAL O ESCRITA –
	*Solo podemos equilibrar la balanza con pesos iguales ya que podemos definir $d_1 > d_2$ y cuando movemos p_2 la balanza toma una inclinación grande y la distancia sigue igual pero el peso disminuye (moviendo hacia la izquierda).* *Cuando movemos p_1 hacia la derecha tenemos una inclinación grande pero su distancia es igual a la de p_2.*
	*Lo primero fue colocar la balanza en equilibrio con igual cantidad de peso. Y luego cambiamos de sitio a los vectores y trató de equilibrarse. Creemos que al haber pesos iguales las distancias deben ser iguales.*
	*Para que la balanza esté en equilibrio se necesita que los dos pesos sean iguales, ya que si las masas no pesaran igual la balanza no estaría en equilibrio*

4.1.3. **Generalización:** El control de las variaciones.

4.1.3.1. Primera Parte: En esta sesión se inician los estudios cuantitativos con relaciones de proporcionalidad directa.

Primera Clase: A partir de la correspondencia entre los pesos y distancias que indica el equilibrio en la balanza, establecen relaciones extensivas[21], explicitando la relación por medio de representaciones de orden simbólico para referir relaciones de tipo multiplicativo entre las magnitudes (proporción directa).

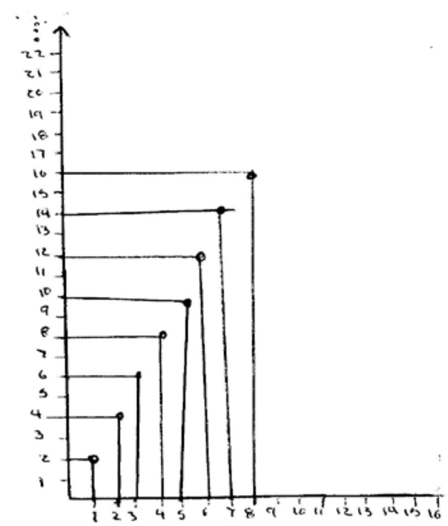
Cantidad de estudiantes: 18 estudiantes.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL
-ORAL O ESCRITA-</th><th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICA</th></tr>
<tr><td>Encontramos que para no alterar el equilibrio de la balanza, el peso menor debe estar al doble de distancia respecto al peso mayor. Esta tabla funciona para p_1 con el doble de peso de p_2.</td><td>
<table>
<tr><td>p_1</td><td>d_1</td><td>p_2</td><td>d_2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td><td>1</td><td>10</td></tr>
<tr><td>2</td><td>…</td><td>1</td><td>…</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x</td><td>1</td><td>$2x$</td></tr>
</table>
</td><td>$d_1 = x$

$d_2 = 2x$</td></tr>
<tr><td>El peso menor debe ir al doble de unidades más lejos que el peso mayor, pero solo cuando el peso más liviano es la mitad del pesado.</td><td>
<table>
<tr><td>Peso 2/u
Distancia</td><td>Peso 1/u
Distancia</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$2x$</td></tr>
<tr><td>Distancia del peso 2</td><td>2 =constante
x =Distancia peso 2.
$2x$ =Distancia peso 1.</td></tr>
</table>
</td><td>$d_2 \times 2 = d_1$</td></tr>
</table>

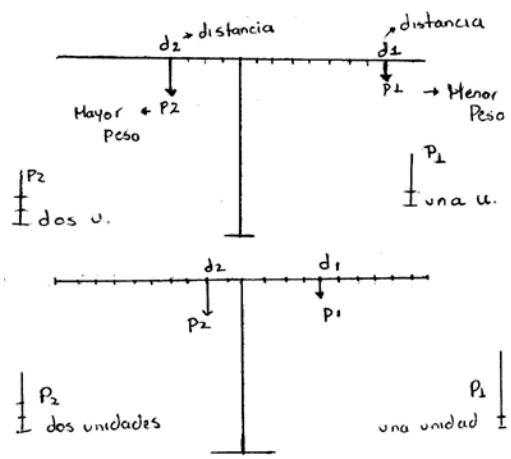
[21] Las **relaciones extensivas** de acuerdo con *Piaget*, son aquellas donde se involucran cuantificaciones. *(Piaget, 1987. Pág. 200-203).*

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL
-ORAL O ESCRITA-</th><th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICA</th></tr>
<tr>
<td>Las distancias de la tabla no son las únicas puesto que hay infinitas pero siempre y cuando se aumenten en mayor proporción pero manteniendo el doble y teniendo en cuenta la regla.</td>
<td>p_1 = 1 und. p_2 = 2 und.
<table>
<tr><th>d_1</th><th>d_2</th></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td></tr>
<tr><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td>14</td><td>7</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>$2x$</td><td>x</td></tr>
</table>
</td>
<td>$d_1 \times 2 = d_2$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN
VERBAL
-ORAL O ESCRITA-</th><th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICA</th><th>REPRESENTACIÓN
GRÁFICA</th></tr>
<tr>
<td>La distancia del peso mayor a la base sería la mitad de la del peso menor.</td>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>7</td><td>14</td></tr>
<tr><td>8</td><td>16</td></tr>
</table>
</td>
<td>$y = 2x$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

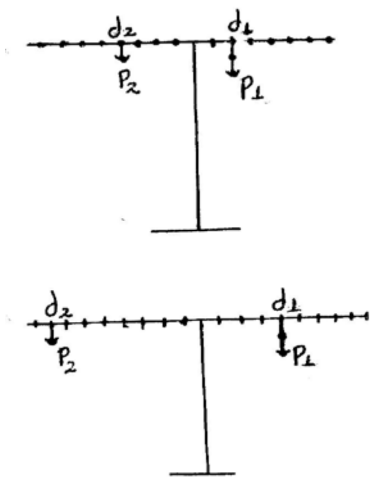
Segunda Clase: Establecen relaciones de orden multiplicativo sin recurrir a representaciones simbólicas para explicitarlas.

Cantidad de estudiantes: 26 estudiantes.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN PICTÓRICA</th><th>REPRESENTACIÓN VERBAL -ORAL O ESCRITA-</th><th>REPRESENTACIÓN TABULAR</th></tr>
<tr><td>
</td>
<td>d_2 va aumentando una unidad y d_1 va aumentando 2 unidades, con p_1 a 1 unidad y p_2 a 2 unidades.

Estas no son las únicas distancias ya que p_2 es el doble de p_1, lo mismo que las distancias d_1 es el doble de d_2.

La distancia más grande es al menor peso.

La distancia menor es al mayor peso.</td>
<td><table>
<tr><th>d_2</th><th>d_1</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>7</td><td>14</td></tr>
<tr><td>8</td><td>16</td></tr>
<tr><td>9</td><td>18</td></tr>
<tr><td>10</td><td>20</td></tr>
<tr><td>11</td><td>22</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>
</td>
<td>Con p_1 a 2 unidades y p_2 a 1 unidad, entonces p_2 está más alejado de la mitad y p_1 está más cerca, así por medio de esto se equilibra la balanza.

Cada vez que d_1 aumenta 1 unidad, d_2 aumenta 2 unidades.

Estas distancias no son las únicas pues los números son infinitos.</td>
<td><table>
<tr><th>d_1</th><th>d_2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>7</td><td>14</td></tr>
<tr><td>8</td><td>16</td></tr>
<tr><td>9</td><td>18</td></tr>
<tr><td>10</td><td>20</td></tr>
<tr><td>11</td><td>22</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL –ORAL O ESCRITA –</th><th>REPRESENTACIÓN TABULAR</th></tr>
<tr><td>Para obtener el equilibrio p_1 tiene que estar al doble de la distancia de p_2, con p_1 a 1 unidad y p_2 a 2 unidades.</td><td>
<table>
<tr><th>d_2</th><th>d_1</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1,5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2,5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3,5</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4,5</td><td>9</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>d_1 equivale al doble de distancia de la distancia d_2, pero si p_2 tiene una unidad de peso y p_1 2 unidades.

Las distancias que se tomaron no son las únicas ya que los números son infinitos, entonces hay infinitud de distancias posibles para que la balanza quede nivelada.</td><td>
<table>
<tr><th>d_2</th><th>d_1</th><th>d_2</th><th>d_1</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>11</td><td>22</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>12</td><td>24</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>13</td><td>26</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td><td>14</td><td>28</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>30</td></tr>
<tr><td>6</td><td>12</td><td>16</td><td>32</td></tr>
<tr><td>7</td><td>14</td><td>17</td><td>34</td></tr>
<tr><td>8</td><td>16</td><td>18</td><td>36</td></tr>
<tr><td>9</td><td>18</td><td>19</td><td>38</td></tr>
<tr><td>10</td><td>20</td><td>20</td><td>40</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

4.1.3.2. Segunda Parte:

Primera Clase: Construyen la ley de compensación de los pesos –expresada simbólicamente— a partir de las relaciones multiplicativas de las magnitudes: $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$.

Cantidad de estudiantes: 20 estudiantes.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL
-ORAL O ESCRITA-</th><th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICA</th></tr>
<tr>
<td> Hay casos que determinan el equilibrio porque existe una relación entre ellos basándose en múltiplos de 3, de 4 o de 1 en éste caso.
Al modificar la tabla queda de la siguiente manera, determinamos una regla para el equilibrio de la balanza.
Los datos de la columna d_2 son múltiplos de la columna p_1 y los datos de la columna d_1 son múltiplos de la columna p_2. </td>
<td>
<table>
<tr><th>d_1</th><th>p_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>5</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>15</td><td>3</td><td>9</td><td>5</td></tr>
<tr><td>20</td><td>3</td><td>12</td><td>5</td></tr>
<tr><td>30</td><td>3</td><td>18</td><td>5</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>d_1</th><th>p_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>5</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>10</td><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>15</td><td>3</td><td>9</td><td>5</td></tr>
<tr><td>20</td><td>3</td><td>12</td><td>5</td></tr>
<tr><td>25</td><td>3</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>30</td><td>3</td><td>18</td><td>5</td></tr>
<tr><td>35</td><td>3</td><td>21</td><td>5</td></tr>
</table>
</td>
<td>
$\boxed{3}\ \times 1$ $\boxed{5}\ \times 1$
$\boxed{3}\ \times 5$ $\boxed{3}\ \times 3$
$\boxed{4}\ \times 5$ $\boxed{4}\ \times 3$
$\boxed{3}\ \times 10$ $\boxed{3}\ \times 6$

$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Los casos que determinan el equilibrio en la balanza son los de la tabla ya que nos dimos cuenta en la columna d_1 existen una serie de múltiplos de 5 y en la columna d_2 los múltiplos de 3, que hacen que la balanza quede nivelada.</td>
<td>
<table>
<tr><th>d_1</th><th>p_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>5</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>15</td><td>3</td><td>9</td><td>5</td></tr>
<tr><td>20</td><td>3</td><td>12</td><td>5</td></tr>
<tr><td>30</td><td>3</td><td>18</td><td>5</td></tr>
</table>
</td>
<td>
• $3 \times 5 = 15$ $5 \times 3 = 15$
• $3 \times 15 = 45$ $9 \times 5 = 45$
• $3 \times 20 = 60$ $5 \times 12 = 60$
• $3 \times 30 = 90$ $5 \times 18 = 90$
$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL
-ORA O ESCRITA-</th><th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICA</th></tr>
<tr>
<td>Los datos de d_2 van aumentando de 3 en 3 y los de d_1 van aumentando de 5 en 5. Así, que los que no equilibran la balanza son los datos de d_1: 12, 28 y 32 porque tienen a un extremo de la balanza más peso, además son los que al multiplicar los pesos por las distancias dan números distintos.</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>$p_1 \times d_1$</th><th>$p_2 \times d_2$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>15</td><td>15</td></tr>
<tr><td>2</td><td>30</td><td>30</td></tr>
<tr><td>3</td><td>45</td><td>45</td></tr>
<tr><td>4</td><td>60</td><td>60</td></tr>
<tr><td>5</td><td>75</td><td>75</td></tr>
<tr><td>6</td><td>90</td><td>90</td></tr>
<tr><td>7</td><td>105</td><td>105</td></tr>
</table>
</td>
<td>$3\times12=36$ y $5\times6=30$ se desequilibra
• $3\times5=15$ $5\times3=15$
• $3\times15=45$ $9\times5=45$
• $3\times20=60$ $5\times12=60$
• $3\times30=90$ $5\times18=90$
$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$</td>
</tr>
</table>

Segunda Clase: Arman una regla que determina el equilibrio en la balanza, tal que la distancia d_2 es múltiplo del peso p_1 y la distancia d_1 es múltiplo del peso p_2.

Cantidad de estudiantes: 24 estudiantes.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL
-ORAL O ESCRITA-</th><th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICA</th></tr>
<tr>
<td>Los números de la columna d_1 aumentan de 5 en 5 y la columna de d_2 aumenta de 3 en 3. Los números que no determinan el equilibrio es porque no aumentan 5.
Para obtener las distancias de d_1 es necesario multiplicar la posición por 5 y para d_2 multiplicar la posición por 3. Se podría afirmar que si los valores de peso cambian obviamente estas ecuaciones no servirían.</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>d_1</th><th>p_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10</td><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>15</td><td>3</td><td>9</td><td>5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>20</td><td>3</td><td>12</td><td>5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>25</td><td>3</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>30</td><td>3</td><td>18</td><td>5</td></tr>
<tr><td>7</td><td>35</td><td>3</td><td>21</td><td>5</td></tr>
</table>
</td>
<td>$x\times5=d_1$; la distancia que habría que dejarse del centro de la balanza para el peso p_1.

$x\times3=d_2$; la distancia que habría que dejarse del centro de la balanza para el peso p_2.

x : Posición</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL
-ORAL O ESCRITA-</th><th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICA</th></tr>
<tr>
<td>En ésta tabla los datos que no cumplen con el equilibrio, no son múltiplos de 5 pero los otros datos si son múltiplos de 3, como: 6, 15 y 27 de d_2.

Los datos que cumplen el equilibrio son los que al multiplicar por 3 y por 5 por la posición dan las distancias.</td>
<td>
<table>
<tr><th>d_1</th><th>p_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>12</td><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>28</td><td>3</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>32</td><td>3</td><td>27</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>d_1</th><th>p_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>10</td><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>15</td><td>3</td><td>9</td><td>5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>20</td><td>3</td><td>12</td><td>5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>25</td><td>3</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>30</td><td>3</td><td>18</td><td>5</td></tr>
<tr><td>7</td><td>35</td><td>3</td><td>21</td><td>5</td></tr>
</table>
</td>
<td>$P \times P_1 = d_2$

$P \times p_2 = d_1$

P : Posición.</td>
</tr>
<tr>
<td>En d_1 los números tienen una relación con los múltiplos de 5 y en d_2 son los múltiplos de 3.

La regularidad es que los datos de la columna d_2 son múltiplos de la columna p_1 y los datos de la columna d_1 son múltiplos de la columna p_2.

Con p_2 obtengo la distancia d_1 y con p_1 hallo la distancia d_2.</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>d_1</th><th>p_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td><td>3×1</td><td>3</td><td>5×1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>15</td><td>3×3</td><td>9</td><td>5×3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>20</td><td>3×4</td><td>12</td><td>5×4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>30</td><td>3×6</td><td>18</td><td>5×6</td></tr>
</table>
</td>
<td>$p_1 \times B = d_2$

$p_2 \times B = d_1$

p_1: Peso 1 p_2: Peso 2

d_1: Distancia 1 d_2: Distancia 2

B: Posición en la que están d_1, d_2, p_1 y p_2</td>
</tr>
</table>

4.1.3.3. Tercera Parte

Primera Clase: Desde la ley de compensación de pesos, establecen representaciones de orden simbólico para referir relaciones de tipo multiplicativo entre las magnitudes (proporción inversa).

Cantidad de estudiantes: 16 estudiantes.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL
-ORAL O ESCRITA-</th><th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICA</th></tr>
<tr>
<td>De acuerdo a la fórmula para determinar el equilibrio $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$, podemos hallar el peso p_2. Así, $p_1 \times d_1$ siempre va a valer 6.

Para hallar el peso de cualquier distancia, dividimos la distancia con el producto de la fórmula $p_1 \times d_1$, es decir; 6.</td>
<td><table>
<tr><th>p_1</th><th>d_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6/4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6/5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>6/7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>8</td><td>6/8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>9</td><td>6/9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>10</td><td>6/10</td></tr>
</table></td>
<td>$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$

$6 = 4 \times p_2$

$\frac{6}{4} = p_2$

Regla General:
$\frac{p_1 \times d_1}{d_2} = p_2$</td>
</tr>
<tr>
<td>Utilizando la regla de equilibrio $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$ y teniendo como constantes la distancia d_1 y el peso p_1, podemos determinar distintas formas de hallar equilibrio.</td>
<td><table>
<tr><th>p_1</th><th>d_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>0,85</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
<td>$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$

$6 = p_2 \times 7$

$p_2 = \frac{6}{7} = 0{,}85$

Regla General:
$p_2 = \frac{6}{d_2}$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL
-ORAL O ESCRITA-</th><th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICA</th></tr>
<tr><td>Sabiendo que la generalización del equilibrio es $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$, es fácil deducir que al sacar la distancia d_2 y el peso p_2 la multiplicación de éstos dos números debe ser el mismo resultado de $p_1 \times d_1$ en éste caso 6.

Nos dimos cuenta que si la distancia d_2 es x y no conocemos el peso p_2 entonces según la distancia el peso será 6 dividido en ese número.</td><td><table>
<tr><th>p_1</th><th>d_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6/4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6/5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>6/6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>6/7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>8</td><td>6/8</td></tr>
</table></td><td>$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$
$6 = 5 \times p_2$
$\frac{6}{5} = p_2$
Generalización:
$\frac{6}{x} = p_2$</td></tr>
<tr><td>Utilizamos la regla del equilibrio y sabiendo que al multiplicar $p_1 \times d_1$ nos da 6, a d_2 le dimos una distancia de 1u, 2u, ..., y podemos determinar el peso p_2.</td><td><table>
<tr><th>p_1</th><th>d_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6/4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6/5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>6/7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>8</td><td>6/8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>9</td><td>6/9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>10</td><td>6/10</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>11</td><td>6/11</td></tr>
</table></td><td>$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$
$6 = p_2 \times 11$
$\frac{6}{11} = p_2$
Regla General:
$p_2 = \frac{6}{d_2}$</td></tr>
</table>

Segunda Clase: Los estudiantes intervienen la ley de compensación de pesos, para obtener las cantidades que les permiten determinar el equilibrio, sin construir una expresión simbólica general para la relación multiplicativa (proporción inversa).

Cantidad de estudiantes: 28 estudiantes.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL
-ORAL O ESCRITA-</th><th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICA</th></tr>
<tr>
<td>Para sacar éstos datos buscamos que la regla del equilibrio cumpliera que en los dos lados dé el mismo valor (6) y dividimos el resultado de $p_1 \times d_1$ por la distancia d_2 y así nos da el peso p_2.</td>
<td>
<table>
<tr><th>p_1</th><th>d_1</th><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6/4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6/5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>6/6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>6/7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>8</td><td>6/8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>9</td><td>6/9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>10</td><td>6/10</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>11</td><td>6/11</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>12</td><td>6/12</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>13</td><td>6/13</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1280</td><td>6/1280</td></tr>
</table>
</td>
<td>$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$

$2 \times 3 = p_2 \times 4$

$6 = p_2 \times 4$

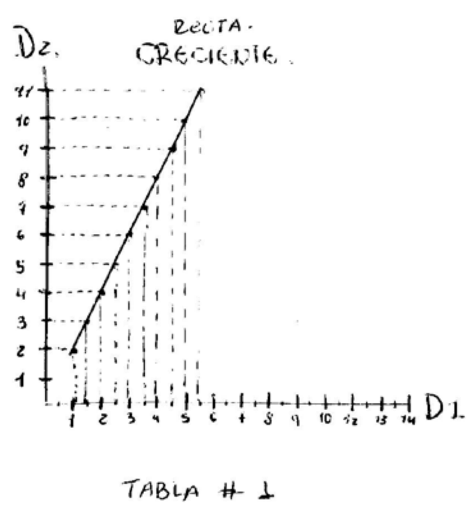
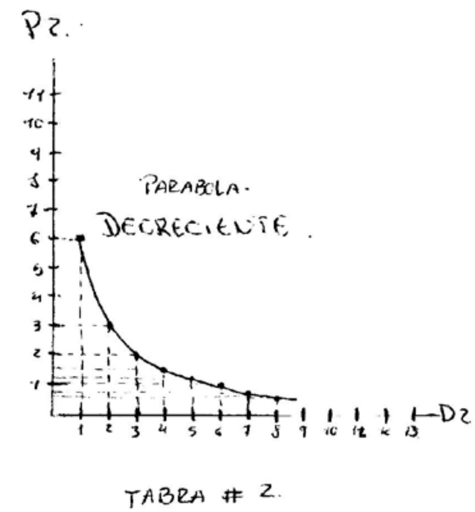
$p_2 = \frac{6}{4}$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th>REPRESENTACIÓN VERBAL
-ORAL O ESCRITA-</th>
<th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th>
<th>REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICA</th>
</tr>
<tr>
<td>Para encontrar el peso utilizamos la regla del equilibrio $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$.</td>
<td>
<table>
<tr><th>p_1</th><th>d_1</th><th>p_2</th><th>d_2</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6/4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6/5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6/6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6/7</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6/8</td><td>8</td></tr>
</table>
</td>
<td>$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$
$2 \times 3 = p_2 \times 7$
$6 = p_2 \times 7$
$6 = X \times 7$
Reemplazamos a p_2 por X
$\frac{6}{7} = X$</td>
</tr>
<tr>
<td>En todos los casos vemos cómo multiplicando $p_1 \times d_1$ nos da un número constante, entonces necesitamos buscar la manera de tener un equilibrio.

Al realizar la tabla nos dimos cuenta que al tener $p_1 \times d_1$ fijo, podíamos hallar d_2 y p_2 sin necesidad de utilizar la calculadora pues la balanza se ponía en equilibrio tan solo con poner un peso y distancia igual al fijo. Pero empezamos a buscar números que multiplicados entre si obtuviéramos 6 para hallar el equilibrio.</td>
<td>
<table>
<tr><th>p_1</th><th>d_1</th><th>p_2</th><th>d_2</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1,5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1.2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td></tr>
</table>
</td>
<td>$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$
$2 \times 3 = 3 \times 2$
$6 = 6$</td>
</tr>
</table>

4.1.3.4. Cuarta Parte: Se pretende hacer una reflexión sobre las diferentes formas de variación, sus semejanzas y diferencias.

Cantidad de estudiantes: 44 estudiantes.

REPRESENTACIÓN VERBAL -ORAL O ESCRITA-	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
El comportamiento de la tabla N°1 es que la relación existente de $2x$ es una multiplicación y por lo tanto los resultados son aumentativos, por contrario la tabla N°2 de acuerdo a la expresión algebraica $6/x$ es una expresión de división y por lo tanto son disminutivos los resultados. *Como conclusión de éste trabajo, tomamos la idea de graficar sobre planos o rectas numéricas y relacionarlas entre sí, y sacamos la conclusión que en la primera gráfica; mientras había un aumento en d_1 en d_2 también había un aumento considerable que siempre se mantenía constante, es decir, d_2 siempre aumentaba el doble de d_1.* *Cosa que no sucedió en la segunda gráfica que mientras había un aumento constante de 1 unidad en d_2 en p_2 había una disminución considerable que no era regulada.*	

REPRESENTACIÓN VERBAL –ORAL O ESCRITA –
En la tabla 1; los pesos p_1 y p_2 son siempre iguales mientras que las distancias d_1 y d_2 varían d_1 de a 0,5 y d_2 de a 1. *En la tabla 2; d_1 es constante, d_2 aumenta una unidad. p_1 es constante, p_2 disminuye cantidades pequeñas. A medida que d_2 aumenta p_2 disminuye cantidades muy pequeñas. La disminución no es constante es irregular.* *Una diferencia es que en la tabla 1 d_1 aumenta de 0,5 y d_2 también aumenta y en la tabla 2 d_2 aumenta de 1 y p_2 disminuye.*
En la tabla 1 observamos que los pesos 1 y 2 permanecen constantes y la distancia d_1 aumenta en 0,5 y d_2 aumenta en 1. *En la tabla 2 observamos que d_1 y p_1 son constantes, y la distancia d_2 aumenta en 1 mientras que p_2 va disminuyendo pero no en la misma cantidad, cada vez va disminuyendo en cantidades más pequeñas. También observamos que a mayor distancia menor es el peso. Siempre permanecerá constante el numerador.* *En la primera tabla solo cambian las distancias y en la segunda tabla cambia un peso y una distancia, lo que indica que solamente se moverá una parte de la balanza.*
En la tabla 1 las distancia aumenta de una forma distinta, pero ambas aumentan y los pesos se mantienen constantes. En cambio en la tabla 2, mientras d_2 aumenta de a una unidad p_2 disminuye variablemente, en ésta tabla no aumentan las dos distancias ni tampoco los dos pesos. Concluimos también que con los datos de las dos tablas se puede equilibrar la balanza, puesto que cumplen la regla que escribimos en nuestros primeros trabajos.
En la tabla 1; los constantes son p_1 y p_2 y los que varían son d_1 y d_2, la distancia d_2 depende de la distancia d_1 ya que ésta es el doble de la anterior. d_1 y d_2 siempre van aumentando la misma cantidad; 0,5 y 1 respectivamente. *En la tabla 2; d_2 va aumentando de a 1 y p_2 va disminuyendo en cantidades muy pequeñas y no en un número constante que determine el comportamiento de p_2. d_1 y p_1 son los constantes de ésta tabla. Las dos tablas generan equilibrio en la balanza, se está viendo un regla que a menor distancia mayor peso y a mayor distancia menor peso.*
En ambas tablas se cumple la regla $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$ sin importar cómo varíe su peso y su distancia. En la tabla 1 las distancias aumentan d_1 de 0,5 y d_2 de 1 en 1 y en la tabla 2 d_2 aumenta de 1 en 1 y p_2 disminuye pero no en una unidad exacta, p_2; divide la multiplicación de d_1 y p_1 (constante) entre la distancia d_2. Podemos observar que entre mayor distancia menor es el peso.
En la primera tabla las distancias variaban en que una era el doble que la otra, estando los pesos del mismo modo en el que uno era el doble del otro. *En la segunda tabla nos dimos cuenta que entre más grande era la distancia menor era el peso y siempre la multiplicación de éstos debería dar una cantidad igual a la del otro lado. Como p_2 siempre será 6 dividida la distancia, cada vez va ha ser más pequeño su peso mientras que la distancia siempre va a aumentar.*

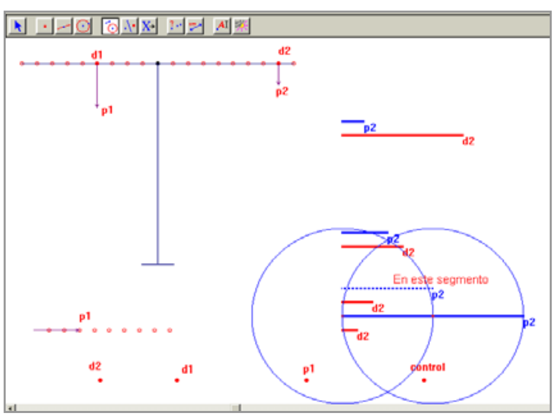
4.1.4. Síntesis: El estudio de las transformaciones.

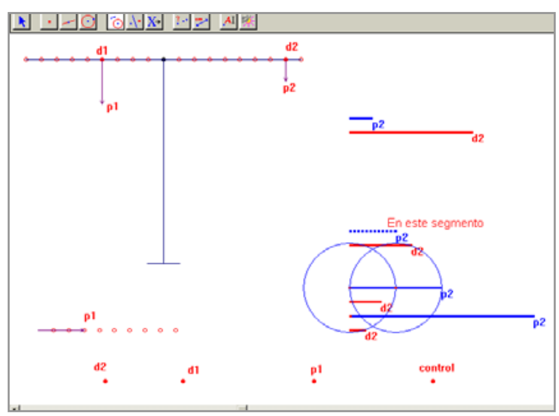
4.1.4.1. Primera Parte

Estrategias de Solución y Disposición de Representaciones: Determinan la relación proporcional que se suceden entre los pesos y las distancias.

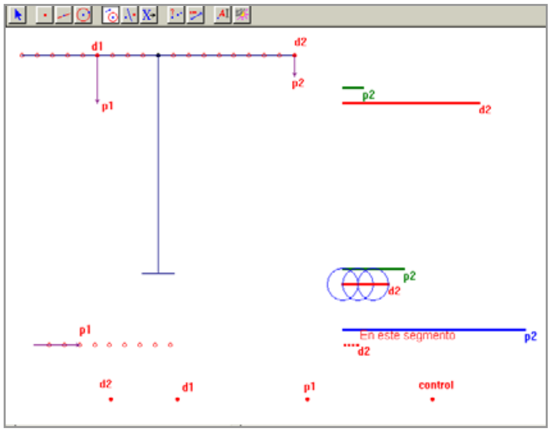
Población: 44 estudiantes.

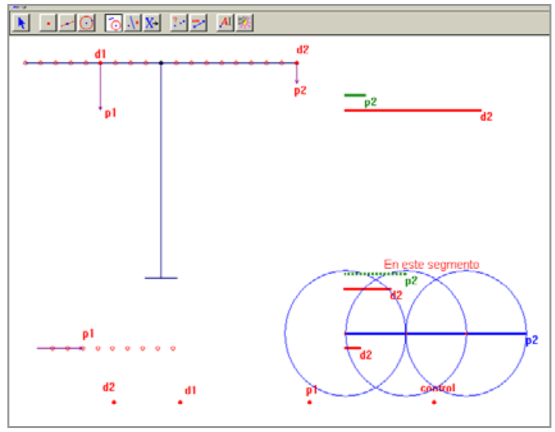
En la segunda parte de la actividad, donde se aborda el estudio de los datos inversamente proporcionales -*la distancia aumenta al doble y el peso disminuye a la mitad*- se cuestiona a los estudiantes por la relación entre los pesos, estableciendo como primera relación; que a medida que la distancia aumenta el peso disminuye, relación que la herramienta permite deducir con la variación de la distancia donde se puede determinar sus unidades, distinto a lo que ocurre con el peso, pues no está visiblemente explícito en el instrumento la cantidad de unidades que tiene. La hipótesis que surgió frente a la relación entre los pesos fue; el segundo peso es la mitad del anterior y así sucede con los demás, pero, ¿Cómo comprobar si uno es la mitad del otro?, ante esto los estudiantes respondían que visualmente se podía hacer dicha afirmación o que se podría comprobar con regla *–medir-* y un estudiante estableció la relación de comparación entre los segmentos deduciendo; “Si el segundo peso es la mitad del primero, entonces dicho peso debe caber 2 veces en el peso anterior”. Luego de esto, hicimos uso del compás para desarrollar dicha afirmación, comprobando la hipótesis.





Conocida ésta herramienta *–compás-*, en el momento de abordar la tercera parte del trabajo, donde se hizo el estudio de los datos inversamente proporcionales -*la distancia* *aumenta el triple y el peso disminuye a la tercera parte*- la hipótesis que se presentó frente a la relación entre los pesos fue; así como las distancias aumentan una al triple de la anterior, el peso disminuye “la tercera parte”, para comprobar dicha afirmación un estudiante utilizó el compás para observar la relación entre las distancias y la relación entre los pesos.





Con ésta misma herramienta establecimos que la relación no cambia si aumentamos en una unidad la distancia que mantenemos constante; construyendo los compases y animando la magnitudes, las relaciones que establecimos entre los segmentos, se mantiene.

REPRESENTACIÓN VERBAL-ESCRITA	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA
1. *Cuando se aumenta la distancia se disminuye el peso y cuando se disminuye la distancia se aumenta el peso.* *Los segmentos que aparecen a la derecha de la pantalla nos muestra la cantidad de distancia y de peso que existe en determinado punto o distancia. Aunque que se aumente o disminuya la distancia la balanza sigue estando en equilibrio.* **2.** *La relación que existe entre los puntos planteados es del doble.* **3.** *Los pesos van disminuyendo la mitad del anterior.* **4.** *La relación es que aumenta el tripe en distancia y el peso disminuye una tercera parte.* *La conclusión es que cuando la distancia aumenta en x veces, el peso también disminuye en la mismas x partes.*	**2.** *Relación del doble:* $2x$ *;* x *es la distancia* ***2*** *es una constante* **4.** *Relación del triple:* $3x$ *;* x *es la distancia* ***3*** *es una constante*
1. *Al disminuir la distancia d_2 el peso p_2 va aumentando y esto hace que la balanza se encuentre en equilibrio.* *En el lado derecho de la pantalla encontramos la cantidad del peso y la distancia y observamos que al mover los puntos de la balanza aumenta d_2 (línea Roja) y disminuye p_2 (Línea azul), y cumpliéndose la relación que a menor distancia mayor peso y a menor peso mayor distancia.* **2.** *Siendo distancia de 1 unidad y el segundo dato la distancia de 2 unidades, nos damos cuenta que aumenta el doble del primero.* *El segundo dato de 2 unidades y el cuarto de 4 unidades.* *El octavo tiene el doble del cuarto de distancia, 4 siendo el cuarto dato, el doble será 8.* *En conclusión cada distancia va aumentando el doble de la anterior distancia.*	**2.** $1 + 1 = 2$ $2 + 2 = 4$ $4 + 4 = 8$ **3.** $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$ $3 \times 4 = p_2 \times 1$ $\frac{12}{1} = p_2$ *; ésta sería la medida de* p_2 *con 1 unidad de distancia.* $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$ $3 \times 4 = p_2 \times 2$ $\frac{12}{2} = p_2$

3. *El segundo dato disminuye la mitad del primer dato.* *El cuarto dato disminuye la mitad del segundo dato.* *El octavo dato disminuye la mitad del cuarto.* *En todos los casos* p_2 *disminuye la mitad, dándonos cuenta de esto por medio de la ecuación ya establecida.* **4.** *Encontramos que las distancias cada vez aumentan el triple de las anteriores y los pesos disminuyen la tercera parte.* **5.** *No interesa se aumenta la distancia o el peso, siempre la balanza seguirá equilibrada y no importa si* p_1 *aumenta o disminuye pues la relación seguirá siendo la misma y lo podemos comprobar con el compás.*	$6 = p_2$ *; ésta sería la medida de* p_2 *con 2 unidades de distancia.* ***4.*** $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$ $3 \times 4 = p_2 \times 3$ $\frac{12}{3} = p_2$ $4 = p_2$ *; es el peso cuando la distancia está a 3 unidades.* $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$ $3 \times 4 = p_2 \times 9$ $\frac{12}{9} = p_2 = 1{,}3$
1. *La línea que está en rojo es la distancia y la azul es el peso. Los segmentos son los valores que toman* d_2 *y* p_2 *en cada unidad de la balanza, es decir; que el movimiento es el que limita su equilibrio y éstos segmentos son el cambio de pesos y distancias. Cuando la distancia aumenta el peso disminuye y cuando la distancia disminuye el peso aumenta.* ***2.*** *1 y 2 dato; aumenta una unidad más que el primero* *2 y 4 dato; aumenta dos unidades más que el segundo* *4 y 8 dato; aumenta cuatro unidades más que el cuarto* *La relación que concluimos es que la distancia aumenta el doble de la anterior.* ***3.*** *El segundo peso es la mitad del primer peso y así con los demás.* ***4.*** *La relación entre las distancias es que aumentan el triple del anterior y el peso es la tercera parte del anterior.*	**2.** $2 \times 1 = 2$ $2 \times 2 = 4$ $2 \times 4 = 8$ **3.** $3 \times 1 = 3$ $3 \times 3 = 9$

La conclusión que sacamos es que la distancia aumentan las mismas veces que el peso disminuye. *Ejemplo: Sin la distancia aumenta 9 veces el peso disminuye la 9ª parte y así sucesivamente.*	

REPRESENTACIÓN VERBAL-ESCRITA

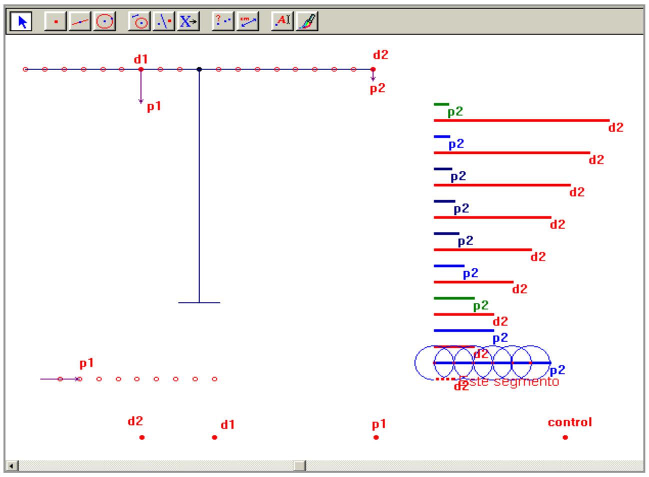
1. *Si el peso está más cerca del centro de la balanza el peso es mayor, pero cuando se va alejando el peso disminuye, todo esto para obtener el equilibrio de la balanza.*
2. *La relación que encontramos es que la distancia va aumentando en igual proporción manteniendo el doble de la distancia anterior.*
3. *Los pesos van disminuyendo la mitad del peso anterior.*
4. *La distancia aumentan el triple de la anterior y los pesos disminuyen a la tercera parte del anterior, el tercero es $1/3$ del primero y así con los demás.*
5. *No cambia la relación porque al mover la distancia d_1 el peso se acomoda de manera que la ley no cambie.*

Como conclusión dependiendo de la cantidad en que aumente la distancia d_2 disminuye el peso p_2 en igual proporción.

4.1.4.2. Presentación De Los Resultados Segunda Parte

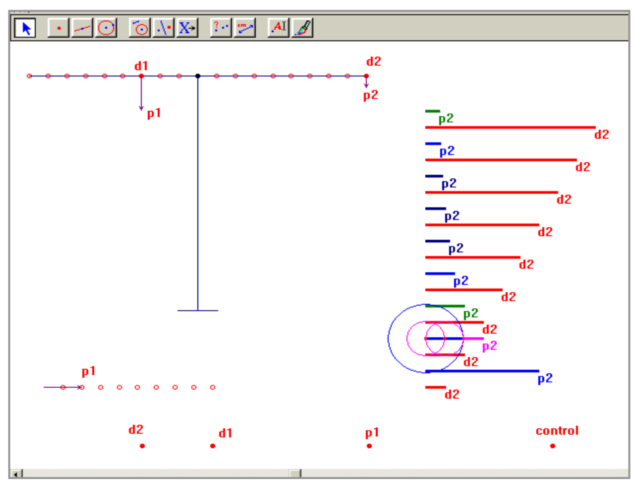
Estrategias de Solución y Disposición de Representaciones:

Frente a la tarea de buscar una forma de organizar los segmentos que representan algunas distancias y pesos, de tal manera que se pueda visualizar las relaciones entre pares correspondientes; uno de los estudiantes recurrió a la herramienta del compás, para comparar los segmentos que representan los pesos y las distancias., así:



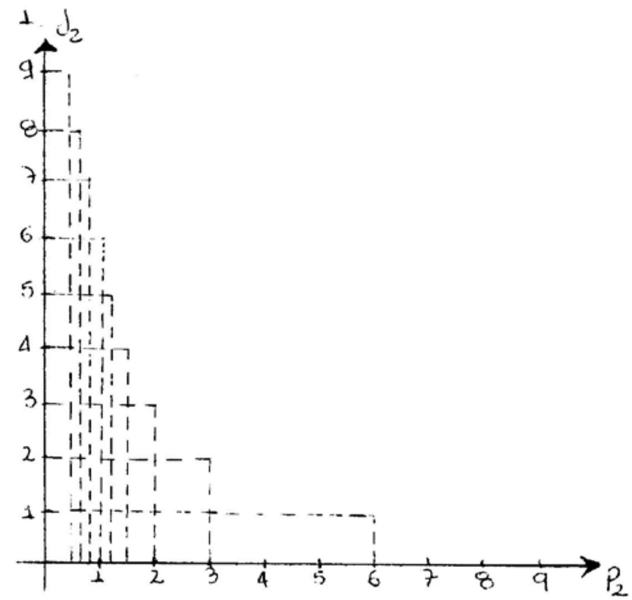
Utiliza el compás para establecer cuántas veces cabe la distancia del primer dato en el peso del primer dato.

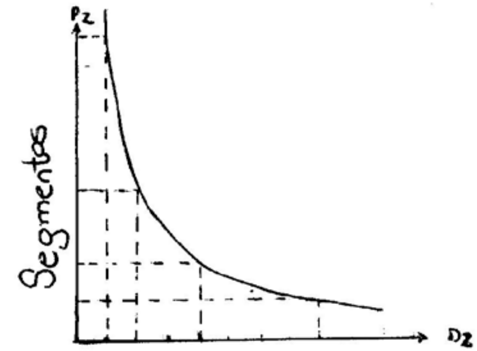
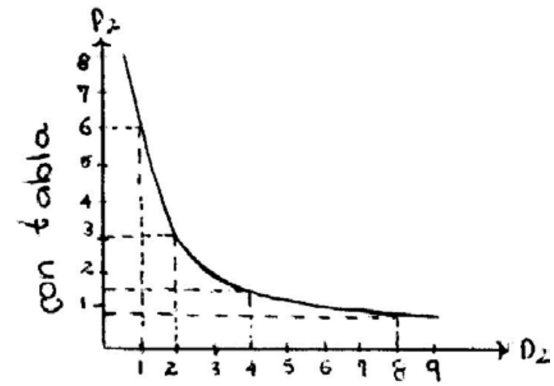
Luego, compara la distancia y el peso del segundo dato, estableciendo que p_2 es $1\frac{1}{2}$ de d_2 y frente a la pregunta de ¿cómo saber si ese es $1\frac{1}{2}$ de d_2?, el estudiante opta por construir un segmento que representaría el $\frac{1}{2}$ de d_2 y transferir esa medida en la medida de d_2 para verificar si cabe 2 veces y comprobar si p_2 de es $1\frac{1}{2}$ de su peso correspondiente.

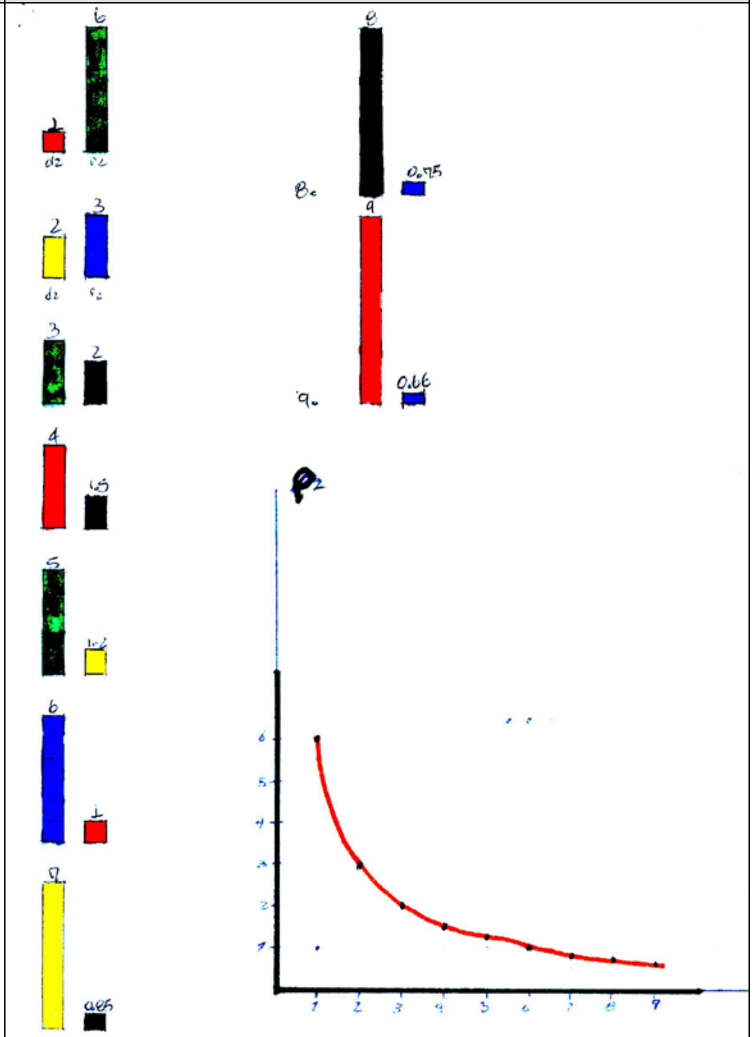


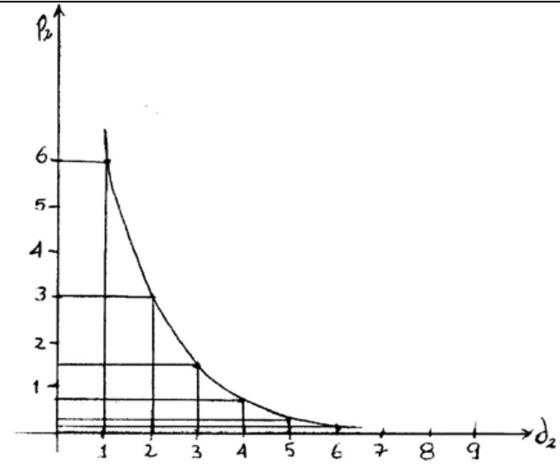
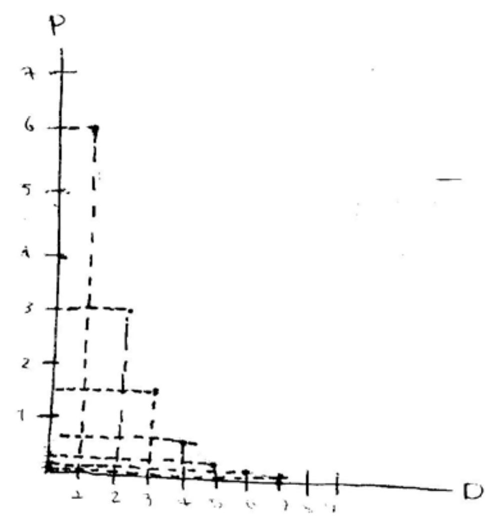
Primera Clase: Opta por el plano cartesiano para organizar los segmentos que representan los pesos y las distancias ya sea desde la relación proporcional entre estos o desde su cantidad.

Cantidad de estudiantes: 14 estudiantes.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL-ESCRITA</th><th>REPRESENTACIÓN TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA</th><th>REPRESENTACIÓN GRÁFICA</th></tr>
<tr>
<td>Como la multiplicación de $p_1 \times d_1$ es seis entonces podemos determinar los p_2 ya que conocemos las distancias.</td>
<td>
<table>
<tr><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,8</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,7</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,6</td></tr>
</table>
</td>
<td>$p_2 = \dfrac{6}{d_2}$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

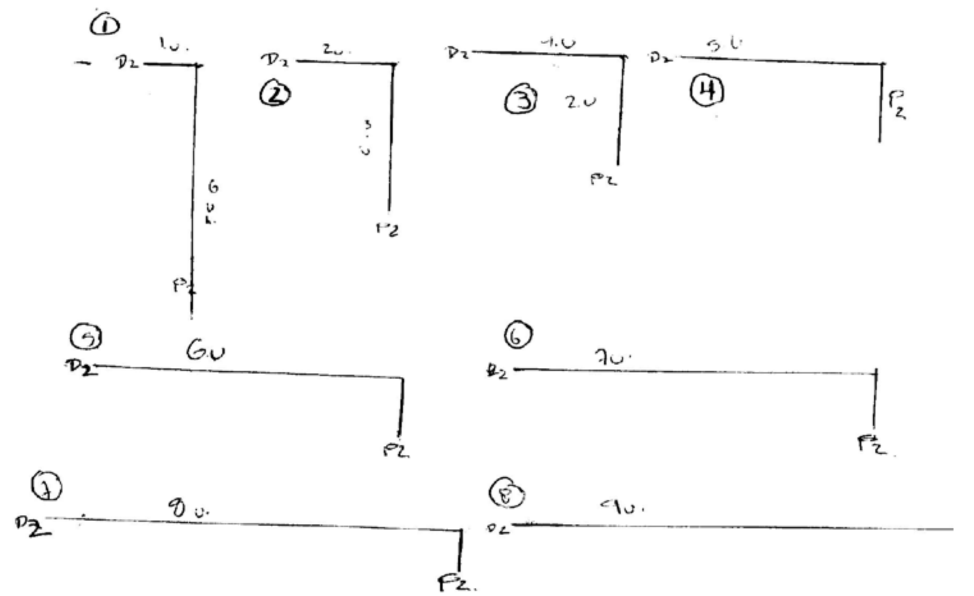
REPRESENTACIÓN VERBAL-ESCRITA	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
Al principio hicimos la gráfica teniendo en cuenta las relaciones establecidas el trabajo anterior; tomamos las distancias que eran una el doble de la anterior, donde sus peso son la mitad del anterior; el segundo peso es la mitad del primero y la distancia es el doble de la primera, el cuarto peso es la mitad del segundo peso y la distancia es el doble de la segunda, el octavo peso es la mitad del cuarto y la distancia es el doble de la cuarta, así con los demás. *Luego hicimos uso de la regla del equilibrio para que los datos fueran de acuerdo a los propuestos.* *La relación que establecimos entre los segmentos, es que en la gráfica podemos ver que entre más distancia, el peso es más pequeño y entre más peso, la distancia es más pequeña.*	$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$ $2 \times 3 = p_2 \times 6$ $6 = p_2$ $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$ $2 \times 3 = 6 \times 1$ $2 \times 3 = 3 \times 2$ $2 \times 3 = 1{,}5 \times 4$	 

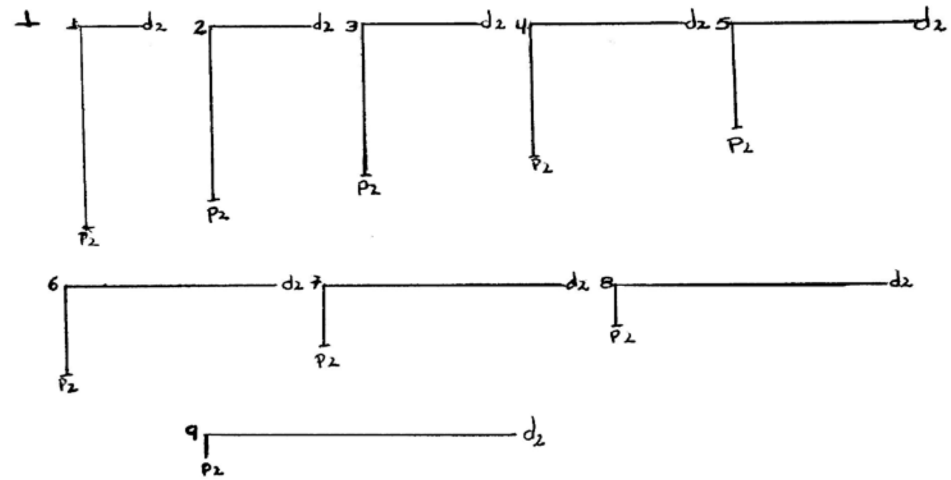
REPRESENTACIÓN VERBAL-ESCRITA	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
Sacamos los datos dividiendo 6 entre d_2 *y eso nos daba* p_2*, porque si multiplicamos* $d_2 \times p_2$ *nos da 6 al igual que* $p_1 \times d_1$ *lo cual permite que la balanza quede en equilibrio.* *Podemos darnos cuenta que* d_2 *en cada dato siempre va a aumentar 1 y* p_2 *siempre va disminuyendo; el segundo dato disminuye a la mitad del primero, el tercero a la tercera parte del primero, el cuarto a la cuarta parte del primer, el quinto a la quinta parte del primero, etc.*	$p_2 = \dfrac{6}{d_2}$	

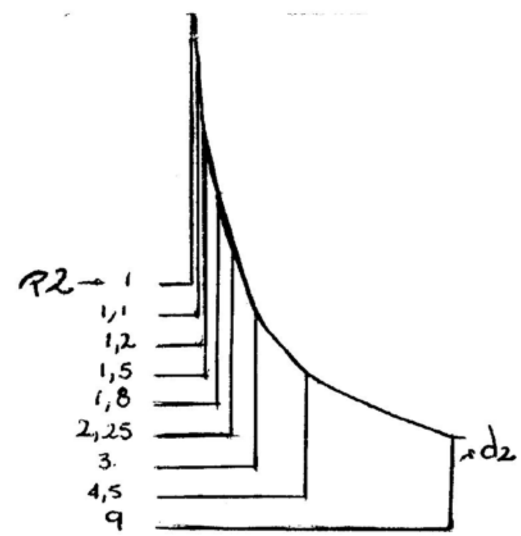
REPRESENTACIÓN VERBAL-ESCRITA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
Como habíamos notado en las clases, algunas distancias eran el doble de la anterior y los pesos la mitad. *También podemos observar en las gráficas que a menor distancia mayor peso y a mayor distancia menor peso.*	
Al organizar los datos de ésta forma, nos basamos en el trabajo pasado, y nos dimos cuenta que el peso del segundo dato es la mitad del primero, el tercero es la tercera parte del primero, el cuarto será la cuarta parte del primero, el quinto la quinta parte del primero, el sexto la sexta parte del primero. *Podemos ver que el peso se va disminuyendo a medida que la distancia va creciendo.*	

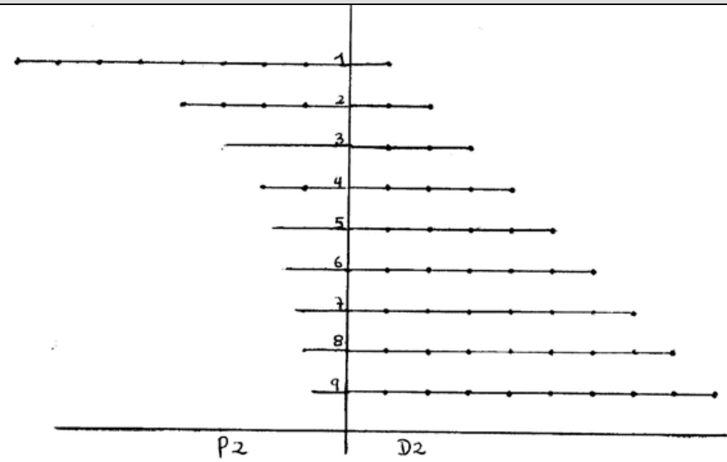
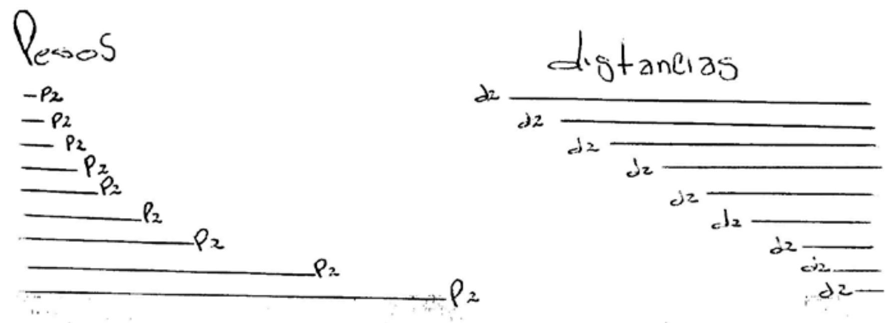
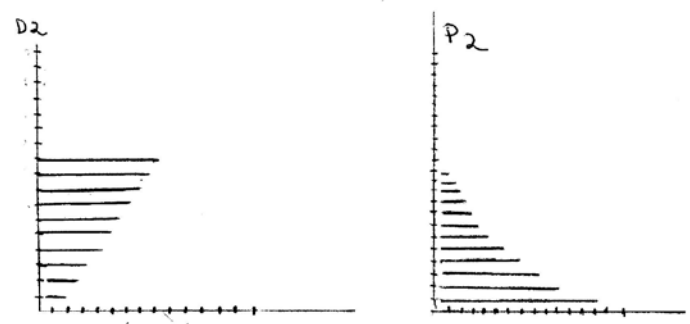
Segunda Clase: Se utilizan otras disposiciones de los segmentos donde se intenta mantener una relación entre pesos y distancias correspondientes, de tal manera que se pueda visualizar las variaciones entre éstas magnitudes.

Cantidad de estudiantes: 22 estudiantes.

REPRESENTACIÓN VERBAL-ESCRITA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA
De ésta forma podemos saber no solo qué distancia le pertenece al peso, sino también cómo está formado en la balanza con sus respectivas unidades. *Además podemos ver que a medida que la distancia aumenta de unidad el peso disminuye*.	

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL-ESCRITA</th><th>REPRESENTACIÓN GRÁFICA</th></tr>
<tr><td>De la manera que organizamos los datos, nos permite ver que las distancias van siendo cada vez más grandes o largas y los pesos cada vez más pequeños.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Relacionamos los pesos y las distancias por parejas, hallamos las unidades de cada peso para relacionarlo con su distancia.

Teniendo en cuenta que el primer peso tiene 9 unidades, el segundo peso es la mitad del primero, el tercer peso es la tercera parte del primero, el cuarto es la cuarta parte del primero y así con los demás hasta el noveno que es la novena parte del primero, el cual tiene una unidad.</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL-ESCRITA</th><th>REPRESENTACIÓN GRÁFICA</th></tr>
<tr><td>Organizamos los datos en una gráfica de comparación porque permite visualizar la relación que existe ya que a medida que p_2 aumenta d_2 disminuye.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Las relaciones que tienen éstos datos se pueden ver en la gráfica, porque se puede ver la diferencia de cada uno, si la distancia aumenta el peso disminuye o si la distancia disminuye el peso aumenta.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Por medio de ésta organización se permite una mejor visualización del comportamiento en que varía d_2 y p_2, porque lo muestra la gráfica, mientras d_2 aumenta p_2 va disminuyendo.</td><td>
</td></tr>
</table>

Tercera Clase: Establecen relaciones numéricas entre las magnitudes con ausencia de una posible representación gráfica de éstas magnitudes.

Cantidad de estudiantes: 8 estudiantes.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL-ESCRITA</th><th>REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA</th><th>REPRESENTACIÓN TABULAR</th></tr>
<tr>
<td>A medida que d_2 aumenta p_2 va disminuyendo.

Para saber cuánto vale p_2, dividimos a d_2 entre 6.</td>
<td>$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$
$2 \times 3 = p_2 \times d_2$
$6 = p_2 \times 2$
$p_2 = \frac{6}{2}$</td>
<td><table>
<tr><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>6/1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6/2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6/3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6/4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6/5</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>Cómo $p_1 \times d_1$ es 6, entonces podemos saber el p_2 dividiendo a 6 entre d_2.</td>
<td>$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$
$6 = p_2 \times d_2$
$\frac{6}{d_2} = p_2$</td>
<td><table>
<tr><th>d_2</th><th>p_2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,8</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,6</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

REPRESENTACIÓN VERBAL-ESCRITA	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA
Teniendo en cuenta la ley de equilibrio que dice que $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$ *podemos establecer que para hallar el valor de* p_2 *y* d_2 *para cada uno de los casos, solo tenemos que hallar el valor de uno de ellos con ayuda del compás y depende del valor que tenga, así tendrá el valor el otro segmento.* *Lo que tenemos que hacer es hallar el valor de uno de los segmentos y con ese resultado buscar el número que multiplicado por éste de seis ya que ese es el resultado de la multiplicación de* $p_1 \times d_1$.	$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$ $3 \times 2 = 6$
Para poder conocer el p_2, *utilizamos la regla del equilibrio y como sabemos que* $p_1 \times d_1$ *es 6, buscamos dos números que multiplicados nos den 6, para que se cumpla el equilibrio.*	$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$ $3 \times 2 = 1 \times 6$ $3 \times 2 = 2 \times 3$

4.2. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE LAS VARIACIONES EN LA MÁQUINA HIDRÁULICA

4.2.1. Identificación: Identificación de las magnitudes variables.

Inicialmente el primer instrumento permite ver los cambios según las modificaciones del punto A y los vectores F1 y F2, por lo tanto los cambios descritos por los estudiantes solo se argumentan visualmente, en este instrumente no hay un referente geométrico para hablar de comparaciones entre presiones, solo de aumentos o disminuciones, por lo frente al reconocimiento de las variables y las variaciones del instrumento se toma las descripciones que recogen las del grupo de estudiantes:

- *"Lo podemos relacionar con una máquina la cual al mover el punto A aumenta o disminuye la presión y el peso cambia al modificar los vectores F1 y F2"*
- *"Modificando el punto A y los vectores F1 y F2 pudimos concluir que esta imagen se parece a los movimientos repetitivos de un pistón, ya que se mueven con base a una fuerzo o peso que hace posible el movimiento".*
- *"A un gato hidráulico, ya que al modificar el punto A y los vectores la presión aumenta o disminuye, cuando modificamos el vector F1 y se ejerce una fuerza sobre el vector F2, es decir una parte más pesada sube gracias a que la presión en F1 se distribuye"*
- *"El objeto al ser modificado se parece a unos pistones de carro, porque se puede asumir que el líquido al ser presionado por las fuerzas aumenta la presión".*
- *"Se asemeja a una prensa hidráulica ya que al ejercer una fuerza en el punto F1, la misma fuerza pasa al punto F2, la presión ejercida en F1 mueve el líquido y al hacer esto sube el nivel en del líquido en el punto para la fuerza F2".*
- "*Al modificar el punto A la base del lado izquierdo aumenta el área, al estar el área en la forma más pequeña, la presión es más fácil de ejecutar y con un menor peso. El peso está controlado por los vectores, entre más largos éstos tienen mayor fuerza".*
- *"Cuando se mueve el punto A la máquina cierra las válvulas en la que se encuentra un líquido y el cual hace aumentar o disminuir el grado de presión y alargue de la máquina. Al aumentar los vectores la máquina simula un peso, el cual hace que la*

válvula 1 aumente o disminuya ya que al aumentar el peso F1 la presión ejercida por el líquido aumenta la cantidad de líquido en la válvula 2 o viceversa".

Los estudiantes definen las variables presentes en la máquina de la siguiente manera:

- *"El punto A regula la cantidad de flujo de líquido que entra por el conducto y los vectores F1 y F2 cambian los pesos"*
- *"El punto A aumenta o disminuye el área del lado izquierdo. F1 y F2 cambian el peso que ejerce la presión en el líquido"*
- *"Los vectores F1 y F2 modifican los pesos y el punto A modifica el volumen de la máquina".*
- *"A modifica el cierre de válvulas, F1 modifica el peso de la válvula 1 y F2 modifica el peso de la válvula 2".*
- *"El punto A modifica el grosor, ya que la presión aumenta cuando es menor de menor tamaño"*
- *"El punto A modifica el área cerrando o abriendo los conductos, F1 y F2 son representaciones de una fuerza ejercida por los pesos, F1 representa el peso del lado izquierdo y F2 el peso del lado derecho".*
- *"El punto A afecta la distribución de la presión, modificando el área. F1 y F2 son las fuerzas que se ejercen".*
- *"Modificando el punto A se reduce o se amplía el conducto del líquido de F1. Al modificar F1 se aumenta o se disminuye el peso y al hacer eso cambia la presión".*

La discusión frente a lo que significa hablar de presión:

Surgen diversas preguntas por parte de los estudiantes al socializar los trabajos de cada grupo:

- *¿Es la presión la variación presente en la máquina?*
- *¿Cómo definimos la presión?*
- *¿Cuáles son las variables que al modificarse generan mayor o menor presión?*
- *¿Cómo se genera mayor o menor presión?*

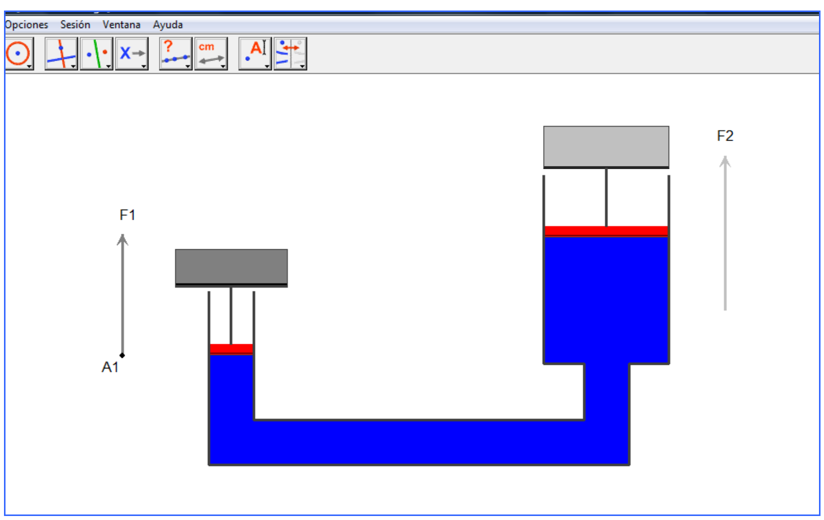
Los puntos de acuerdo, los cuales son validados por las transformaciones en el instrumento, son:

“Al modificar cualquiera de los puntos, la cantidad de líquido que se encuentra encerrado siempre va ser la misma por eso cuando se aumenta el peso F1 o F2 se ejerce una fuerza que presiona el líquido para cualquiera de los dos lados de la máquina”. Por lo tanto definimos a ***F1*** y ***F2*** como **pesos** *“que ejercen una fuerza en el líquido la cual hace que aumente o disminuya la presión*”, y ***A1*** como el **área** de la abertura de los dos extremos de la máquina “*que permite el paso de cierta cantidad de líquido”*. Frente a esto definimos al peso como; la fuerza que resulta de la acción de la gravedad en la materia.

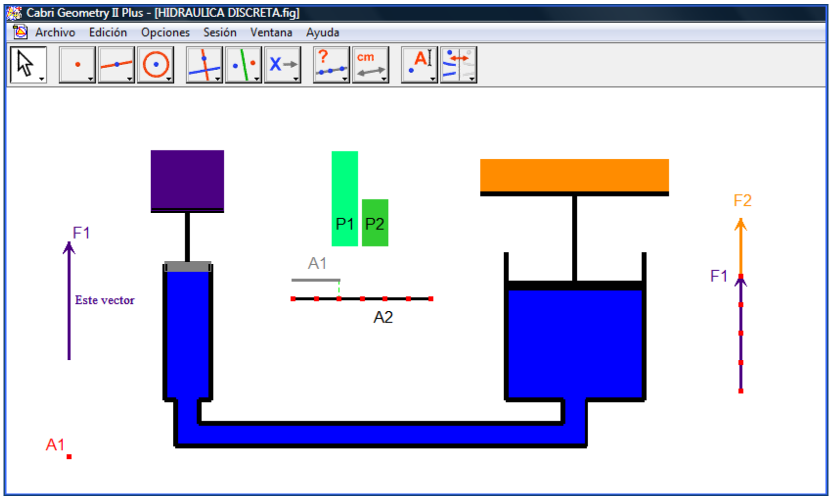
Para explicar la relación entre las variables presentes, este se define de acuerdo a los cambios que se generan y que son visibles en la máquina cuando se varían los pesos ***F1*** y ***F2*** y el área ***A1*** *“La fuerza que se aplica al área genera una presión en el líquido lo que permite que el otro peso suba”, “La presión es la fuerza que se aplica al área que regula el paso de líquido por el conducto”.*

4.2.2. Discriminación: Las relaciones entre las magnitudes variables.

Para responder a la pregunta de ¿Cómo se genera mayor o menor presión?, se propone a los estudiantes estudiar la máquina con las siguientes condiciones: Dejando el área ***A1*** mínima y el peso ***F2*** máximo, ¿Qué ocurre cuando se aumenta el peso F1?



Y posteriormente se hacen las exploraciones en la máquina discreta, la cual tiene como herramientas la comparación entre las magnitudes y la medición de las presiones por medio de la visualización de unos niveles de presión.



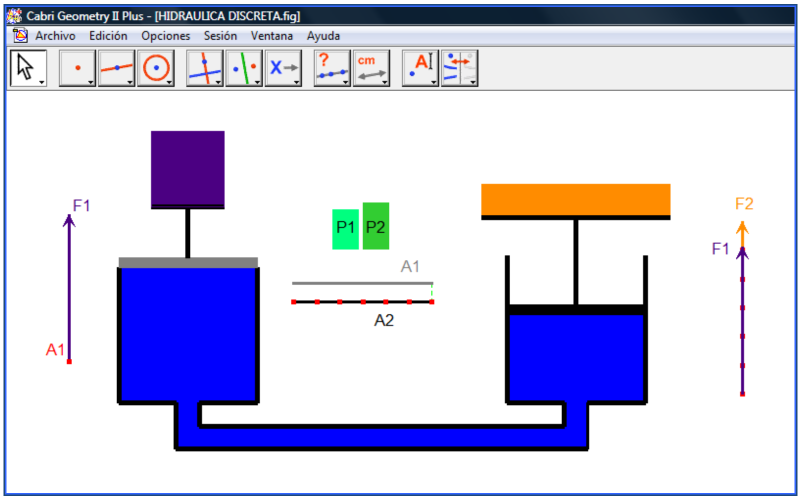
La diferencia entre las presiones:

Los estudiantes que argumentaron la variación en las presiones fueron **38**, quienes la expresaron así:

- *"Al aumentar el peso 1, el peso 2 se eleva, esto se debe a que al aumentar la presión en una zona más pequeña el fluido tiene que buscar por donde salir haciendo mayor presión y eleva al peso 2. Este es un ejemplo en el que con un área menor se ejerce mayor presión".*
- *"Al reducir el área y al aumentar el peso F2, se produce una mayor presión creada por F1 al modificarse, sin tener en cuenta que el peso sea mayor o menor"*
- *"La presión aumenta en espacios más reducidos, si el área de A1 es menor aumenta la presión en el líquido y hace que se mueva fácilmente el peso F2"*
- *"Cuando aumentamos a F2 y colocamos como mínimo al punto A, hay menos capacidad de fluido y al aumentar a F1 aumenta la presión y hace que el peso F2 suba"*
- *"Al disminuir el área 1 hace que el peso 1 pueda hacer más presión al líquido para levantar al peso 2".*

- *“La máquina se modifica; al aumentar F1 el peso 1 aumenta y por lo tanto, el peso 2 es elevado. Esta variación en la máquina transmite una presión en el peso 1 y el peso 2 se eleva. Además el área 1 es menor y la presión se concentra más en F2”.*
- *“Cuando el área A es mínima, y F2 es máximo, variamos el peso F1, cuando aumenta genera una presión que hace que el fluido suba al peso 2. Cuando F1 aumenta el fluido que está en el área 1 se reparte hacia el área 2 y esto hace que F2 suba”.*
- *“Se puede observar la variación del peso, cuando el peso aumenta el conducto por el cual va disminuye y produce que el líquido baje y suba al peso F2”*
- *“Si el área A1 es menor aumenta la presión en el líquido al aumentar a F1 y hace que el peso F2 se mueva fácilmente”.*
- *“Cuando aumentamos F2 el peso aumenta, si colocamos al mínimo el punto A1, el área disminuye y por lo tanto hay menos capacidad de fluido y luego al aumentar F1 la fuerza que se ejerce sobre dicho vector es decir el peso aumenta y el fluido se distribuye al peso ejercido”.*
- *“Al disminuir el área A1 y aumentar el peso F1 aumenta la presión y hace que el peso F2 suba”.*
- *“Al aumentar la presión con un área más pequeña, el fluido tiene que buscar por donde salir haciendo que se haga una mayor fuerza de presión que eleva más fácilmente el peso 2, pues este tiene un área más grande en que el peso se distribuye. Este es un ejemplo en el que con un área menor se ejerce mayor presión”.*
- *“La máquina funciona a partir de la presión que al ser ejercida por un área menor y un peso igual o mayor e incluso en algunos casos con una fuerza menor, puede ser capaz de mover otros pesos. Al tratarse de un área mayor o igual al otro lado se necesitaría una fuerza mucho más grande para que la presión sea mayor”.*

La relación expresada se da a partir de la modificación del peso F1, dejando el área A1 máxima, es decir igual al área A2, como se muestra en la máquina.



- *"Como las áreas son iguales, si dejamos el área 1 máxima, y aumentamos el peso 1 no produce ningún cambio en la máquina, el peso tendría que ser mayor al peso 2", para que haya más presión".*
- *"Se empareja el área 1 con la 2 y como F1 tiene el mismo peso que F2, no se modifica la máquina, porque F1 es menor que F2, tiene menor presión".*
- *"Teniendo a F1 y A1 máximos, al haber la misma área y el mismo peso se ejerce igual presión ya que ejercen la misma fuerza".*
- *"Al estar A1 máximo e ir disminuyendo el peso F1, las presión de este lado (Izquierdo) se ve disminuida, aunque no ocurre ningún cambio ya que ambas áreas son iguales y la presión del lado derecho es mayor".*
- *"Cuando el área A1 y el Peso F1 son iguales al peso F2 y al área A2, las presiones se igualan".*
- *"Al tener el área A1 al máximo y el peso F1 disminuyendo, el área al ser igual que el A2, la presión P1 disminuye".*
- *"Cuando el peso aumenta y el área disminuye, el líquido ejerce más presión y el peso puede causar mayor control ya que está en su punto máximo. Cuando las dos áreas son iguales la presión que se ejerce es igual, esto se debe a que tienen la misma área y el mismo peso".*

Los **6** estudiantes restantes describen las variaciones sin dar algún argumento que explique la variación en la presión.

- "*La máquina se modifica; al aumentar el peso F1 y disminuir el área A1 el peso F2 es elevado".*

- *“Lo que varía es el peso F1, ya que disminuye pero no le ocurre nada al líquido cuando el área A1 es máxima”*

A partir de la socialización de los trabajos en grupos, hemos concluido que:

- ***Cuanto menor sea la superficie más fuerza corresponderá a cada punto del fluido, aumentando la presión***.
- ***Cuando las áreas y los pesos son iguales las presiones son iguales. Si alguna de las variables disminuye con respecto a la otra, la presión es menor.***

Pero hasta el momento no hemos discutido como definiremos la presión, así la idea intuitiva de los estudiantes por las variaciones que ejercen a la máquina, es que el peso al ejercer la fuerza en un área genera una presión que permite que el peso del otro lado se levanta, pues en forma matemática definiremos la presión como:

“La fuerza que se ejerce sobre un área” $P = \frac{F}{A}$, siendo ***P*** la presión, ***F*** la fuerza que ejerce el peso y ***A*** el área.

4.2.3. Generalización: El control de las variaciones.

El estudio que se inicia de acuerdo a las conclusiones anteriores, es determinar las condiciones de las variables para que las presiones sean iguales por medio de magnitudes discretas, por medio de la exploración del instrumento discreto que permite establecer relaciones extensivas entre las variables.

Primera Clase: Los estudiantes establecen relaciones a nivel multiplicativo para establecer la igualdad de presiones y establecen la ley de compensación en para la presiones $\frac{F1}{A1} = \frac{F2}{A2}$

Cantidad de estudiantes: 38 estudiantes.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL ORAL/ESCRITA</th><th>REPRESENTACIÓN TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA</th></tr>
<tr>
<td>Cuando las áreas sean iguales las fuerzas ejercidas tienen que ser iguales para no alterar el equilibrio en las presiones. Esto también depende de la densidad y espacio que ocupe el fluido en la máquina, ya que entre mayor densidad se necesita más peso para poder mover el fluido a través de los conductos, pues ofrece mayor resistencia. Esto se debe a que con una menor área se necesita un menor peso para levantar el peso contrario.</td>
<td>
<table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>6</td><td>6</td></tr>
</table>
En la tabla se muestra que manteniendo la misma cantidad de unidades en F1 y A1 se mantiene el equilibrio.
<table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>8</td><td>12</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>15</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>16</td><td>24</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>18</td><td>27</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$\frac{12}{6}$</td><td>$\frac{18}{6}$</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>
Hay infinitas posibilidades, la relación es de 2 a 3 y al simplificarlo da el mismo resultado equivalente.
</td>
<td>En estas presiones se cumple que:
$\frac{F2}{A2} = 1$ y que $\frac{F1}{A1} = 1$

Así la presión se puede hallar como la fuerza sobre el área.
$\frac{F1}{A1} = \frac{F2}{A2}$ ó $F1 \times A2 = F2 \times A1$

Ya que al ser equivalentes las fracciones para hallar la presión de lado y lado querría decir que estas son iguales, sin importar la diferencia entre fuerzas y áreas.

$\frac{F1}{A1} = \frac{F2}{A2}$ $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$
$1 \times 20 = 5 \times 4$

Son equivalentes y las presiones son iguales.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL ORAL/ESCRITA</th><th>REPRESENTACIÓN TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA</th></tr>
<tr>
<td>

Las unidades de la fuerza 1 y del área 1 deben ser iguales para que las presiones sean las mismas, teniendo en cuenta que los factores fuerza y área del lado 2 no sean variables. Mientras A2 y F2 sean iguales y F1 y A1 sean también iguales, las presiones lo son.

Para la otra relación, si decimos que la presión es la fuerza sobre el área $P = \frac{F}{A}$ *entonces en este caso es igual a* $\frac{2}{3}$ *entonces debemos hallar números equivalentes a* $\frac{2}{3}$ *para que* $P1 = P2$.

</td>
<td>
<table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>8</td><td>12</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>16</td><td>24</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>32</td><td>48</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>128</td><td>192</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>256</td><td>392</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>512</td><td>784</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1024</td><td>1568</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>

F1 son múltiplos de 2 y A1 son múltiplos de 3.

</td>
<td>

Para este caso las presiones son iguales porque

$P1 = \frac{F1}{A1} = 1$ *y* $P2 = \frac{F2}{A2} = 1$

la división a ambos lados siempre da 1.

$$P1 = P2$$
$$\frac{F1}{A1} = \frac{F2}{A2}$$
$$F1 \times A2 = F2 \times A1$$

La relación para este caso es $P2 = \frac{2}{3} = 0,\hat{6}$, *en la tabla todos los resultados* $\frac{F1}{A1}$ *después de ser simplificados y divididos nos da* $\frac{2}{3}$ *y la constante de F1 es 2 y de A1 es 3.*

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Las presiones son iguales solo si la división entre la fuerza por el área es 1. Para que sean iguales F1 y A1 deben tener la misma magnitud entonces no son las únicas, son infinitas porque hay infinitos números.

Al multiplicar F1 por A2 y F2 por A1 nos dará el mismo número.

</td>
<td>
<table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5,6</td><td>5,6</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2,3</td><td>2,3</td><td>6</td><td>6</td></tr>
</table>
</td>
<td>

Con estos datos podemos decir que la presión es $P = \frac{F}{A}$ *y cuento* $P = \frac{F}{A} = 1$ *las presiones son iguales, 1 es la constante.*

$$F1 \times A2 = F2 \times A1$$
$$5 \times 6 = 6 \times 5$$
$$30 = 30$$

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th>REPRESENTACIÓN VERBAL ORAL/ESCRITA</th>
<th>REPRESENTACIÓN TABULAR</th>
<th>REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA</th>
</tr>
<tr>
<td>La presión es la fuerza que se ejerce sobre un área $P = \frac{F}{A}$, entonces las presiones se halla con las fracciones homogéneas a la presión dada.
F1 aumenta de 2 en 2 y A1 aumenta de 3 en 3.
No son los únicos posibles, hay infinitas presiones, porque las fracciones pueden ser infinitas.</td>
<td>
<table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>9</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>8</td><td>12</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>15</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>12</td><td>18</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>14</td><td>21</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>16</td><td>24</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>18</td><td>27</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>
</td>
<td>La presión es $P = \frac{F}{A}$, y la relación es $\frac{2}{3}$.
$\frac{F1}{A1} = \frac{F2}{A2}$
$F1 \times A2 = F2 \times A1$
Entonces, las presiones iguales a $\frac{2}{3}$ son las fracciones equivalentes;
$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} \ldots$</td>
</tr>
</table>

Segunda Clase: Los estudiantes establecen relaciones a nivel multiplicativo para establecer la igualdad de presiones, sin hacer explícita una relación de compensación a nivel simbólico.

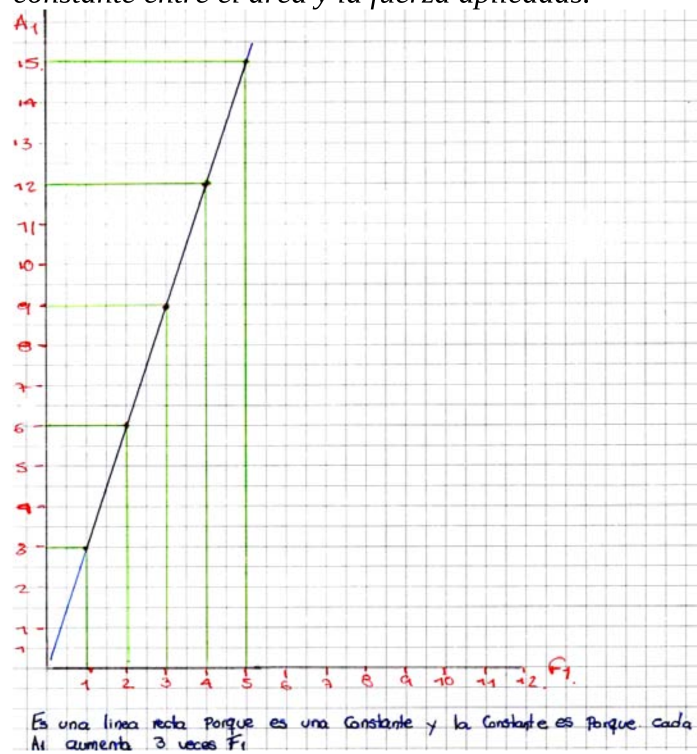
Cantidad de estudiantes: 6 estudiantes.

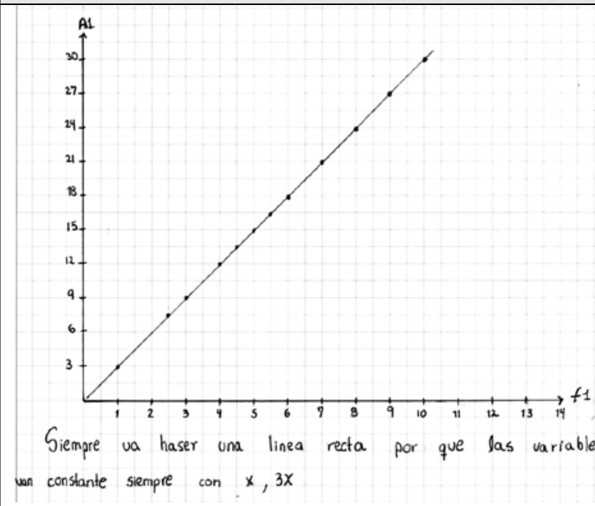
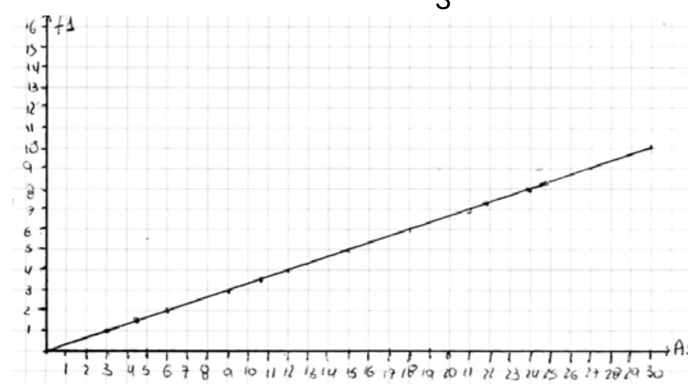
<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL
ORAL/ESCRITA</th><th>REPRESENTACIÓN
TABULAR</th></tr>
<tr><td>Mientras A1 sea igual a F1 se va a tener la misma presión. No importa que sean decimales. La relación es que cuando dividimos A1 y F1 siempre nos va a dar lo mismo: $\frac{5}{5} = \frac{6}{6} = 1$
No son las únicas posibles, ya que cuando se obtenga la misma fuerza y área la presión será igual.</td><td>
<table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>6</td><td>6</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>La relación que se encuentra es que F1 se va aumentando de 2 en 2 y A1 aumenta de 3 en 3, que son las constantes de F2 y A2.</td><td>
<table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>9</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>8</td><td>12</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>15</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>12</td><td>18</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>14</td><td>21</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>16</td><td>24</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>18</td><td>27</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

4.2.1. Síntesis: El estudio de las transformaciones.

Primera clase: Opta por el plano cartesiano para organizar los segmentos que representan los pesos y las distancias ya sea desde la relación proporcional entre estos o desde su cantidad.

Cantidad de estudiantes: 38 estudiantes.

<table>
<tr>
<th>REPRESENTACIÓN VERBAL ORAL/ESCRITA</th>
<th>REPRESENTACIÓN TABULAR</th>
<th>REPRESENTAIÓN SIMBÓLICA</th>
<th>REPRESENTACIÓN GRÁFICA</th>
</tr>
<tr>
<td>Para encontrar la igualdad de presiones, la relación es del triple, A1 es el triple de F1. Por lo tanto la constante en la relación es para las presiones es de 1 a 3.
Los valores para F1 y A1 son infinitos, siempre que tengan la misma relación y puede tomar cualquier valor mayor a cero, porque no podemos hablar de áreas negativas ni de un área cero.</td>
<td>
<table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>3.3</td><td>9.9</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5.3</td><td>15.9</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>6.9</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5.6</td><td>16.8</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>7.8</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>x</td><td>3x</td><td>2</td><td>6</td></tr>
</table>
</td>
<td>La relación se puede expresar como:
$A1 = 3 \times F1$
Y se cumple que:
$F1 \times A2 = F2 \times A1$
Y la constante en la presión es $P = \frac{1}{3}$</td>
<td>Al ver la gráfica se forma una recta, porque hay una constante entre el área y la fuerza aplicadas.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th>REPRESENTACIÓN VERBAL ORAL/ESCRITA</th>
<th>REPRESENTACIÓN TABULAR</th>
<th>REPRESENTAIÓN SIMBÓLICA</th>
<th>REPRESENTACIÓN GRÁFICA</th>
</tr>
<tr>
<td>Las presiones están en relación de $\frac{1}{3}$, por lo tanto son infinitas mientras guarden la equivalencia. Pero no pueden ser valores negativos porque no hay espacios negativos. Para cualquier valor de F1, A1 es tres veces F1.</td>
<td><table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>12</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>7.5</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4.5</td><td>13.5</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5.5</td><td>16.5</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>18</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>x</td><td>3x</td><td>2</td><td>6</td></tr>
</table></td>
<td>La constante es de $\frac{1}{3}$ y la igualdad en las presiones se cumple $\frac{F1}{A1} = \frac{F2}{A2} = \frac{1}{3}$ mientras todas sean equivalentes.
$A1 = 3 \times F1$ y
$F1 = \frac{1}{3}A1$
Es una relación directa al tener una constante.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Para que se igualen las presiones A1 siempre tiene que ser el triple de F1 y a su vez F1 es $\frac{1}{3}$ A1 En números positivos se puede tomar infinitos valores ya que existen infinitos números. La gráfica es una recta, ya que las equivalencias o valores de F1 y A1 son constantes, sus valores siempre tendrán una razón de $P = \frac{1}{3}$.</td>
<td><table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>0.5</td><td>1.5</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>4.5</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>10.5</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>12</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>x</td><td>3x</td><td>2</td><td>6</td></tr>
</table></td>
<td>La presión es $P = \frac{1}{3}$, las presiones son equivalentes con
$\frac{F1}{A1} = \frac{F2}{A2}$
La relación de F1 y A1 es:
$A1 = 3 \times F1$ y
$F1 = \frac{1}{3}A1$</td>
<td>Esta gráfica es la relación $F1 = \frac{1}{3}A1$


Se comporta como una línea recta porque la relación entre F1 y A1 de 1 a 3.</td>
</tr>
</table>

Segunda clase: Establecen relaciones numéricas entre las magnitudes con ausencia de una posible representación gráfica de éstas magnitudes.

Cantidad de estudiantes: 6 estudiantes.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL ORAL/ESCRITA</th><th>REPRESENTACIÓN TABULAR</th><th>REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA</th></tr>
<tr>
<td>Para que las presiones sean iguales, F1 aumenta de 1 en 1 y A1 aumenta de 3 en 3, porque A1 es el triple de F1.</td>
<td>
<table>
<tr><th>F1</th><th>A1</th><th>F2</th><th>A2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>12</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>18</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td>21</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>8</td><td>24</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>x</td><td>3x</td><td>2</td><td>6</td></tr>
</table>
</td>
<td>Porque se cumple la igualdad
$F1 \times A2 = F2 \times A1$
$1 \times 6 = 3 \times 2$
$1 \times 6 = 3 \times 2$
$4 \times 6 = 12 \times 2$

La relación es $A1 = 3 \times F1$</td>
</tr>
</table>

5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Esta investigación de tipo cualitativo describe los procesos de resolución de problemas de los estudiantes en los momentos de comprensión de las situaciones de variación; *La Balanza Virtual y La Máquina Hidráulica*, por lo tanto se analizan tres aspectos que se relacionan en la enseñanza y el aprendizaje de la noción de función desde la función lineal y la función inversa por medio de la resolución de problemas, estos son: La resolución de problemas de situaciones de variación, el uso de las representaciones matemáticas en la resolución de problemas de variación y la mediación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

5.1. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE SITUACIONES DE VARIACIÓN

Este análisis es de tipo cualitativo y cuantitativo basado en el estudio de las categorías de actos de comprensión de la noción de función descritos por Sierpinska (1998) y los estudios de Ruiz (1998) de las concepciones de la noción de función que se han desarrollado a través de la historia, en los procesos de resolución de problemas según Charnay (1994)

Las acciones en el aula de la resolución de problemas para la enseñanza de las matemáticas se enmarca en la problematización de las mismas, donde el estudiante tiene la oportunidad de cuestionar, investigar, proponer estrategias de solución y validar sus procesos, desde el estudio de las situaciones de variación *La Balanza Virtual y La Máquina Hidráulica* propuestos por el docente, que son ambientes generadores de problemas a partir de las exploraciones de los estudiantes y sus conjeturas en la manipulación de dichos instrumentos. Las acciones del aula a partir de la estrategia de resolución de problemas con *Charnay*, permite reconocer tres fases las cuales no son lineales, se presentan durante el estudio de las situaciones: *La **acción***; del estudiante en la búsqueda de estrategias de solución y el planteamiento de hipótesis, ***formulación y validación;*** donde el estudiante presenta sus procesos de solución y se validan a través de la socialización y de las relaciones matemáticas presentes en la situación y la ***institucionalización*** de los saberes construidos y validados por los estudiantes y el docente de las relaciones matemáticas presentes en la situación estudiada.

Es así, como en el estudio de las situaciones se evidencia las categorías de acciones de comprensión de las relaciones funcionales entre las variables que surgen de las hipótesis y validaciones de los estudiantes en cada momento.

5.1.1. ***Identificación:*** *La identificación de las magnitudes variables.*

Explicita acciones de comprensión como:

- La identificación de las magnitudes variables.
- La descripción cualitativa del fenómeno de variación

En la *Tabla 1* se presentan las frecuencias y el porcentaje de los estudiantes que identifican las magnitudes variables y describen el fenómeno de variación en la *Balanza* y la *Máquina Hidráulica.*

Actos de Comprensión	***Balanza***		***Máquina Hidráulica***	
	Cant. Estudiantes	***%***	**Cant. Estudiantes**	***%***
La identificación de las magnitudes variables	44	100	44	100
Descripción del fenómeno de variación	44	100	44	100

Tabla 1*. Frecuencias de la Identificación de las Magnitudes Variables*

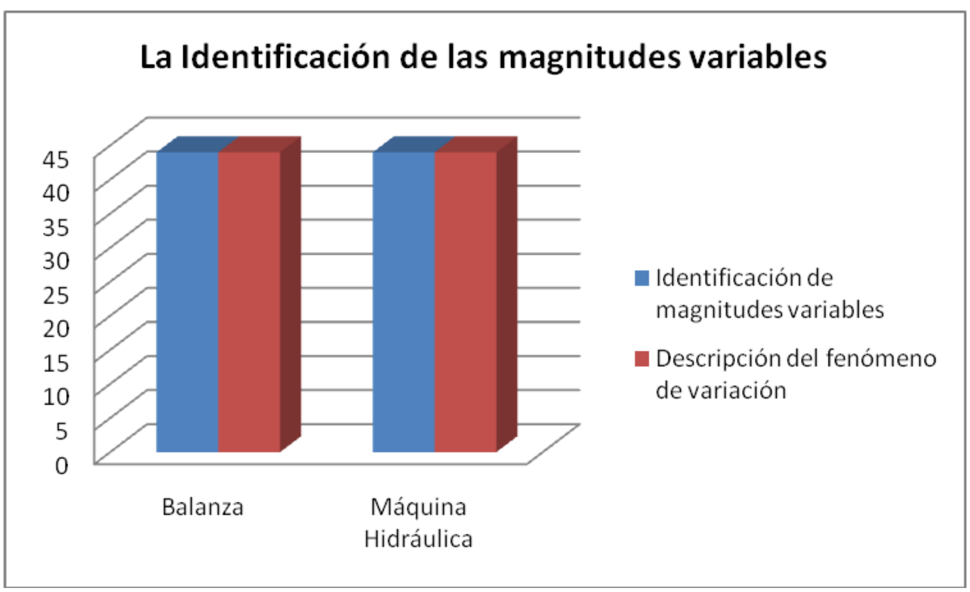


Gráfico 1*. Frecuencias de la Identificación de las Magnitudes Variables*

La primera situación que se propuso a los estudiantes fue *La Balanza Virtual* y posteriormente *La máquina Hidráulica.* Para las cuales se inicia su exploración por medio de la manipulación de los instrumentos que permiten acciones de observación e identificación de las magnitudes variables.

Inicialmente describir el funcionamiento del instrumento e identificar el fenómeno de variación presente, en ambas situaciones se refleja que la descripción del fenómeno de variación está directamente relacionada con el proceso de identificación y definición de las magnitudes variables;

Para la ***Balanza*** los estudiantes identifican los cambios dados por las inclinaciones relacionándolo con el desequilibrio y la ausencia de inclinación relacionada con el equilibro. Definir el desequilibrio como la presencia de unidades mayores en uno de los lados de la balanza implica que los estudiantes identifiquen qué magnitudes permiten los cambios en los estados de la balanza: *"Poner d_1 y d_2 en el extremo derecho o izquierdo; a d_1 se le pone el peso mínimo y a d_2 le aumenté un poco el peso"* para generar una inclinación, *"p_1 representa un primer peso y p_2 representa un segundo peso. Encontramos que en la balanza estos dos pesos dan una inclinación grande o pequeña dependiendo en qué lugar se encuentran".*

Este tipo de descripciones se logran a partir del trabajo de la resolución de problemas en el que el estudiante primero genera transformaciones en el instrumento, que lo lleva a establecer hipótesis para la explicación del fenómeno de variación y las magnitudes que permiten las transformaciones, así los estudios frente a la balanza fueron inicialmente; *las inclinaciones grandes y pequeñas* donde los estudiantes determinan las condiciones para lograrlas.

Por medio de la socialización de los trabajos grupales se *validan* las descripciones encontradas *"d_1 y d_2 alejan o acercan el peso con relación al centro de la balanza, p_1 y p_2 son los que controlan la cantidad de peso en la balanza",* y se establecen los acuerdos para la definición de las magnitudes variables para la balanza como:

d_1 y d_2 representan las distancias de los pesos con relación al centro de la balanza.

p_1 y p_2 representan los peso en la balanza.

En las socializaciones de los trabajos grupales los estudiantes generaron los siguientes cuestionamientos:

- ✓ *¿Cómo hacer para que la balanza quede equilibrada?*
- ✓ *¿Qué pasa si se pone a* p_1 *y* p_2 *en el centro de la balanza?*
- ✓ *Si todos los puntos* d_1, d_2, p_1, p_2 *están distintos, ¿Cómo saber que esos cuatro puntos tienen el mismo peso para que la balanza esté en equilibrio?*

Algunos estudiantes exploraron el equilibrio determinado con pesos y distancias iguales, teniendo en cuenta que este solo se validó por la observación de la balanza en la ausencia de equilibrio.

Para la ***Máquina Hidráulica*** las descripciones de las variaciones únicamente se argumentan visualmente a través de las transformaciones al instrumento, ya que las exploraciones iniciales son modificar los puntos *A, F1* y *F2*, buscando alguna similitud con el funcionamiento de un objeto de la realidad; de acuerdo a una de las preguntas de los estudiantes acordamos definir la parte azul del instrumento como un líquido encerrado en un área determinada, así los estudiantes tiene un acercamiento describiendo el fenómeno de variación de la máquina como: *"Se asemeja a una prensa hidráulica ya que al ejercer una fuerza en el punto F1, la misma fuerza pasa al punto F2, la presión ejercida en F1 mueve el líquido y al hacer esto sube el nivel en del líquido en el punto para la fuerza F2",* "*Al modificar el punto A la base del lado izquierdo aumenta el área, al estar el área en la forma más pequeña, la presión es más fácil de ejecutar y con un menor peso. El peso está controlado por los vectores, entre más largos éstos tienen mayor fuerza".*

De acuerdo a las socializaciones la definición de las magnitudes variables se describen como: ***F1*** y ***F2*** como **pesos** *"que ejercen una fuerza en el líquido la cual hace que aumente o disminuya la presión*", y ***A1*** como el **área** de la abertura de los dos extremos de la máquina "*que permite el paso de cierta cantidad de líquido"*. Frente a esto definimos al peso como; la fuerza que resulta de la acción de la gravedad en la materia.

Los cuestionamiento que generaron los estudiantes en la socialización: *¿Cómo se genera mayor o menor presión?*, permitieron identificar el fenómeno de variación presente en la máquina y por lo tanto explicitar la relación entre las magnitudes variables; de acuerdo a los cambios que se generan y que son visibles en la máquina cuando se varían los pesos ***F1*** y ***F2*** y el área ***A1*** *"La fuerza que se aplica al área genera una presión en el líquido lo que permite que el otro peso suba", "La presión es la fuerza que se aplica al área que regula el paso de líquido por el conducto".*

Determinando así que el 100% de los estudiantes logra identificar las magnitudes variables y describir el fenómeno de variación para la *Balanza* y la *Máquina Hidráulica*. La identificación de las magnitudes variables y la relación entre ellas es un acercamiento cualitativo a los procesos de cambio que permite a los estudiantes formular hipótesis del comportamiento del fenómeno, hacer las primeras predicciones estableciendo explicaciones cualitativas de los cambios en la situación, acciones que llevan a la exploración cada vez más explícita de las variaciones.

5.1.2. ***Discriminación:*** *Relación de las magnitudes variables.*

Explicita acciones de comprensión como:

- La identificación de las relaciones entre las magnitudes variables a nivel cualitativo
- El establecimiento de una regla cualitativa de variación.

En la *Tabla 2* se presentan las frecuencias y los porcentajes de las acciones de comprensión para la identificación de las relaciones entre las magnitudes de variación y el establecimiento de reglas cualitativas de variación para la *Balanza* y la *Máquina Hidráulica.*

Actos de Comprensión	***Balanza***		***Máquina Hidráulica***	
	Cant. Estudiantes	***%***	**Cant. Estudiantes**	***%***
Las relaciones entre las magnitudes variables (cualitativo)	44	100	38	86
Regla cualitativa de variación para magnitudes de unidades iguales	44	100	38	86
Regla cualitativa de variación para magnitudes iguales para magnitudes de unidades diferentes e iguales.	32	73	36	82

Tabla 2*. Frecuencias de la Relación de las Magnitudes Variables*

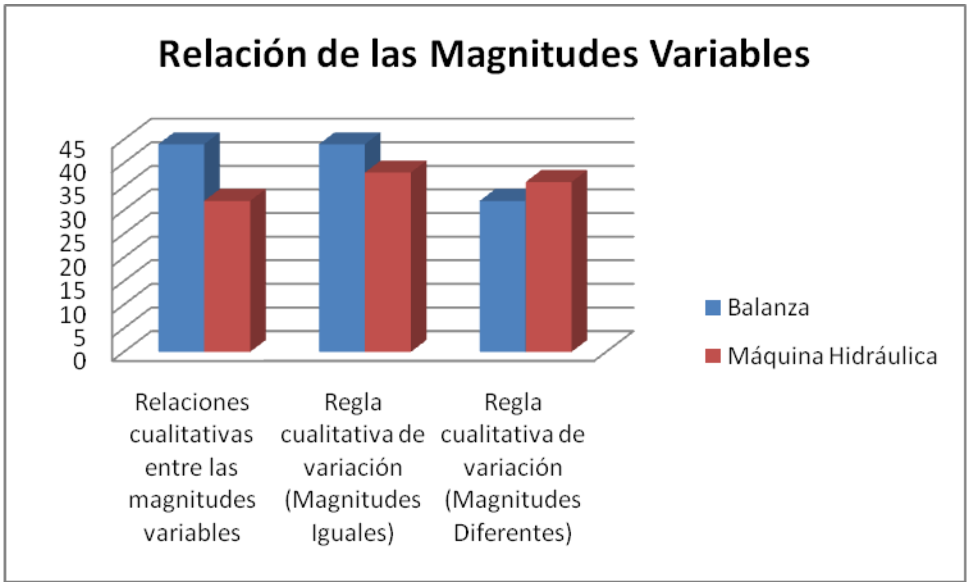


Gráfico 2*. Frecuencias de la Relación de las Magnitudes Variables*

La identificación de las relaciones entre las magnitudes se da desde las exploraciones iniciales, en la identificación de las magnitudes, las descripciones de los fenómenos de variación por parte de los estudiantes, reflejan las relaciones entre las magnitudes variables, y al explorar distintas posibilidades de cambio en la dinámica de la resolución de problemas, los cuestionamientos iniciales son los que permitirán continuar con los estudios para el establecimiento de reglas cualitativas de variación.

Se inicia así las exploraciones para la **Balanza** con el planteamiento de la pregunta: *¿Para que una balanza esté en equilibrio es necesario que las masas pesen igual?*, como uno de los procesos de *validación* surge la necesidad de recurrir a las relaciones matemáticas para comprobar que la balanza se encuentre en equilibrio, visualmente se asegura un equilibrio con los brazos de la balanza rectos (sin ningún quiebre), preguntando a los estudiantes la relación entre esos objetos, validando así que el equilibrio de la balanza está dado únicamente cuando los brazos son perpendiculares a la base[22], Los estudios de los estados de equilibrio de la balanza desde diferentes exploraciones por parte de los estudiantes permiten establecer el equilibrio con pesos iguales y pesos diferentes para los cuales los estudiantes plantean las siguientes relaciones:

[22] El software cabri tiene una herramienta que permite confirmar la relación de perpendicularidad entre los brazos de la balanza y la base, enseñanza a los estudiantes el uso de esta herramienta.

- ✓ *Con pesos p1 y p2 iguales y con distancias d1 y d2 iguales, la balanza se encuentra en equilibrio. Dada por el 100% de los estudiantes.*
- ✓ *Para pesos p1 y p2 distintos deben estar ubicados a distancias d1 y d2 diferentes:* ***A mayor peso menor distancia al centro de la balanza y a menor peso mayor distancia a este centro.*** *Dada por el 73% de los estudiantes.*

Para las exploraciones de las relaciones en la **Máquina Hidráulica** se plantea: *¿Cómo se genera mayor o menor presión?,* por medio de las exploraciones en la máquina y el momento de socialización se validan las variaciones en el instrumento desde la visualización de las transformaciones ocurridas cuando se modifica el área y los pesos ya que a diferencia de la balanza, el aumento o disminución de la presión en la máquina se da a partir del momento en que el peso contrario pueda levantarse y esto solo puede validarse visualmente, así se determinan las siguientes relaciones: el 82% de los estudiantes determinan que: ***Cuanto menor sea la superficie más fuerza corresponderá a cada punto del fluido, aumentando la presión***. El 86% de los estudiantes plantean como hipótesis; ***cuando las áreas y los pesos son iguales las presiones son iguales. Si alguna de las variables disminuye con respecto a la otra, la presión es menor.*** Exploraciones desde las cuáles se define la presión como la relación entre las variables por medio de la expresión matemática: ***"La fuerza que se ejerce sobre un área"*** $P = \frac{F}{A}$, siendo ***P*** la presión, ***F*** la fuerza que ejerce el peso y ***A*** el área.

La máquina hidráulica es un poco más compleja que la balanza ya que la explicación de los aumentos, disminuciones solo pueden darse por la exploración y visualización de los cambios en el instrumento y aún más complejo con la igualdad en las presiones la cual en este caso es una idea intuitiva de los estudiantes sobre el comportamiento de la máquina.

5.1.3. ***Generalización:*** *El control de las variaciones.*

Explicita acciones de comprensión como:

- Determina patrones numéricos en el estudio de regularidades de cantidades extensivas.

- Establece procesos de generalización para las leyes de compensación de los pesos y las presiones.

La *Balanza Virtual* fue diseñada para explorar dos tipos de variación modeladas por la función lineal y la función inversa y la *Máquina Hidráulica* permite explorar únicamente variaciones modeladas por la función lineal, es así como se presentan los resultados para el control de las variaciones a partir de estos tipos de variación.

La *Tabla 3* presenta las frecuencias y porcentajes de los estudiantes que encontraron patrones numéricos para establecer procesos de generalización de los cambios en la *Balanza* y la *máquina hidráulica* frente a estudios de variación que se comportan como ***funciones lineales.***

Actos de Comprensión	*Balanza*		*Máquina Hidráulica*	
	Cant. Estudiantes	**%**	**Cant. Estudiantes**	**%**
Patrones numéricos (Relaciones multiplicativas)	44	100	44	100
Procesos de generalización Leyes de compensación	20	45	38	86

Tabla 3*. Frecuencias del Control de las Variaciones de estudios de variación lineal*

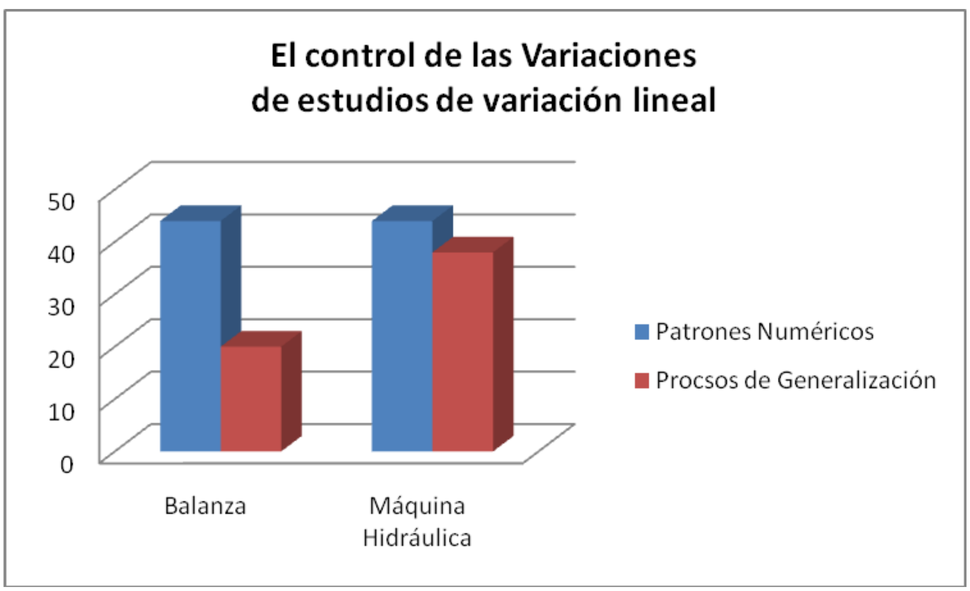


Gráfico 3*. Frecuencias del Control de las Variaciones de estudios de variación lineal*

En el estudio de una situación de variación la identificación de las relaciones de variación se establecen inicialmente de manera cualitativa para pasar a explorarlas de manera cuantitativa. Los instrumentos diseñados para este momento permiten la exploración de cantidades extensivas ya que las magnitudes variables adquieren medidas discretas por una misma unidad, para ambas situaciones.

En este sentido las exploraciones para la **Balanza** son únicamente para el equilibrio, por lo tanto se propone diferentes formas de exploración donde el estudiante tenga la capacidad de establecer una ley de compensación para los pesos, como las exploraciones son de variaciones lineales, las tareas que se propone explorar son dejando constantes ya sea ambos pesos *p1 y p2* ó ambas distancias *d1 o d2*.

El 100% de los estudiantes establece patrones numéricos por medio de relaciones multiplicativas, organizado los datos encontrados desde la exploración de la balanza, en tablas las cuales le permiten reconocer patrones de cambio para generar otros datos que ya no son posibles de ser validados por la balanza virtual.

Estas exploraciones en tablas numéricas permiten establecer relaciones de dependencia entre las variables, por medio de la exploración de patrones numéricos de tipo multiplicativo.

p_1	d_1	p_2	d_2
2	1	1	2
2	2	1	4
2	3	1	6
2	4	1	8
2	5	1	10
2	6	1	12
2	7	1	14
2	8	1	16
2	9	1	18
2	10	1	20

Para esta relación los pesos *p1 y p2* son fijos por lo tanto el equilibrio en la balanza por medio de las exploraciones de los estudiantes *"El peso menor debe estar al doble de distancia respecto al peso mayor, ya que un peso es el doble del otro" ó "p2 es la mitad de p1"*, identificando así relaciones multiplicativas como *"d2 son los múltiplo de 2, d2 es el doble de distancia de d1"*. En este sentido se pregunta a los estudiantes si estas son las únicas posibilidades de equilibrio de la balanza con los pesos fijos, por lo cual se establecen distancias racionales que guarden la relación *"del doble de", "Estas distancias no son las únicas pues los números son infinitos"*, se pregunta a los estudiantes se pueden ser números negativos frente a lo cual se determina que *"no se pueden representar* *distancias negativas, estamos hablando de medidas, por lo cual se puede hablar solamente de números positivos”.*

	d_1	p_1	d_2	p_2
1	5	3×1	3	5×1
3	15	3×3	9	5×3
4	20	3×4	12	5×4
6	30	3×6	18	5×6
7	35	3×7	21	5×7

Para esta relación de equilibrio con los pesos *p1 y p2* fijos, los estudiantes determinan patrones de variación por medio de relaciones entre los múltiplos, *“en la columna d1 existen una serie de múltiplos de 5 y en la columna d2 los múltiplos de 3, que hacen que la balanza esté equilibrada”*. *“Los datos de la columna d2 son múltiplos de la columna p1 y los datos de la columna d1 son múltiplos de la columna p2”.*

El 45% de los estudiantes construyen una ley de compensación para los pesos en la balanza, a partir de las exploraciones en las tablas numéricas, las cuáles permiten generalizar las relaciones multiplicativas identificadas en las relaciones numéricas y las regularidades expresadas por un patrón de variación. Para las primeras exploraciones frente a las relaciones donde “*El peso menor debe estar al doble de distancia respecto al peso mayor, ya que un peso es el doble del otro”* construyen expresiones simbólicas que evidencian la relación de dependencia entre variables $d_1 \times 2 = d_2$, este tipo de expresiones explicitan un patrón de variación.

Por medio de las relaciones explicitadas anteriormente al identificar las relaciones multiplicativas entre las columnas, la validación del equilibrio se presenta cuando

- $3\times5=15 \qquad 5\times3=15$
- $3\times15=45 \qquad 9\times5=45$
- $3\times20=60 \qquad 5\times12=60$
- $3\times30=90 \qquad 5\times18=90$

$$p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$$

La cual permite extender nuevas posibilidades de interpretación y descubrimiento del equilibrio en la balanza, donde ya no es necesaria una representación pictórica o la transformación directa del instrumento.

El 55% de los estudiantes que no logró construir una generalización de la ley de compensación, la explicitó por medio de las relaciones multiplicativas entre las variables, determinando una ley de la compensación cualitativa.

Las exploraciones para la **Máquina Hidráulica** se dan en búsqueda de la compensación entre las presiones, para las cuales el 100% de los estudiantes determina patrones numéricos por medio de relaciones de tipo multiplicativo.

F1	*A1*	*F2*	*A2*
6	6	6	6
5	5	6	6
4	4	6	6
3	3	6	6
2	2	6	6
1	1	6	6

El instrumento tiene una herramienta que permite según las modificaciones para cada variable, visualizar las transformaciones en las presiones de acuerdo a la relación $P = \frac{F}{A}$, por lo tanto los estudiantes pueden buscar diferentes posibilidades de igualar las presiones con la fuerza F2 y el área A2 fijas en 6 unidades. Esta relación permite concluir que *"manteniendo la misma cantidad de unidades en F1 y A1 se mantiene la igualdad en las presiones ya que F2 y A2 son iguales y su división siempre será 1, por lo tanto hay infinitas posibilidades de pesos y áreas que tengan la misma relación para que las presiones sean iguales"*.

F1	*A1*	*F2*	*A2*
4	6	2	3
8	12	2	3
10	15	2	3
16	24	2	3
18	27	2	3
$\frac{12}{6}$	$\frac{18}{6}$	2	3

Esta relación no se puede validar con la máquina hidráulica, para esta los estudiantes identifican que *"La relación es de 2 a 3, no importa si las fuerzas y las áreas son diferentes, debemos hallar fracciones equivalentes para que las presiones sean iguales".*

El 86% de los estudiantes construyen una generalización a partir de las relaciones multiplicativas para la igualdad de presiones desde las cuales se expresan las relaciones de dependencia entre variables y el patrón de variación en la relación de cambio, en este sentido el trabajo de análisis de las variaciones en la balanza permitieron el uso de estrategias en la búsqueda de regularidades y relaciones numéricas para la explicación y representación de la ley de compensación de las presiones. Así, representan esta relación como $\frac{F1}{A1} = \frac{F2}{A2}$ o de acuerdo a la relación entre las proporciones se puede expresar como $F1 \times A2 = F2 \times A1$.

En este sentido las exploraciones frente a la igualdad de presiones se pueden hacer por medio de la relación entre las tablas y la expresión simbólica que permite modelar las relaciones de equivalencia entre fracciones las cuales representan las presiones en la máquina hidráulica.

La *Tabla 4* presenta las frecuencias y porcentajes de los estudiantes que encontraron patrones numéricos para establecer procesos de generalización de los cambios en la *Balanza* frente a estudios de variación que se comportan como ***funciones Inversas.***

Actos de Comprensión	Balanza	
	Cant. Estudiantes	%
Patrones numéricos (Relaciones multiplicativas)	44	100
Procesos de generalización (Expresión simbólica)	16	36

Tabla 4. *Frecuencias del Control de las Variaciones de estudios de variación Inversa*

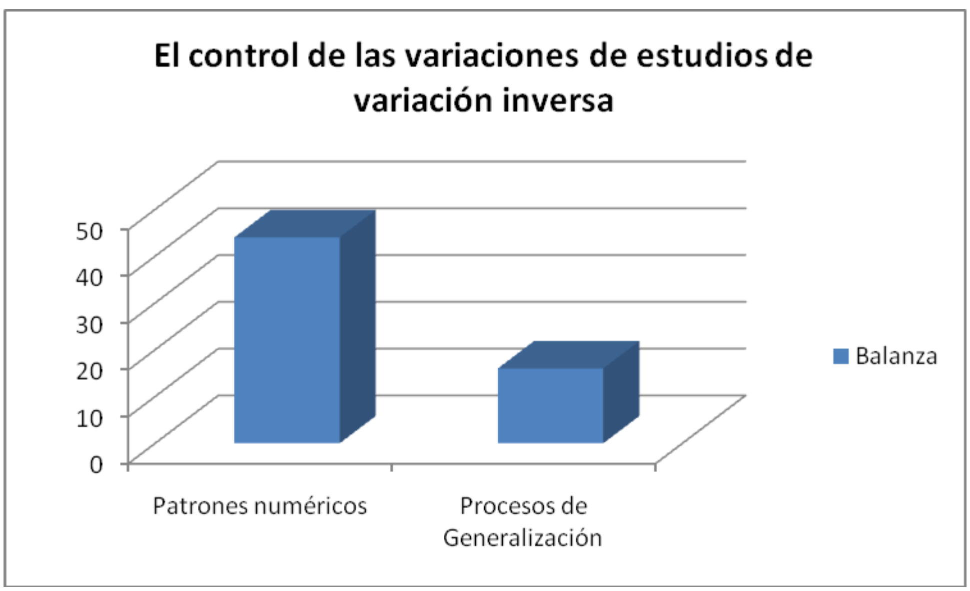


Gráfico 4. *Frecuencias del Control de las Variaciones de estudios de variación Inversa*

El 100% de los estudiantes expresan relaciones de multiplicativas para la búsqueda de patrones numéricos, de acuerdo a la ley de compensación entre los pesos; $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$.

p_1	d_1	d_2	p_2
2	3	1	6
2	3	2	3
2	3	3	2
2	3	4	$6/4$
2	3	5	$6/5$
2	3	6	1
2	3	7	$6/7$
2	3	8	$6/8$
2	3	9	$6/9$
2	3	10	$6/10$

Este tipo de exploraciones se dan a partir de la organización de los datos, donde un peso y una distancia son constantes para estudiar relaciones de variación inversa, los estudiantes determinan los pesos y las distancias que cumplan con el equilibrio para lo cual se expresan relaciones multiplicativas como: *"$p_1 \times d_1 = 6$, según la distancia que demos, el peso será 6 dividido de esa distancia".* El 36% de los estudiantes determina las distancias y los pesos pero no determina especifican una regla general que exprese la relación entre las variables para cualquier valor.

A manera de conclusión se retoma con los estudiantes dos tablas que expresan relaciones de variación lineal e inversa, para determinar las formas de variación de cada una; por lo tanto para las relaciones de variación lineal los estudiantes expresan que *"teniendo en cuenta las relaciones entre las variables de la misma naturaleza, distancias o pesos, la relación entre ellas será la misma teniendo en cuenta la ley del equilibrio, es decir d2 siempre aumenta el doble de d1, porque los pesos tienen la misma relación", "la distancia d2 depende de la distancia d1 y siempre aumentan manteniendo la relación del doble"*. Para las relaciones de variación inversa los estudiantes expresan que; *"Como p2 siempre será 6 dividido la distancia, cada vez va ha ser más pequeño mientras que la distancia siempre va a aumentar"*, en este sentido reconocer la relación de dependencia entre las variables y la manera como se producen los cambio de una con respecto a la otra permite empezar a establecer relaciones funcionales y reconocer los tipos de variación presentes en las situaciones.

5.1.4. ***Síntesis:*** *Estudio de las transformaciones.*

Explicita acciones de comprensión como:

- Uso de gráficas para representar la relación entre variables y sus procesos de cambio
- La relación entre las representaciones matemáticas tabular, simbólica y gráfica de la función.

La *Tabla 5* muestra las frecuencias y porcentajes de los estudiantes que hacen uso de representaciones gráficas y establecen relaciones entre las representaciones matemáticas que modelan las situaciones de variación.

Actos de Comprensión	*Balanza*		*Máquina Hidráulica*	
	Cant. Estudiantes	***%***	**Cant. Estudiantes**	***%***
Uso de representaciones gráficas	36	82	38	86
Relación entre las representaciones matemáticas	23	52	40	91

Tabla 5. *Frecuencias del Estudio de las Transformaciones*

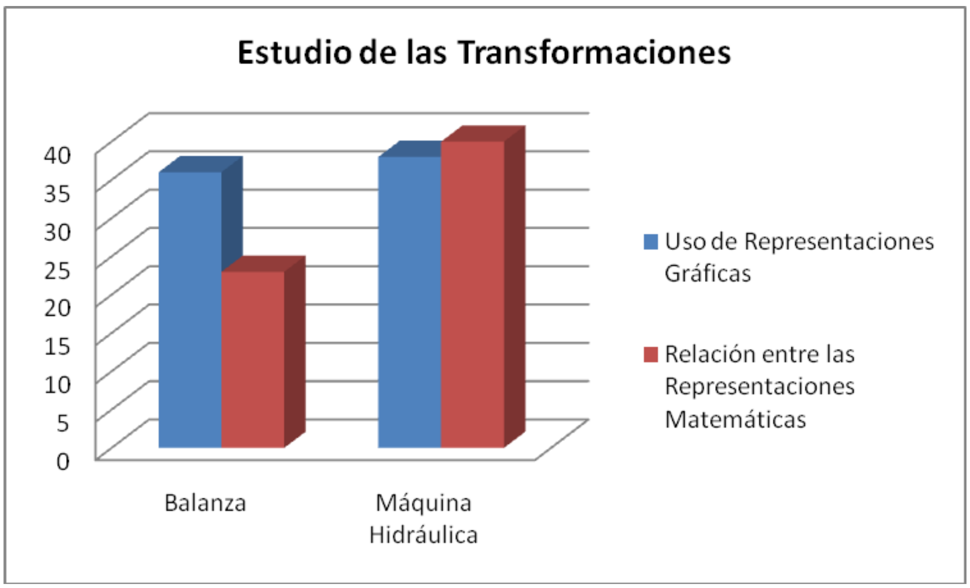


Gráfico 5. *Frecuencias del Estudio de las Transformaciones*

El uso de las representaciones matemáticas para el estudio de las situaciones de variación se ha convertido en una necesidad en la exploración de las mismas, en la medida que cobra sentido para el estudiante la expresión y organización de las relaciones encontradas en sus exploraciones, es por eso que el uso de las representaciones gráficas se pretende dar como una necesidad de mostrar sin hacer uso de los números las relaciones de dependencia entre las variables y los cambios que se producen para determinar las relaciones de compensación para los pesos y las presiones.

Es por eso que se construyó un instrumento –*Grafibala*- para la **balanza** desde el cual se hacen exploraciones de las relaciones geométricas entre los pesos y las distancias vistas como segmentos en la relación directa e inversa. Es así como el 82% de los estudiantes acuden a generar gráficos donde relaciones magnitudes a través de segmentos para modelar sus relaciones de dependencia y sus cambios, por lo cual las representaciones en la balanza son representaciones bajo la relación de dependencia de tipo geométrico y otras en el plano cartesiano. El 52% de los estudiantes establecen las relaciones entre las representaciones, tabular, simbólica y gráfica del equilibrio vistas como las formas de modelar el equilibrio en la balanza, es de aclarar que la relación entre las representaciones gráficas y simbólicas no están dadas por el proceso de tabulación de la expresión para determinar su representación en el plano, esta relación está dada por la necesidad del uso de una a partir de la otra, las representaciones gráficas construidas en la balanza se dan a partir del análisis de las relaciones geométricas entre los segmentos que representan los pesos y las distancias.

De acuerdo a las exploraciones con la balanza, en la máquina hidráulica no se hizo el estudio de representaciones geométricas para las magnitudes, las exploraciones que se dieron fueron a partir de las relaciones simbólicas por lo cual las representaciones gráficas construidas por el 86% de los estudiantes fueron dadas en el plano cartesiano a partir de las relaciones entre la representación tabular y simbólica, el 91% de los estudiantes establecen relaciones entre las representaciones tabular, simbólica y gráfica que modelan la compensación entre las presiones y que permiten la descripción de las relaciones de dependencia entre las variables.

5.2. LAS REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS EN EL ESTUDIO DE SITUACIONES DE VARIACIÓN

Gráfico 6*. Frecuencias del uso de Representaciones Matemáticas en el Estudio de Situaciones de Variación*

Los sistemas de representación que modelan situaciones de variación, permiten la interpretación y el análisis de las relaciones de dependencia entre las variables y los procesos de cambio, dichas representaciones son: verbal, pictórica, tabular, simbólica y gráfica, la comprensión de una situación de variación dependerá de las relaciones que se establezcan entre las diferentes ellas.

El MEN (2004) establece como formas de representación cualitativa para el estudio de situaciones de variación, los *enunciados verbales o escritos y la representación pictórica* y como formas de representación cuantitativa *la representación geométrica, tabular, simbólica y gráfica.* Por lo tanto frente a las acciones de comprensión de la función en el estudio de las situaciones de variación, se presenta un análisis de las representaciones matemáticas usadas por los estudiantes.

Durante el estudio de las situaciones de variación por medio de la resolución de problemas, se evidencia la presencia de las representaciones como una necesidad de expresión de las relaciones que los estudiantes construían iniciando con representaciones a nivel cualitativo y posteriormente a nivel cuantitativo.

5.2.1. **Identificación:** La identificación de las magnitudes variables y **Discriminación:** Las relaciones entre las magnitudes variables.

El 100% de los estudiantes usan las representaciones verbales para expresar los fenómenos de variación presentes en la *balanza y la máquina hidráulica*, la identificación de las magnitudes variables y sus relaciones, así como las predicciones de los fenómenos de cambio en cada situación. En la *balanza* el 100% de los estudiantes hace uso de representaciones pictóricas como un medio para mostrar los estados de equilibrio o desequilibrio en la balanza y las relaciones entre las variables de acuerdo a las transformaciones y exploraciones con el instrumento. Los dibujos y los gráficos son un medio de representación que muestran otra forma en que el estudiante se acerca a la variación, pueden ser concretos y mostrar lo que sucede en diferentes momentos de la variación, acompañados de explicaciones verbales. En la máquina hidráulica no se hacen presentes este tipo de representaciones pictóricas, por el diseño y forma de la misma por lo cual los estudiantes solo acuden a las representaciones verbales. Los análisis en estos dos momentos únicamente se dan por el tratamiento de relaciones cualitativas entre las variables.

5.2.2. **Generalización:** El control de las variaciones.

El estudio de relaciones extensivas, donde los estudiantes empiezan a hacer cuantificaciones de las variables, para estudiar las relaciones de dependencia entre las variables, surge de la necesidad del 100% de los estudiantes de organizar los datos encontrados a partir de las exploraciones en los instrumentos para la búsqueda del equilibrio en la *balanza* y de la igualdad en la presiones de la *máquina hidráulica*. La representación tabular permite el estudio de patrones de regularidad numérica y la relación de dependencia entre las variables, los cuáles permiten encontrar expresiones simbólicas que expresan la dependencia entre las variables con la posibilidad de ampliar el conjunto numérico, desde el análisis del universo numérico que puede abordarse desde el contexto de la situación.

El 83% de los estudiantes construyen una representación simbólica a partir de procesos de generalización en la búsqueda de regularidades numéricas descritas desde estudio de las representaciones tabulares a partir de las relaciones multiplicativas para la explicación del equilibrio en la balanza y las relaciones en la igualdad de presiones en la máquina hidráulica. La representación simbólica expresa las relaciones de dependencia entre las variables explicitando un patrón de variación.

Estas representaciones están acompañadas por la representación verbal que comunica los procesos de resolución de problemas, donde el 100% de los estudiantes hace uso de esta representación frente a los estudios de la balanza y la máquina hidráulica, que permite conocer las conclusiones que se deducen de sus observaciones y análisis, así como expresan la lectura de otro tipo de representaciones que surgen en el estudio de cantidades extensivas para determinar las relaciones de variación de carácter cuantitativo.

5.2.3. **Síntesis:** El estudio de las transformaciones.

El estudio de las transformaciones para las dos situaciones de variación presenta una gran diferencia en el uso de las representaciones matemáticas ya que este estudio se generó desde dos perspectivas diferentes. Para la ***balanza***, las transformaciones en las relaciones de dependencia entre las variables se da a partir de estudios de tipo geométrico, donde las magnitudes son representadas por segmentos y se visualizan sus relaciones de dependencia así como los cambios en la relación. El instrumento diseñando para esta actividad pretende establecer las relaciones proporcionales entre las magnitudes, que desde la herramienta "compás" se logra establecer relacione entre las longitudes de los segmentos para las distancias y los pesos *"la distancia aumenta al* *doble y el peso disminuye a la mitad"*, permitiendo establecer relaciones generales frente a los cambios de cada magnitud, en tanto desde la posibilidad de animación de los objetos geométricos las relaciones se mantienen *"no interesa si se aumenta la distancia o el peso, siempre la balanza seguirá equilibrada, la relación entre los segmentos será la misma y lo podemos comprobar con el compás", "la conclusión es que cuando la distancia aumenta en x veces, el peso disminuye en las mismas x partes", "la distancia aumenta las mismas veces que el peso disminuye", "dependiendo de la cantidad en que aumente la distancia el peso disminuye en igual proporción"* . En este sentido las comparaciones se centran en las transformaciones que se suceden en cada espacio de medida, para luego establecer correspondencias entre estas transformaciones, es decir, las transformaciones en un espacio de medida producen transformaciones en el otro, es así como el 82 % de los estudiantes acuden a representaciones gráficas para establecer las relaciones proporcionales entre las magnitudes y su relación de dependencia.

Representaciones gráficas en el estudio de las transformaciones.

La *Tabla 6*, muestra las frecuencias y los porcentajes de los estudiantes en el uso de las representaciones gráficas para la balanza y la máquina hidráulica en el estudio de las transformaciones en las relaciones de dependencia entre las variables.

Representaciones Gráficas	*Balanza*		*Máquina Hidráulica*	
	Cant. Estudiantes	**%**	**Cant. Estudiantes**	**%**
Representación Gráfica en el plano	14	32	38	86
Representación Geométrica	22	50	0	0
Ausencia de representación gráfica	8	18	6	14

***Tabla 6**. Frecuencias del uso de Representaciones Gráficas*

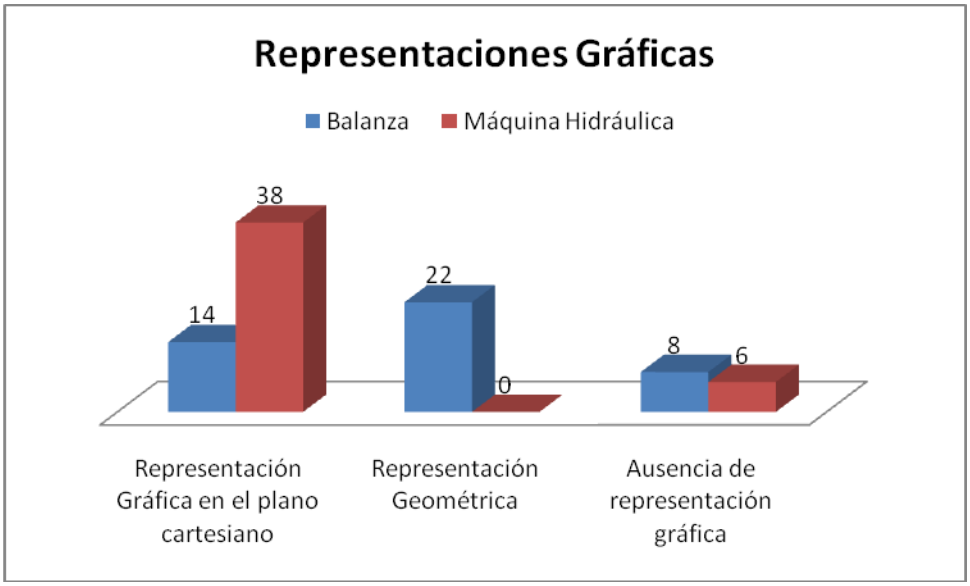
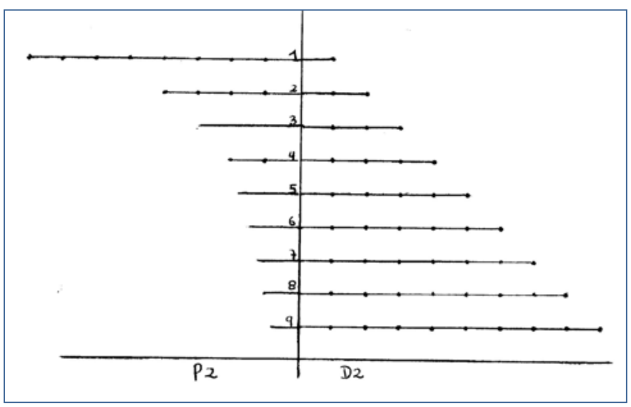


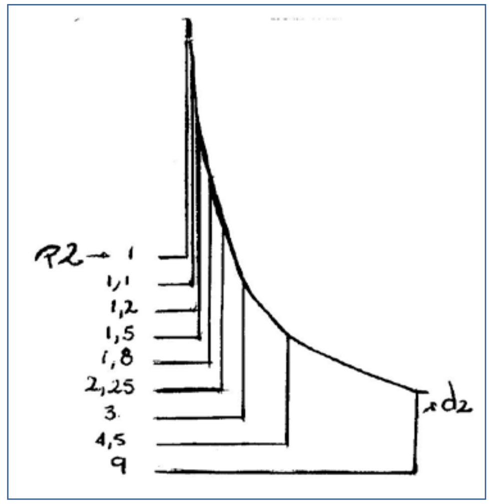
Gráfico 7*. Frecuencias del uso de Representaciones Gráficas*

Para la balanza el 50% no recurren explícitamente al plano cartesiano, optan por representaciones geométricas, que mantengan una relación entre los pares de segmentos correspondientes, permitiendo observar las relaciones de proporcionalidad entre estos; *"Organizamos los datos en una gráfica de comparación porque permite visualizar la relación que existe ya que a medida que aumenta p2 disminuye d2".*



En comparación a la utilización del plano cartesiano, estas disposiciones pretenden explicitar las variaciones de las magnitudes y mantienen visualmente las transformaciones para el peso y la distancia. Para ellos construyen un patrón de medida geométrico desde el cual tranza los segmentos correspondientes a la distancia *d2*.

Estas disposiciones mantienen visibles las variaciones de una magnitud con respeto a las variaciones de la otra, es decir, no se trata de seguir el trazo de una magnitud, por el contrario es posible poner en relación dos trazos de distintas magnitudes que en su relación explican un fenómeno de cambio.



En otros casos, las organizaciones propuestas establecen la correspondencia entre segmentos a través del establecimiento de una relación geométrica, así disponen los segmentos de tal manera que su correspondencia la evidencie una relación de perpendicularidad.

El establecimiento de las correspondencias entre los segmentos de manera horizontal, se traslada a un establecimiento de las mismas correspondencias desde la articulación de lo horizontal y lo vertical, así los segmentos que refieren distancias se ubican de manera vertical en relación a los pesos que se ubican de manera horizontal o viceversa, escoltado por su respectiva medida, además ésta disposición permite visualizar los segmentos relacionados, que por el contrario sucede con disposiciones donde los segmentos correspondientes se aíslan unos de los otros conservando un orden. En esta construcción, los segmentos que representan los pesos están determinados por la longitud de cada uno, es decir: *"…el primer peso tiene 9 unidades, el segundo peso es la mitad del primero, el tercer peso es la tercera parte del primero, el cuarto peso es la cuarta parte del primero y así con los demás hasta el noveno que es la novena parte del primero, el cual tiene una unidad".* En este sentido, en tal disposición sólo se hace visible la variación de los pesos, perdiendo en gran medida la visualización de la variación de las distancias, semejante a lo que sucede con la representación en el plano cartesiano.

Para las representaciones gráficas en el plano cartesiano de la *balanza*, usadas por el 32% de los estudiantes, las cuales están directamente relacionadas con las representaciones tabulares donde el 27% de los estudiantes presentando diversas cantidades de medida para los pesos y distancias que expresan la relación inversa desde la representación simbólica $p_2 = \frac{6}{d_2}$ usada por el 50% de los estudiantes basada en la relación de equilibrio $p_1 \times d_1 = p_2 \times d_2$, generando así las representaciones de la relación de dependencia entre las variables en el plano cartesiano.

Las representaciones usadas en el estudio de las transformaciones para la máquina hidráulica, permiten evidenciar sus relaciones en tanto cada una depende de los elementos de variación que permiten evidenciar alrededor de las relaciones de dependencia que se modelas a través de ellas. Es por eso que dicho estudio se basa en las relaciones numéricas de los patrones de tipo multiplicativo para determinar las relaciones entre las variables por medio de las representaciones tabulares donde el 100% de los estudiantes muestran algunas cantidades para los pesos y las áreas que generen igualdad en las presiones para la relación de *"1 a 3"* a partir de la cual reconocen la infinitud de posibilidades para determinar la compensación en las presiones siempre y cuando mantengan las misma relación entre ellas y es a partir de la identificación del patrón de variación que el 86% los estudiantes construyen la generalización de la relación de dependencia entre las variables por medio de expresiones simbólicas validadas por la relación $\frac{F1}{A1} = \frac{F2}{A2}$. La construcción de gráficas en el plano cartesiano del 86% de los estudiantes está directamente relacionada con los datos de la representación tabular en la organización de la relación para la compensación de las presiones, es así como a partir de dichas representaciones se puede establecer una visión global de las relaciones de dependencia y el control en los cambio de una situación de variación.

5.3. USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

El proyecto de incorporación de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas promovido por el MEN desde el año 2001, busca instaurar estrategias de enseñanza mediadas por calculadoras gráficas o software educativos que permitan la manipulación de los objetos matemáticos por medio de sus representaciones. Todo aprendizaje está mediado por instrumentos, y el aprendizaje de las matemáticas está mediado por sus representaciones, es así como se reconoce en dichas herramientas la posibilidad de exploración de nuevas formas de representación, manipulación y visualización de los objetos matemáticos y sus transformaciones que traen consigo las representaciones algebraicas, tabulares, geométricas, numéricas y gráficas ejecutables permitiendo la observación, exploración, simulación y modelación de situaciones de variación y cambio a partir de la interacción entre dichos sistemas de representación.

Es así como debe reconocerse el papel de la mediación de dichas herramientas para el aprendizaje de las matemáticas cuando las exploraciones a la misma permiten generar procesos cognitivos de indagación, interpretación, deducción, generalización y análisis de las relaciones entre las representaciones que modelan situaciones de variación, por lo cual dicho proceso no puede estar dado por la enseñanza en el manejo de la herramienta, este conocimiento puede adquirirse progresivamente desde su uso en los procesos de resolución de problemas.

Esta investigación plantea el papel mediador de las herramientas tecnológicas como ambientes posibilitadores en la construcción de contextos matemáticos o hipotéticos de fenómenos de otras ciencias modelados por las representaciones de los objetos matemáticos y que desde la propuesta de resolución de problemas de *Charnay* (1994), producen cambios en las concepciones del papel del docente, el estudiante y del conocimiento construido. El docente como constructor de los contextos para la resolución de problemas en la herramienta, los cuales se transforman en instrumentos de mediación tecnológica que permiten la exploración y generación de ambientes que problematizan el estudio de las matemáticas. Dichos contextos pueden generarse a partir del estudio de las transformaciones de los sistemas de representación para la modelación de variaciones presentes en una situación, así como en el marco de esta investigación se propone desde el software *Cabri Géométre,* construir contextos geométricos de fenómenos de la naturaleza que permitan el estudio de las variaciones presentes para el desarrollo del pensamiento variacional promoviendo procesos de modelación en la identificación de las magnitudes, de las regularidades de los procesos de cambio, el control de las variaciones por medio de la generalización de patrones numéricos, el estudio de las transformaciones a partir de las representaciones gráficas y la relación entre las representaciones que permiten observar y controlar los procesos de variación en situación.

Por lo tanto, en los procesos de mediación del aprendizaje, el conocimiento construido depende del instrumento de mediación por lo cual se debe reconocer que las posibilidades de la dinamización, transformación y visualización de los objetos matemáticos desde sus representaciones, promueven acciones de verificación y generalización para conjeturas y construir modelos de variación en el estudio de situaciones problemas.

6. CONCLUSIONES

Este trabajo de investigación es un aporte para la educación matemática frente a la manera como se instaura la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, como un camino para el desarrollo del pensamiento variacional en el reconocimiento de las acciones de comprensión de la noción de función de estudiantes de educación básica, así como establece el papel mediador de las herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza.

Por lo tanto los resultados de esta investigación permiten afirmar que:

6.1. PRIMER OBJETIVO

La resolución de problemas en matemáticas propone por parte del docente la construcción o disposición de situaciones que se conviertan en ambientes generadores y problematizadores del estudio de las matemáticas, es así como desde el reconocimiento del papel mediador de los instrumentos tecnológicos se construyen dos situaciones en el *software cabri*, las cuales modelan dos fenómenos de la naturaleza como son: *la compensación de los pesos y de las presiones,* que permiten el estudio de la función por medio de la variación lineal e inversa, reconociendo la función como una herramienta del conocimiento para vincular la identificación de patrones de variación, predecir y controlar el cambio en una situación.

El estudio de dichas situaciones favorece procesos de pensamiento variacional desde el estudio sistemático de los cambios, desde la interpretación, identificación, análisis y generalización de las relaciones de variación modeladas por medio del uso de los sistemas de representación matemática.

6.2. SEGUNDO OBJETIVO

La implementación de la secuencia didáctica para el estudio de situaciones de variación desde la estrategia de resolución de problemas permitió las desfragmentación de la enseñanza de los conceptos matemáticos, ya que a partir de la problematización del estudio de la función por medio de los ambientes construidos: *La Balanza Virtual y La Máquina Hidráulica,* se promueve el estudio de las variaciones por medio de las acciones de comprensión de la noción de función según Sierpinska (*1992)* y el reconocimiento del desarrollo de la noción desde los estudios históricos de Ruiz (*1998*), para el uso de las representaciones matemáticas de los modelos de variación que construyen los estudiantes frente a la explicación de los procesos de cambio, la identificación de las magnitudes variables, sus relaciones y procesos de generalización para el estudio de las transformaciones presentes en cada situación.

6.3. TERCER OBJETIVO

Los procesos de resolución de problemas de los estudiantes descritos en la investigación permitieron reconocer las acciones de comprensión en los estudios de los procesos de cambio en cada situación, determinando que; dichas exploraciones para la identificación de las magnitudes variables y la relación entre ellas están dadas por medio de las relaciones cualitativas que explican los fenómenos de variación lo cual permite el reconocimiento de las variables, a partir de los cuales los estudiantes formulan hipótesis de la relación entre las variables para lograr las compensaciones entre los pesos y las presiones.

El control de las magnitudes y el estudio de las transformaciones son acciones que se dan a partir de estudio a nivel cuantitativo que permite la identificación de patrones de variación numérica por medio de las representaciones tabulares, explicitando relaciones multiplicativas entre las variables, que explican y determinan el control de los cambios en la situación para así establecer las leyes de compensación de los pesos y las presiones, que posteriormente son modeladas por medio de los procesos de generalización de los patrones numéricos y de la representación gráfica para la relación de dependencia entre las variables, las cuales permiten al estudiante el control de las variaciones de tal manera que por medio de sus representaciones puede evidenciar y controlar la compensación en las variables para cada situación. Es así como se evidencia la presencia de las representaciones matemáticas como instrumentos de mediación para la explicación de los fenómenos de variación y que surgen a partir de la necesidad en los estudios cualitativos y cuantitativos de la variación.

6.4. CUARTO OBJETIVO

El estudio de situaciones de cambio modeladas por la función por medio de la resolución de problemas, promovió procesos de pensamiento variacional en la identificación de las magnitudes, de las regularidades en los cambios, el control de las variaciones por medio de la generalización de patrones numéricos, el estudio de las transformaciones a partir de las representaciones gráficas y la relación entre las representaciones que permiten observar y controlar los procesos de variación en situación desde modelos de función lineal y función inversa, a partir los procesos de resolución de los estudiantes de las acciones generativas de ambientes problemáticos en el planteamiento de hipótesis, validación e institucionalización del conocimiento.

7. PERSPECTIVAS

- ✓ Esta investigación es un aporte para la educación matemática frente al desarrollo del pensamiento variacional privilegiando los procesos de modelación matemática, donde se caracterizan las acciones de comprensión de la noción de función *(Sierpinska, 1992)* desde la resolución de problemas mediada por la geometría dinámica.
- ✓ Incorporar secuencias didácticas del estudio de situaciones de variación con diferentes modelos matemáticos, por medio de la resolución de problemas, mediadas por herramientas tecnológicas por parte de los educadores en matemáticas.
- ✓ Promover investigaciones que permitan caracterizar los procesos de comprensión de los estudiantes de las nociones matemáticas para el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la resolución de problemas con la mediación de herramientas tecnológicas.

BIBLIOGRAFÍA

BÖHM, Josef. (2001). *Dale un Giro*. España: T^3 EUROPE.

CASTIBLANCO, Ana Cecilia. (2005). *Impacto de las nuevas tecnologías en la educación básica y media.* Memorias XVI Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y IV Encuentro de Aritmética. Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional.

CHARNAY, Roland. (1994). *Aprender (por medio de) la Resolución de Problemas, Capitulo III.* Didáctica de las Matemáticas. Buenos Aires: Paidos.

CRUZ O., Valentín. (1998). *Familias de Funciones: Gráficas y Expresiones Algebraicas.* México: Iberoamericana.

DEBNEY, B. (1971). *Creative Problem-solving, Interests in Arts and Science*. Unpublisher M. Ed: Thesis, University of Birmingham.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Universidad del Valle: Meter Lang.

FUENTES, Johanna & **PEREZ**, Edgar. (2004). *La Modelación Matemática Mediada por una Herramienta Tecnológica.* En: Matemática educativa: fundamentos de la matemática universitaria II. Bogotá: Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

GARCÍA, G., **SERRANO,** C., **ESPITIA,** L. (2000). *Hacia la noción de función como dependencia y patrones de la función lineal*. Bogotá: Conciencias, Universidad Pedagógica Nacional.

GARRET, R. (1988). Resolución *de problemas y creatividad: Implicaciones para el currículo de ciencias*. España: Enseñanza de las Ciencias. Vol. 6(3).

GÓMEZ, P., **CARULLA,** C., **MESA,** V., **VALERO,** D., **GÓMEZ,** C. (1999). *Situaciones Problemáticas de Precálculo.* Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

KAPUT, James. *Moving around on jerky elevators. Understanding Step-Wise Varying Rates, Signed Numbers and Units.* In: SimCalc Technologies, LLC. 2001.

KIERAN, C. (1994). *El Aprendizaje y la Enseñanza del Álgebra Escolar.* (Vilma María Mesa, Trad.). Bogotá: Una Empresa Docente.

MAYER*,* Richard. (1986). *Pensamiento, Resolución de Problemas y Cognición*. España: Paidós.

MCKERNAN, J. (1999). *Investigación-acción y vital*. Madrid: Editorial Morata.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

__________________. (1999). *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

__________________. (2001). *Seminario Nacional de Formación de Docentes, Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas.* Bogotá: Enlace Editores LTDA.

__________________.(2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Bogotá: Enlace Editores LTDA.

MOCKUS, Antanas. (1988). *Representar y Disponer*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

OVIEDO, Paulo Emilio. (2004). *La Resolución de Problemas como Actividad de Investigación. Una Perspectiva de desarrollo pedagógico*. Bogotá: Itinerario Educativo N° 43 - 44.

PEREZ SERRANO, G. (1994). *Investigación cualitativa*. Retos e interrogantes. II. Técnicas y análisis de datos. Madrid. La Muralla.

PIAGET, Jean., **INHELDER**, B. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente: Ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales.* Buenos Aires: Paidos.

POLYA, G. (2002). *Como plantear y Resolver Problemas*. Serie de Matemáticas. México: Ed. Trillas.

POMES, J. (1991). *La metodología de resolución de problemas y el desarrollo cognitivo: Un punto de vista postpiagetiano*. España: Revista enseñanza de las ciencias. Vol. 9(1).

POZO, Juan., **DEL PUY**, María., **DOMINGUEZ,** Jesus., **GÓMEZ**, Miguel., **POSTIGO**, Yolanda. (1999). *La Solución de Problemas.* España: Santillana.

QUERALT LLOPIS, Tomas. (2001). *Un enfoque constructivista en el aprendizaje de las matemáticas con las calculadoras gráficas.* España: T^3 EUROPE.

ROMERO, J., **CASTILLO,** E. (2001). *La Resolución de problemas y la metodología de clase*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

RUIZ HIGUERAS, Luisa. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Madrid: Universidad de Jaén. Colección Juan Pérez de Moya.

SANTOS TRIGO, L. (2002). *Problematizar el estudio de las matemáticas: un aspecto esencial en la organización del currículum y en el aprendizaje de los estudiantes*. Memorias Seminario Nacional: Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá: MEN.

SIERPINSKA, Anna. (1992). *Un Understanding the notion of function*. In G. Harel y E. Dubinsky. The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy. USA: Mathematical Association of America.

VASCO, Carlos E. (2000). En: *Formarse para la enseñanza de las matemáticas*. Colombia: Universidad del Valle.

VERGNAUD*,* G. (1990). *Teoría de los campos conceptuales.* In: Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol. 16.

WERTSCH, J. (1999). *La Mente en Acción*. Argentina: Aique.