

1-1-2005

## **Aproximación cognitiva al desarrollo del pensamiento probabilístico en estudiantes de media vocacional**

Julian Correa Restepo  
*Universidad de La Salle, Bogotá*

Reny González Vargas  
*Universidad de La Salle, Bogotá*

Doris Malaver Quiroga  
*Universidad de La Salle, Bogotá*

Follow this and additional works at: [https://ciencia.lasalle.edu.co/maest\\_docencia](https://ciencia.lasalle.edu.co/maest_docencia)

---

### **Citación recomendada**

Correa Restepo, J., González Vargas, R., & Malaver Quiroga, D. (2005). Aproximación cognitiva al desarrollo del pensamiento probabilístico en estudiantes de media vocacional. Retrieved from [https://ciencia.lasalle.edu.co/maest\\_docencia/128](https://ciencia.lasalle.edu.co/maest_docencia/128)

This Tesis de maestría is brought to you for free and open access by the Facultad de Ciencias de la Educación at Ciencia Unisalle. It has been accepted for inclusion in Maestría en Docencia by an authorized administrator of Ciencia Unisalle. For more information, please contact [ciencia@lasalle.edu.co](mailto:ciencia@lasalle.edu.co).

**APROXIMACION COGNITIVA AL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO  
PROBABILISTICO EN ESTUDIANTES DE MEDIA VOCACIONAL**

**Presentado por:**

**Julián Correa Restrepo  
Reny González Vargas  
Doris Malaver Quiroga**

**UNIVERSIDAD DE LA SALLE  
DIVISIÓN DE FORMACIÓN AVANZADA  
MAESTRÍA EN DOCENCIA**

**Bogotá D.C.**

**2004**

**APROXIMACION COGNITIVA AL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO  
PROBABILISTICO EN ESTUDIANTES DE MEDIA VOCACIONAL**

**Presentado por:**

**Julián Correa Restrepo.  
Reny González Vargas  
Doris Malaver Quiroga**

**Trabajo de grado para obtener el titulo de Magíster en Docencia**

**Asesores:  
JAIME PARRA  
HELENA MARULANDA**

**UNIVERSIDAD DE LA SALLE  
DIVISIÓN DE FORMACIÓN AVANZADA  
MAESTRÍA EN DOCENCIA**

**Bogotá D.C.  
2004**

## CONTENIDO

### INTRODUCCION

1	PROBLEMA Y OBJETIVOS	11
	1.1. PROBLEMA	11
	1.2. JUSTIFICACION	11
	1.3. OBJETIVOS	13
	1.3.1. OBJETIVO GENERAL	13
	1.3.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS	13
2	MARCO TEORICO	15
	2.1 ANTECEDENTES	15
	2.2 LOS HEURISTICOS Y SUS SESGOS ASOCIADOS	26
	2.2.1. EL HEURÍSTICO DE REPRESENTATIVIDAD	30
	2.2.1.2. INSENSIBILIDAD AL TAMAÑO DE LA MUESTRA.	31
	2.2.1.3. INSENSIBILIDAD A LAS PROBABILIDADES A PRIORI.	35
	2.2.1.4. INSENSIBILIDAD A LA CAPACIDAD PREDICTIVA DEL DATO	40
	2.2.1.5. FALACIA DE LA CONJUNCIÓN.	42
	2.2.2. HEURISTICO DE ACCESIBILIDAD.	43
	2.2.2.1. EL SESGO EGOCENTRICO.	45
	2.2.2.2. EL SESGO DEL EFECTO DE	

	LA EXPLICACIÓN.	45
	2.2.3. LA HEURÍSTICA DE DISPONIBILIDAD.	45
	2.2.4. HEURISTICO DE AJUSTE Y ANCLAJE.	47
	2.2.5. OTROS SEGOS EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO	49
	2.2.5.1. EL SESGO DE EQUIPROBABILIDAD.	49
	2.2.5.2 ERRORES SOBRE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL	49
3	METODOLOGIA.	52
	3.1. TIPO DE ESTUDIO	52
	3.2. DISEÑO METODOLOGICO	52
	3.3 POBLACION.	53
	3.4. INSTRUMENTO.	53
	3.5 PROCESO.	56
	3.5.1 FASES	
	3.5.1.1. ESTUDIO PILOTO.	56
	3.5.1.2. DESARROLLO.	58
	3.6 ANALISIS E INTERPRETACION DE RESULTADOS.	63
	3.6.1. ANALISIS CUANTITATIVO.	63
	3.6.1.1. DISTRIBUCIONES DE LAS RESPUESTAS.	77
	3.6.1.2. DIFERENCIA EN LOS DOS GRUPOS DE ESTUDIANTES.	79

3.6.1.3.	ERRORES DETECTADOS.	79
3.6.1.4.	ANÁLISIS DE ARGUMENTOS.	81
3.6.2.	ANALISIS CUALITATIVO.	90
3.7.	IMPLICACIONES EDUCATIVAS PARA MINIMIZAR LOS ERRORES Y SEGOS EN LOS JUICIOS PROBABILÍSTICOS Y CONTRIBUIR A DESARROLLAR EL PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO.	95
3.7.1.	IMPORTANCIA DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN ADOLESCENTES	95
3.7.1.1.	CONTEXTUALIZACIÓN.	97
3.7.1.2.	ANALISIS DE PROCESO.	98
3.7.1.3.	SITUACIONES SIGNIFICATIVAS.	100
3.7.1.4.	ZONA DE DESARROLLO PROXIMO.	102
3.7.1.5.	CON AMIGOS SE APRENDE MEJOR.	104
3.7.1.6.	TRABAJO EN EQUIPO.	104
3.7.1.7.	VARIEDAD DE CONTEXTOS.	106
3.7.1.8.	SITUACIONES COTIDIANAS.	107
3.7.1.9.	FORMACIÓN DE DOCENTES.	109
3.7.1.10.	INCLUSIÓN EN EL CURRÍCULO.	110
4	CONCLUSIONES.	113
	BLOGRAFIA.	117

## ANEXOS

ANEXO No. 1 CUESTIONARIO	126
ANEXO No. 2 CUESTIONARIO FINAL	130
ANEXO No. 3 ARGUMENTOS	134
ANEXO Nº 4 (MEDIO MAGNETICO)	

## INDICE DE TABLAS

		<b>PAG.</b>
TABLA 1	EVALUACION DE SEMEJANZA Y PROBABILIDAD DE TOM W.	33
TABLA 2	PORCENTAJE DE RESPUESTAS DE LA PRUEBA PILOTO	50
TABLA 3	COLEGIOS DISTRITALES DIFERENCIADOS POR GENERO Y CURSO	52
TABLA 4	PORCENTAJE DE RESPUESTAS DE LA PREGUNTA 1	57
TABLA 5	ARGUMENTOS DADOS POR LOS ESTUDIANTES A LA PREGUNTA 1	59
TABLA 6	PORCENTAJE DE RESPUESTAS DE LA PREGUNTA 2	60
TABLA 7	ARGUMENTOS DADOS POR LOS ESTUDIANTES A LA PREGUNTA 2.	61
TABLA 8	PORCENTAJE DE RESPUESTAS DE LA PREGUNTA 3	62
TABLA 9	ARGUMENTOS DADOS POR LOS ESTUDIANTES A LA PREGUNTA 2.	63
TABLA 10	PORCENTAJE DE RESPUESTAS DE LA PREGUNTA 4	64
TABLA 11	ARGUMENTOS DADOS POR LOS ESTUDIANTES A LA PREGUNTA 4	65
TABLA 12	PORCENTAJE DE RESPUESTAS DE LA PREGUNTA 5	66
TABLA 13	ARGUMENTOS DADOS POR LOS ESTUDIANTES A LA PREGUNTA 5	67
TABLA 14	PORCENTAJE DE RESPUESTAS DE LA PREGUNTA 6	68
TABLA 15	PORCENTAJE DE RESPUESTAS DE LA PREGUNTA 7	68
TABLA 16	PORCENTAJE DE RESPUESTAS DE LA PREGUNTA 8	69
TABLA 17	PORCENTAJE DE RESPUESTAS DE LOS DOS GRUPOS DE ESTUDIANTES	70
TABLA 18	PORCENTAJE DE RESPUESTAS DE LOS DOS GRUPOS DE ESTUDIANTES Y CONTRASTE CHI CUADRADO	70
TABLA 19	PORCENTAJE DE ARGUMENTOS DADOS A LAS REPUESTAS 1 Y 2	72
TABLA 20	PORCENTAJE DE ARGUMENTOS DADOS A LAS REPUESTAS 3 Y 4	79



TABLA 21	PORCENTAJE DE ARGUMENTOS DADOS A LAS REPUESTA 5	81
TABLA 22	EJERCICIO DE PROBABILIDAD	91

## INTRODUCCION

Esta investigación ha sido realizada para optar por el título de Magíster en Docencia, en la Universidad de la Salle. El tema que se estudió en este trabajo de grado es el análisis de los heurísticos de representatividad, disponibilidad y ajuste y anclaje; con sus sesgos asociados: insensibilidad al tamaño de la muestra, insensibilidad a la probabilidades a priori, insensibilidad predictiva del dato, falacia de la conjunción, equiprobabilidad y probabilidad condicional; con el fin de plantear las implicaciones educativas que contribuyen al desarrollo del pensamiento probabilístico en estudiantes de los grados octavos y undécimo de los colegios públicos de la localidad quince del distrito capital.

Para la comprensión de los procesos cognitivos implementados a la hora de asumir posiciones ante situaciones aleatorias y las condiciones implicadas en la formación de la conducta inferencial, es fundamental enseñar de manera explícita el efecto del tamaño de la muestra, la estabilidad y oscilación de las frecuencias relativas, la independencia de sucesos y la capacidad de enumeración sistemática; máxime cuando investigadores como Simón (1983)<sup>1</sup>, proponen que las personas construyen un modelo simplificado del mundo. No todo individuo en el momento de tomar una decisión realiza un proceso exhaustivo en el que contempla todas las alternativas posibles y luego de sopesarlas y analizarlas inclinarse por la más probable, respetando todas las condiciones de la probabilidad.

A la vista de estos planteamientos iniciales, esta investigación se orientó a identificar los sesgos que se presentaron en los juicios probabilísticos, de los estudiantes de grados octavo y undécimo. Además, se clasificaron las respuestas dadas para explicar cómo las mismas son atribuidas a un tipo de

---

<sup>1</sup> SIMON, H. A.. "A behavioral model of rational choice". Quarterly Journal of Economics 1955., Págs. 69, 99 - 118.

sesgo particular; se compararon los resultados de varios numerales sobre el mismo estudiante, así como la justificación que este dio de sus repuestas. Por otro lado, estudiamos la posible interrelación de estos errores, ya que una independencia estadística de los mismos indicaría que las implicaciones educativas que se derivan de esta investigación, debería hacer un énfasis diferenciado en la enseñanza para minimizar estos errores. Por último, realizamos un estudio comparativo entre las respuestas dadas por los estudiantes de los dos niveles muestreados.

Los heurísticos, se definen aquí como estrategias mentales basados en la experiencia, que se utilizan en forma espontánea para resolver problemas específicos, sin que necesariamente se llegue a la verdad, como sucede en los algoritmos que conducen a una respuesta verdadera. Por lo cual los heurísticos se asumen como ciertas reglas “de andar por casa”, que nos permiten dar respuesta simples y aproximativas –explícitas o implícitas, conscientes o inconscientes- para resolver mejor determinada clase de problemas, con bajo costo cognitivo.<sup>2</sup>

Los heurísticos son entendidos como mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos con la complejidad de estímulos ambientales. Es decir, son principios generales que reducen tareas complejas a juicios simples. En el análisis del razonamiento probabilístico, un juicio de este tipo (heurístico) sería un procedimiento que nos llevaría de forma inmediata a la solución del problema.

En un primer momento el documento aborda los antecedentes, en donde se hace un recorrido de los principales autores que abordan el tema del desarrollo del pensamiento probabilístico a nivel mundial. En un segundo momento se encuentra el referente conceptual que contiene los diferentes conceptos de los heurísticos de representatividad, disponibilidad y ajuste y anclaje; con sus sesgos asociados: insensibilidad al tamaño de la muestra, insensibilidad a las probabilidades a priori, insensibilidad predictiva del dato, falacia de la conjunción, equiprobabilidad y probabilidad condicional. En el tercer momento, se hace referencia al diseño metodológico que da cuenta del procedimiento que se llevo a cabo para la realización del estudio. Por

---

<sup>2</sup> PIATTELLI PALMARINI MÁXIMO. “Los túneles de la mente ¿Qué se esconde tras nuestros errores?”. Editorial Grijalbo. Mondadori. Barcelona. 1995. Pág. 31.

último, se presenta al análisis y resultados arrojados por la investigación; así como las conclusiones y recomendaciones.

El trabajo hace énfasis en situaciones de exploración e interpretación del carácter aleatorio de algunos juicios probabilísticos ante situaciones estocásticas, realizando el análisis de las mismas a la luz de la teoría de los heurísticos. Para nuestra investigación tuvimos en cuenta: **el heurístico de la representatividad** con sus sesgos asociados: insensibilidad al tamaño de la muestra, insensibilidad a las probabilidades a priori, insensibilidad a la capacidad predictiva del dato, falacia de la conjunción; **heurística de disponibilidad**, y **el heurístico de ajuste y anclaje**, otros errores cognitivos que están enmarcados en el sesgo de la equiprobabilidad, y el enfoque en el resultado aislado.

## **1. PROBLEMA Y OBJETIVOS**

### **1.1. PROBLEMA**

El interés excesivo que la escuela ha puesto en la racionalidad y la competencia ha distraído la atención de tópicos que son tanto o más importantes en el proceso de formación de un individuo. En Colombia existe un vacío de conocimiento respecto a la forma como los estudiantes plantean sus estrategias cuando intentan resolver problemas no determinísticos.

Este tema que ha sido abordado en profundidad por investigadores españoles como Batanero, Cádizales y Godino<sup>3</sup>, estadounidenses como Kahneman y Tversky, quien han realizando planteamientos importantes para la comprensión del desarrollo del pensamiento probabilístico, lleva a la pregunta de investigación: ¿Cuáles son los heurísticos presentes en nuestros estudiantes al momento de resolver problemas de tipo estocástico y cuales son los sesgos asociados a los mismos?, específicamente ¿cuáles son los errores que en realidad se podrían atribuir a las heurísticas de la representatividad, disponibilidad y ajuste-anclaje?

### **1.2. JUSTIFICACION**

En la vida cotidiana el pensamiento probabilístico va a permitir a los estudiantes organizar su conocimiento sobre el mundo, construir categorías sobre la realidad y utilizar estrategias en la resolución de problemas y en la toma de decisiones. La capacidad intelectual influye en otros ámbitos de vida con repercusiones importantes en lo afectivo y lo social; es así como el desarrollo de este tipo de pensamiento posibilita la flexibilización y ampliación de estrategias, todo esto a partir de la comprensión de cómo los estudiantes de octavo y undécimo grado de los colegios distritales de la localidad quince del Distrito capital con edades comprendidas entre 11 y 19

---

<sup>3</sup> GODINO J. D. y BATANERO, C. "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos" Tomado de Recherches en Didactiques des Mathématiques, 1987. Vol. 14 Págs. 325-355

años, resuelven los problemas o realizan una tarea de probabilidad y cómo reflexionan y argumentan sus resultados.

Resulta evidente la necesidad de los docentes de profundizar en las capacidades cognitivas, específicamente de razonamiento y argumentación en la toma de decisiones, a través conceptos estadísticos tales como las operaciones combinatorias, la capacidad de enumeración sistemática, la independencia de los sucesos y los procesos de convergencia estocástica, los cuales abren grandes perspectivas en el desarrollo del pensamiento probabilístico, al reducir el uso de los sesgos asociados a los heurístico.

El propósito de esta investigación es lograr que a partir del análisis de los sesgos: insensibilidad al tamaño de la muestra, insensibilidad a la probabilidades a priori, insensibilidad predictiva del dato, falacia de la conjunción, equiprobabilidad y probabilidad condicional asociados a los heurísticos de representatividad, disponibilidad y ajuste y anclaje, en los estudiantes de nivel básico (grado octavo) y de la media vocacional (grado un décimo) de la localidad 15 de Bogotá, derivar implicaciones educativas que contribuyan al desarrollo del pensamiento probabilístico de este grupo poblacional, posibilitando el conocimiento, comprensión y aplicación de los conceptos y propiedades estadísticas anteriormente citados.

Esta investigación combina elementos cuantitativos y cualitativos, por lo que esta en un punto intermedio entre ambos paradigmas de investigación (Shulman, 1989).<sup>4</sup> Por un lado, las principales variables de interés son de tipo cualitativo, ya que el fin principal de la investigación es interpretativo (Kirk y Miller, 1986),<sup>5</sup> (Denzin y Lincoln, 1994)<sup>6</sup>. El interés, se centra más por los componentes cualitativos de los significados personales que los alumnos de la muestra asignan a las situaciones estocásticas planteadas y a los objetos matemáticos que derivan de ella.

---

<sup>4</sup> SHULMAN, L. S. "Paradigmas y Programas de investigación en la enseñanza. Una perspectiva contemporánea". En M. C. Wittrock (Ed), La investigación de la enseñanza. Editorial Pidos. Barcelona. 1989. v. 1, Págs. 9 – 92.

<sup>5</sup> KIRK, J. y MILLER, M. L. "Reliability and validity in qualitative research". London: 1986. Pág. 140.

<sup>6</sup> DENZIN, N. K. y LINCOLN, Y. S. "Handbook of qualitative research methods". London: 1994. Págs. 182 -190.

Con este trabajo investigativo se pretende aportar al vacío de conocimiento que actualmente hay en nuestro país, respecto a la formación del pensamiento probabilísticos y específicamente de los heurísticos y sus sesgos asociados, interés que a nivel mundial lleva más de dos décadas, iniciándose con los trabajos de Kahneman y Tversky<sup>7</sup>, en los años ochenta.

### **1.3. OBJETIVOS**

#### **1.3.1 OBJETIVO GENERAL:**

Analizar la utilización de los heurísticos, así como la incidencia de sus sesgos asociados<sup>8</sup> y derivar las implicaciones educativas para el desarrollo del pensamiento probabilístico en estudiantes de los grados octavos y undécimo de los colegios públicos de la localidad quince del distrito capital.

#### **1.3.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS**

1.3.2.1 Reconocer e identificar los heurísticos que con mayor frecuencia presentan los estudiantes de los grados octavo y undécimo en el momento de lanzar un juicio probabilístico ante una situación de naturaleza aleatoria.

1.3.2.2. Analizar si hay diferencias en la incidencia de los sesgos asociados a los heurísticos, entre los grados octavo y undécimo, en el proceso de solución de un problema de tipo estocástico.

1.3.2.3. Analizar la incidencia que los sesgos asociados a los heurísticos tienen en los errores cometidos por los estudiantes al momento de asignar probabilidades a un evento.

---

<sup>7</sup> KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. (Eds.). "Judgment under uncertainty: heuristics and biases". Cambridge. 1982. Cambridge University Press. Pág 340 – 390.

<sup>8</sup> Los sesgos análisis de estudio de nuestra investigación son: insensibilidad predictiva del dato, falacia de la conjunción, equiprobabilidad y probabilidad condicional asociados a los heurísticos de representatividad, disponibilidad y ajuste y anclaje.

1.3.2.4. Derivar implicaciones educativas que contribuyan a minimizar los sesgos asociados a los heurísticos que más comúnmente se presentan en los estudiantes, al lanzar un juicio probabilístico ante una situación aleatoria.

1.3.2.5 Determinar a partir del modelo normativo propio de la probabilidad, si un juicio probabilístico se ajusta a los valores predichos por el Teorema de Bayes, y en caso contrario cuales son los sesgos que se ajustan a dicho razonamiento.

## 2. MARCO TEORICO

### 2.1. ANTECEDENTES

Al analizar las diferentes teorías cognitivas e indagar sobre las tendencias más recientes acerca de la enseñanza de la matemática, podemos ver que éstas están basadas en una visión actual de la filosofía de la matemática que la considera como una construcción humana fruto de la necesidad de resolver

problemas en campos externo o internos a ella; que los objetos matemáticos (conceptos, teoremas, algoritmos, etc.) no son eternos e inmutables; que sus objetos son consecuencia de un proceso de negociación social y están sujetos a la evolución.<sup>9</sup>

Los conceptos matemáticos pueden ayudar a comprender e interpretar el desarrollo cognitivo de los individuos, tal como lo postulan Jean Piaget, María Inhelder<sup>10</sup> y Jerome Bruner, entre otros, el aprendizaje de dichos conceptos es un proceso gradual, que se construye a partir de la experiencia, sobre todo en los adolescentes y los niños. La investigación sobre la comprensión de los estudiantes acerca de la probabilidad es más amplia que la investigación sobre estadística y su enfoque se centra en el azar en general. Se han creado dos líneas distintas de investigación sobre la comprensión en probabilidad. Una de ellas se ha centrado en el nivel escolar (Piaget e Inhelder<sup>11</sup>, 1951; Fischbein<sup>12</sup>, 1975; Green<sup>13</sup>, 1983; entre otros) y la otra en estudiantes universitarios y adultos (por ejemplo, Konold<sup>14</sup>, 1989; Tversky y Kahneman<sup>15</sup>, 1982, Carmen Batanero y Godino<sup>16</sup> 1995).

<sup>9</sup> PIAGET J. Artículo: Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En compilación de Maillo Adolfo y Aizpun Alberto. "La enseñanza de las matemáticas". Editorial Aguilar. Madrid. 1963. Pág.8.

<sup>10</sup> INHELDER, B. Y PIAGET, J. De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Editorial Paidós. Barcelona 1955. Págs. 15 –84.

<sup>11</sup> *Ibíd.*

<sup>12</sup> FISCHBEIN, E. "The intuitive sources of probability thinking in children". Dordrecht: Reidel 1975. Págs. 120 – 195.

<sup>13</sup> GREEN, D. R. "School pupils' probability concept. Teaching Statistics, No 5 febrero(2), 1983. Págs. 34-42

<sup>14</sup> KONOLD, C. "Informal conceptions of probability". En, Cognition and Instruction, 1989. Págs. 6, 59 – 98.

<sup>15</sup> TVERSKY, A. Y KAHNEMAN, D. "Judgments of and by representativeness". En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky 1982, Judgement under uncertainty: heuristics and biases Págs. 84 - 100 Cambrige: Cambrige University Press.



Ahora bien, si la finalidad de la educación es promover el desarrollo del individuo, es claro que el tipo de aprendizaje más importante es el de la resolución de problemas en los ámbitos escolar, familiar y social, que le exigen al estudiante tomar decisiones, en las cuales los heurísticos tienen un papel relevante y el desconocimiento de las propiedades estadísticas (el tamaño de la muestra, y la independencia de los eventos) conducen a soluciones incorrectas, lo cual requieren por parte del docente y la comunidad educativa en general, comprender y asumir la importancia del rol de la escuela en la minimización de los sesgos asociados a los heurísticos, para en realidad cumplir con el fin de la educación.

Así, se recomienda poner a los alumnos en situaciones de exploración y descubrimiento del carácter aleatorio de algunas experiencias y la comparación de probabilidades sencillas. La metodología que se puede pensar como la más recomendada está basada en la experimentación y simulación de experimentos aleatorios, el registro de los resultados obtenidos y el estudio de las propiedades de las frecuencias relativas de los sucesos asociados a los experimentos reales o simulados. Investigadores como Fischbein y Gazit (1984)<sup>17</sup>, Fischbein (1991)<sup>18</sup>, Kahneman (1982)<sup>19</sup>, plantean que esta metodología ayudará a superar las dificultades y obstáculos, sobre el desarrollo de la intuición estocástica.

No obstante, toda secuencia de resultados obtenidos en la repetición sucesiva de un mismo experimento un número dado de veces, que

---

<sup>16</sup> BATANERO, C. y GODINO, J. D. "The use of multivariate methods to analyze students' stochastic conceptions". Proceedings of the IV International Conference on 1994.

<sup>17</sup> FISCHBEIN, E. Y GAZIT, A. "The combinatorial solving capacity in children and adolescents". Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1988. Págs. 5, 193 - 198.

<sup>18</sup> FISCHBEIN, E., NELLO, M. S. Y MARINO, M. S. "Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents". Educational Studies in Mathematics 1991. Págs. 22, 523 - 549.

<sup>19</sup> Opcit.

representa al fenómeno simulado, es en realidad una realización o trayectoria de un proceso estocástico en tiempo discreto. Estos procesos se caracterizan por dos aspectos: 1) La variabilidad local e imprevisibilidad de su comportamiento, que debe estimarse en términos probabilísticos. Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda y la probabilidad de obtener cara en el quinto lanzamiento, en seis repeticiones consecutivas. Se espera que el estudiante realice un inventario exhaustivo del espacio muestral de dicho experimento y a partir de la comprensión de la independencia de cada una de las repeticiones, dé la respuesta. 2) La regularidad global manifestada por la convergencia o estabilidad de las frecuencias, es decir en el ejemplo anterior, además de lo planteado, el estudiante debe tener claro que la probabilidad siempre que se lanza una moneda es del 50%.

El segundo de estos aspectos se comprende intuitivamente, especialmente en aquellos casos en que las probabilidades teóricas pueden también ser calculadas mediante las propiedades de simetría de los sucesos elementales o mediante razonamientos de tipo geométrico. Esta regularidad global (que se pone de manifiesto cuando un experimento de tipo aleatorio se repite una gran cantidad de veces) es reforzada habitualmente en la enseñanza elemental, especialmente apoyada en la experimentación y simulación, por ejemplo en actividades lúdicas basadas en la repetición, como el parqués, cartas, monopolio y en general los juegos de mesa.

Para el desarrollo del pensamiento probabilístico es necesario entender que la variabilidad de los procesos estocásticos, (aleatorios, probabilísticos o no determinísticos) produce resultados experimentales contraintuitivos, (entendido este como el resultado que supera la inmediatez y la experiencia propia para dar respuestas teniendo en cuenta la teoría normativa de la probabilidad) que podrían ser mostrados y dar lugar a la discusión de los mismos con ocasión de la realización de esas mismas experiencias. Esto se justifica por cuanto la regularidad no necesariamente se pone de manifiesto en un número pequeño de repeticiones, (insensibilidad al tamaño de la muestra), sino en un número muy grande de repeticiones.

El aspecto descrito en el párrafo anterior ha sido descuidado en la enseñanza de la probabilidad y posiblemente tenga repercusión en la persistencia de sesgos en el razonamiento probabilístico, aún después de una instrucción sobre el tema, lo cual ha sido descrito por diferentes

investigadores (Fischbein, 1975<sup>20</sup>; Kahneman, 1982<sup>21</sup>; Shaughnessy, 1992<sup>22</sup>). Estos autores plantean que para reducir el sesgo de la insensibilidad al tamaño de la muestra, en los espacios académicos se deberían realizar experimentos con muestras representativas que permitan vivenciar el proceso de convergencia al parámetro poblacional. Las simulaciones de probabilidades son una forma útil de ayudar a los estudiantes a cambiar sus intuiciones sobre los eventos de azar. Sin embargo, el lanzamiento de dados y monedas puede resultar algo lento y desordenado, y puede ocultar los patrones fundamentales que se presentan a la larga.<sup>23</sup> Alan (2000) proporciona ejemplos de simulaciones de probabilidad en una hoja electrónica, con los que se pueden superar estas dificultades.

En cualquiera de los niveles, los estudiantes parecen tener dificultades en el proceso de solución de problemas de tipo aleatorio, al menos por tres razones: En primer lugar, muchos estudiantes tienen una dificultad subyacente con los conceptos de número fraccionario y razonamiento proporcional, necesarios para el cálculo, expresión e interpretación de las probabilidades (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983). Valoraciones realizadas sobre los Resultados de la Evaluación de Competencias Básicas en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias Naturales en su sexta aplicación al calendario A por la Alcaldía Mayor de Bogotá (a través de la Secretaria de Educación) a los grados séptimo y noveno del ciclo básico, indican que los estudiantes difícilmente implementaban estrategias de solución que involucren el concepto de número racional y presentan dificultades con conceptos básicos que incluían fracciones, decimales y porcentajes.<sup>24</sup> En segundo lugar, con frecuencia las ideas probabilísticas entran en conflicto con las experiencias de los estudiantes y su visión de la realidad (Kapadia,

---

<sup>20</sup> FISCHBEIN, E. "The intuitive sources of probability thinking in children". Dordrecht: Reidel 1975. Págs. 120 – 195.

<sup>21</sup> KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. "Judgment under uncertainty: heuristics and biases. Cambridge": Cambridge University Press, Editions. 1982.

<sup>22</sup> SHAUGHNESSY, J. M. "Research in probability and statistics: reflections and directions". En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, 1992. London: MacMillan. Págs. 465 - 494.

<sup>23</sup> Graham Alan. Probabilidad, intuición y una hoja electrónica. Centre for Mathematics Education. University England. 2000.

<sup>24</sup> Bogoya Maldonado Daniel. Vinent Solsona Manuel. Resultados. Evaluación de competencias básicas en Lenguaje, Matemática y ciencias Naturales. Sexta aplicación. Calendario A. Alcaldía mayor Bogotá. D.C: Secretaría de Educación. Octubre 2001. pág. 75.

1985<sup>25</sup>). Lo anterior por cuanto los docentes de matemáticas y ciencias asumen una visión determinística de la realidad, buscando respuestas únicas a los problemas planteados en el aula, y el estudiante se enfrenta a un mundo real que es probabilístico y por lo tanto tiene variedad de respuestas correctas a un mismo problema. en la solución de problemas, Finalmente, muchos estudiantes han desarrollado ya una aversión a la probabilidad, debido a que la han tenido que estudiar de una forma demasiado abstracta y formal. Por esta razón, Freudenthal (1972)<sup>26</sup> previno contra la enseñanza de cualquier técnica de estadística matemática, incluso a nivel de inicio en la universidad.

Los primeros trabajos sobre la adquisición y evolución de los conceptos de probabilidad fueron realizados por Piaget e Inhelder a comienzos de la década de los cincuenta. Estos autores estudiaron la influencia que tienen los

esquemas combinatorios en la formación de los conceptos de azar y probabilidad. Para ellos, una escasa capacidad de razonamiento combinatorio

reduce notablemente la aplicabilidad del concepto de probabilidad, en el sentido clásico de Laplace. Relacionan el concepto de permutaciones con el de mezcla aleatoria que fundamenta la idea de azar en el niño y la predicción de resultados al realizar múltiples veces un experimento aleatorio con la construcción de las combinaciones. Describen el desarrollo psicogenético de las operaciones combinatorias en los distintos estadios de desarrollo a partir de las observaciones y entrevistas a niños, proponiéndoles tareas combinatorias con materiales concretos. Sus experimentos han probado que el niño de preescolar sólo puede hacer algunas combinaciones, permutaciones y variaciones de una manera empírica, y no intentan encontrar un método para realizar un inventario exhaustivo de todos los posibles resultados de un experimento estocástico conocido como espacio muestral. Por ejemplo, puede formar parejas de objetos entre sí, pero nunca de una forma completa y siempre con pocos elementos.

Piaget e Inhelder (1951), en la introducción a su libro *La Genése de L'idée de Hasard Chez L'enfant* afirma que las nociones de azar y de probabilidad

---

<sup>25</sup> KAPADIA, R. "Didactical phenomenology of probability". En R. Davidson y J. Swift Ediciones, Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics, 1986. Págs. 260 - 264. University of Victoria.

<sup>26</sup> FREUDENTHAL, H. "The empirical law of large numbers" or "The stability of frequencties". Educational Studies in Mathematics, 1972. Págs. 4, 484 - 490.

son conceptos derivados y secundarios que surgen de la búsqueda por parte del niño del orden y sus causas. Postulan que además del desarrollo físico para el aprendizaje es necesaria la experiencia adquirida en forma activa, para la solución de situaciones problemáticas. “El conocimiento es construido activamente por parte del sujeto y no recibido pasivamente del entorno”<sup>27</sup> El sujeto trata de adaptarse al mundo que lo rodea y cuando una idea nueva se presenta sobre otra ya existente se crea un “conflicto cognitivo” o “desequilibrio” con su estado mental previo, que se resuelve mediante un proceso de “equilibración” (asimilación y acomodación). Mediante la asimilación el niño acepta la nueva idea y mediante la acomodación toda su estructura cognitiva se modifica para adaptarse al nuevo conocimiento.

En las investigaciones de Piaget e Inhelder (1951)<sup>28</sup>, sobre el desarrollo espontáneo en los niños de la comprensión de la convergencia estocástica, tratan de ver si éstos perciben la regularidad progresiva que aparece en la disposición de unos granos de arena que caen a través de un pequeño orificio (en un reloj de arena). Estos autores consideran que para predecir la distribución final es preciso captar la simetría de las trayectorias posibles de los granos que caen por el orificio, la equivalencia entre las partes simétricas, la dispersión y el papel de la repetición del experimento en la regularidad final que produce una distribución en forma de campana (distribución normal). Esta comprensión se produce en la etapa de las operaciones formales cuando el individuo adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar inventarios de todas las permutaciones posibles, variaciones y combinaciones de un conjunto dado de elementos. Por tanto, es también en este momento en el que tiene lugar la comprensión por parte del niño de las citadas operaciones combinatorias.<sup>29</sup>

Distintos tipos de estudios posteriores ponen en duda esta postura. Algunos de estos estudios (Hoeman y Ross, 1975<sup>30</sup>) sostienen que los sujetos adolescentes y adultos no realizan combinaciones en sus juicios de probabilidad ni utilizan una estrategia proporcional para resolver

---

<sup>27</sup> Piaget, J. E Inhelder, B. La enése de L'idée de Hasard Chez L'enfant. Presses Universtarie de France. Paris 1990, Pág. 1.

<sup>28</sup> Ibid.

<sup>29</sup> INHELDER, B. Y PIAGET, J. De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Editorial Paidós. Barcelona 1955. P 15 –84.

<sup>30</sup> HOEMANN, H. W. y ROSS, B. M. “Children's concepts of chance and probability”. En Brainerd (Ed.), Children's logical and mathematical cognition, 1982. Págs. 93 -121. Berlín: Springer Verlag

problemas cotidianos. Estos resultados sugieren que incluso cuando tenemos disponible estrategias para resolver un problema no las utilizamos debidamente.<sup>31</sup>

Otras opiniones sobre la concepción del origen y evolución de las nociones de azar y de probabilidad a las que plantea la Escuela de Ginebra, están dadas por los trabajos sobre el aprendizaje probabilístico en situaciones de detección de contingencias, realizada por Fischbein<sup>32</sup> y sus colaboradores. Estos autores constituyeron uno de los primeros puentes de unión entre la psicología y la educación matemática. Muestran un marcado interés no solo por la formación de los conceptos formales, sino por la aparición de intuiciones parciales sobre los conceptos probabilísticos y estadísticos además de los efectos de la instrucción. Sus investigaciones apoyan decididamente la conveniencia de adelantar la educación probabilística desde el ciclo básico para los niños y también muestran que sin instrucción es difícil que se desarrolle un razonamiento estocástico adecuado, incluso una vez alcanzada la etapa de las operaciones formales.

Fischbein plantea que la intuición y el razonamiento nos hablan de la misma realidad, aun cuando superficialmente sus mecanismos y sus códigos sean diferentes.<sup>33</sup> Así, la intuición está ligada a la acción y posee rasgos cognitivos susceptibles de ser traducidos en términos de símbolos. Estas intuiciones se pueden dividir en dos tipos: las primarias, entendidas como adquisiciones cognitivas que se derivan directamente de la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. Las intuiciones secundarias surgen tras un proceso sistemático de instrucción que permite al individuo superar las primeras adquisiciones cognitivas. Las intuiciones matemáticas o científicas entrarían dentro de esta categoría.

Fischbein afirma que el estudio de la formación del concepto de probabilidad es particularmente importante para estudiar las intuiciones. Mientras que

---

<sup>31</sup> HOEMAN, H.W. y ROSS, B.M. Children's concept of chance and probability. En Brainerd, Logica y materiales de cognición para niños. Springer Verlag Berlin 1982. P 93-121.

<sup>32</sup> FISCHBEIN, E. The intuitive sources of probabilistic thinking in childreht: reifel. En Seminario sobre "Recursos para el aprendizaje en el aula de matemáticas". Granada 1998 p 20-23.

<sup>33</sup> FISCHBEIN, E. "The intuitive sources of probabilistic thinking in childreht: reifel". En Seminario sobre "Recursos para el aprendizaje en el aula de matemáticas". Granada 1998. Págs. 0-23.

nuestra conducta es probabilística por naturaleza, ya que nos debemos adaptar a lo accidental, lo incierto y lo posible, los procesos de enseñanza se han centrado básicamente en procesos determinísticos. Las teorías de la probabilidad solo forman parte de las que este autor ha denominado intuiciones secundarias y que aparecen después de periodos sistemáticos de instrucción.

En este marco aparece una intuición primaria anticipadora, que constituye un punto de vista global sobre la solución del problema. Para él, ésta es una intuición preoperacional en el sentido de que se forma antes del estadio operacional del pensamiento y actúa independientemente de cualquier tipo de razonamiento.

Fischbein llega a la conclusión de que las intuiciones primarias sobre la probabilidad están presentes en niños de preescolar y que tales intuiciones, además, dependen de la experiencia y están sujetas también al desarrollo operativo del sujeto. Entonces, a pesar de que las intuiciones primarias puedan transformarse en intuiciones secundarias, no dan lugar a un concepto operativo de la probabilidad sin una instrucción específica sobre las reglas del cálculo de la probabilidad y de las ideas básicas de esta teoría.

Otra alternativa a la teoría evolutiva de Piaget es el análisis de las tareas y de la demanda cognitiva que exigen a los sujetos. La base de este enfoque se encuentra en gran medida en los trabajos de autores neopiguetanos como Case (1979,81 y 85); Pascual-Leone (1970,78 y 80) y en los trabajos de valoración de reglas de Siegler (1990)

Scardamalia (1977) encontró resultados que parecen indicar que los niños en la etapa de las operaciones concretas pueden resolver problemas combinatorios siempre que estos no excedan su capacidad de procesamiento de la información.

Este hallazgo parece indicar que las operaciones formales no son un requisito para la utilización de la combinatoria.<sup>34</sup> Por otra parte, Ross y

---

<sup>34</sup> SCARDAMALIA, M. "Information processing capacity and the problem of horizontal décalage: A demonstration using combinatorial reasoning tasks. Child Development" 1977. Págs. 28 – 37.

Hoeman (1955)<sup>35</sup> y Fischbein y Gazit (1984)<sup>36</sup> mostraron que el adolescente en el periodo de las operaciones formales, rara vez utiliza las estrategias combinatorias para resolver problemas de probabilidad. Estos resultados parecen contraponerse a las predicciones de Piaget e Inhelder, y son fundamentales porque permiten comprender la importancia de los prerrequisitos cognitivos, desligados de la etapa evolutiva; es decir, que el desarrollo del pensamiento probabilístico es factible en etapas anteriores al denominado por Piaget como operaciones formales e incluso antes de las operaciones concretas.

Simón 1962<sup>37</sup>; Newell y Simón 1972,<sup>38</sup> plantean que un aspecto fundamental en el estudio de las estrategias intelectuales, es entender la mismas como un conjunto de estructuras ejecutivas y que cada estrategia requiere una determinada cantidad de espacio en el almacén de la memoria a corto plazo. La capacidad de este almacén varía en función de la edad del sujeto y esta ligada a su capacidad atencional.

Los resultados con tareas inherentes al concepto de proporción son semejantes a los descritos anteriormente. Los estudios realizados en este campo aportan una estructura que permiten interpretar las diferencias evolutivas en tareas de proporción y de probabilidad en función de las demandas de la tarea y explica, la falta de relación entre diversas tareas escolares en los diferentes espacios académicos. Sin embargo, no permite, explicar la razón por la que los sujetos adultos no utilizan las reglas más avanzadas en la solución de problemas de proporción y probabilidad, ni dan cuenta de los errores cometidos en las tareas cotidianas, pareciera como si las explicaciones del aula no tuvieran impacto en la vida cotidiana de los individuos.

La mayoría de estudios indican que los estudiantes comienzan los cursos de probabilidad con intuiciones muy arraigadas, muchas de las cuales son incorrectas y constituyen un obstáculo para el aprendizaje probabilístico.

---

<sup>35</sup> ROSS, B. M. "Randomization of binary sequences". American Journal of Psychology, 1955. Págs. 68, 136 - 138.

<sup>36</sup> FISCHBEIN, E. Y GAZIT, A. "¿Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?" Educational Studies in Mathematics, 1984. No 15 (1). Págs. 1 - 24.

<sup>37</sup> SIMON, H. A. "A behavioral model of rational choice". Quarterly Journal of Economics, 1972. Págs. 69, 99 - 118.

<sup>38</sup> *Ibíd.*



“Estas intuiciones son muy difíciles de cambiar porque los sujetos pueden tener concepciones múltiples y a menudo contradictorias, de una misma situación particular”<sup>39</sup>. No obstante, no se debe olvidar que hay otros factores que influyen en la asimilación de los contenidos probabilísticos, como la madurez y la experiencia, tal como lo señala Jolliffe (1991).

El aumento significativo de adolescentes que tienen dificultad en tomar decisiones en su vida cotidiana, respecto a la elección vocacional o profesional, el sexo seguro, la presión de los pares para inducirlos al consumo de sustancias psicoactivas o en general a infringir normas, son hechos que demuestran precisamente la dificultad de cambiar en los estudiantes sus concepciones erróneas en la toma de decisiones y la importancia que estas tienen para su presente y futuro, lo que justifica que la educación de relevancia al desarrollo del pensamiento probabilístico. Si todos los seres humanos somos víctimas de ilusiones cognitivas, “es decir, ilusiones de saber, errores que cometemos sin darnos cuenta, con absoluta buena fe y que muchas veces nos obstinamos en justificar con vehemencia, convirtiendo nuestra razón en esclava de nuestra ilusión”<sup>40</sup>; entonces el sistema educativa debe dar cuenta de acciones explícitas para minimizar los sesgos asociados a los heurísticos. Para explicar este tipo de fenómenos son fundamentales los conceptos de heurístico y sesgo. El primero se refiere a las estrategias mentales utilizadas para resolver problemas específicos y el segundo, a los errores asociados a determinados heurísticos, cuando dichas estrategias son utilizadas en forma descontextualizada. Las ideas preconcebidas erróneas acerca de la probabilidad que muestran los alumnos sin formación previa no solo son atribuidas a la falta de formación matemática, según demuestran estudios de diversos psicólogos como Tversky y Kahneman<sup>41</sup>, sino que tienen un origen psicológico., el cual debe ser un objetivo de la educación, posibilitando así un proceso de formación integral en los estudiantes.

---

<sup>39</sup> KONOLD, C. “Issues in assesing conceptual understading in probability and statistis?”. *Journal of Statistics Educations*. Vol. 3 1995. Págs. 1-3.

<sup>40</sup> Piattelli Palmarini Máximo. “Los túneles de la mente ¿Qué se esconde tras nuestros errores?”. Editorial Grijalbo.Mondadori. Barcelona. 1995. Pág. 29.

<sup>41</sup> TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1971). “Belief in the law of small numbers”. *Psychological Bulletin*, 76, Págs. 105-110. Incluido en D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: heuristics and biases* Págs. 23 - 31. Cambridge: Cambridge University Press.

Los procedimientos heurísticos descubiertos por Tversky y Kahneman<sup>42</sup> son tres: Representatividad, disponibilidad y ajuste – anclaje los cuales están puestos de manifiesto en sus investigaciones. Explicando a partir de los sesgos asociados a estos heurísticos, las decisiones erróneas que los individuos toman ante situaciones de incertidumbre. Algunos de estos sesgos son sistemáticos y otros dependen de los patrones de las creencias previas individuales de los sujetos.

Entre las de tipo sistemático más estudiado se encuentran la heurística de la representatividad, que según estos autores consiste en que los individuos estiman la probabilidad de que el evento A pertenezca a la misma clase del evento B. Esta heurística es utilizada para “la evaluación del grado de correspondencia o similitud entre una muestra y una población, un ejemplar y una categoría, un acto y un actor o, más generalmente, un resultado y un modelo” (Tversky y Kahneman, 1983).

Otra heurística que se ha estudiado es la de disponibilidad la cual hace referencia a cómo en ocasiones la gente evalúa la probabilidad de un acontecimiento por la facilidad con que puede recuperar ejemplos del mismo “generalmente se evocan con más facilidad ejemplos de clases grandes que ejemplos de categorías menos frecuentes” (Tversky y Kahneman, 1974). El uso de este heurístico puede encubrir varios errores y esta relacionado con la falta de capacidad combinatoria.

Por último, en la heurística del ajuste y el anclaje, se toman decisiones a partir de un valor inicial al cual se le van haciendo ajustes hasta llegar a la respuesta final. El valor inicial o ajuste suele ser típicamente insuficiente y lleva a estimaciones diferentes que están sesgadas por los valores iniciales llevando a un ajuste erróneo.

---

<sup>42</sup> Opcid.

## 2.2. LOS HEURISTICOS Y SUS SESGOS ASOCIADOS

Los modelos normativos asumen que las personas asignan probabilidades a un suceso, basándose en la frecuencia relativa y en las probabilidades a priori, como establece la estadística Bayesiana, con la condición de que en todos los casos estas probabilidades cumplen los axiomas que establece la teoría de las probabilidades. Además, se considera que este procedimiento no sólo sirve como criterio con el que contrastar la precisión de los juicios humanos, sino que además describe la forma en la que realmente se llevan a cabo este tipo de procesos (Edwards, Lindman Savage, 1963)<sup>43</sup>. Sin embargo, los primeros intentos de comparar la conducta ideal especificada por el Teorema de Bayes y el rendimiento de las personas, ya apuntaba a que los sujetos no respetaban las condiciones necesarias para utilizar este teorema a la hora de emitir sus juicios acerca de la probabilidad de un suceso, puesto que se apreciaba una tendencia conservadora. Esta tendencia ponía de manifiesto que se integraba la información sobre el nuevo dato para producir una probabilidad “a posteriori” más cercana a las probabilidades “a priori” que las predichas por el Teorema de Bayes. Esto puede darse porque los sujetos parten de la información inicial de las probabilidades “a priori” ajustando el juicio hacia la nueva información recibida.

La evidencia experimental mostraba que los sujetos no utilizaban un razonamiento correcto desde el enfoque de la estadística Bayesiana y casi 30 años de investigación no han encontrado los resultados predichos por este tipo de teorías, incluso cuando se analizaba el razonamiento en sujetos expertos. Una vez más, estos resultados coinciden con los obtenidos en otras tareas de razonamiento en las que los modelos normativos no aparecen apoyados por los datos empíricos.

El pensamiento probabilístico históricamente ha sido desarrollado desde dos vertientes: la estadística matemática con la “probabilidades objetivas” y la psicológica con las heurísticas o “probabilidades subjetivas”, en la cual pueden distinguirse dos líneas, los investigadores “pesimistas” y los “optimistas”.

---

<sup>43</sup> SAVAGE, L. J. “The sure-thing principales”, en the foundations of statistics”, John Wiley & Sons, Nueva York, 1954. Págs 21 – 26.

Los “pesimistas” defienden que las decisiones y juicios bajo incertidumbre muestran a menudo errores serios y sistemáticos, debido a las características intrínsecas al sistema cognitivo humano. Los ataques más fuertes desde que Simón (1956)<sup>44</sup> propuso el concepto de “racionalidad limitada” han venido de las investigaciones de Tversky y Kahneman (1982)<sup>45</sup> y Nisbett y Ross (1980)<sup>46</sup>. Hay tres variantes en la explicación de estas violaciones: los sesgos asociados a los heurísticos, puestos de manifiesto en los juicios, descritos en los trabajos de Kahneman (1982); los errores representacionales, resultantes de la aplicación de mecanismos ligados a ilusiones perceptuales, que causan una deficiente percepción de los problemas de decisión y las deficiencias de tipo motivacional en la búsqueda y selección de la información.

Los investigadores “optimistas”, por su lado, defienden que los juicios y decisiones son altamente eficientes y funcionales, incluso en situaciones complejas. Entre otros, se ha aplicado el argumento de metarracionalidad, que, en esencia, postula que el comportamiento de decisión que viola los principios de racionalidad aparentemente puede ser perfectamente racional, si se tiene en cuenta el coste cognitivo de la toma racional de decisiones, frente a los posibles beneficios obtenidos en la aplicación de dichas estrategias. Por otro lado, otras explicaciones se basan en el comportamiento racional, dado que el individuo hace una interpretación del problema no acorde con el supuesto por el investigador.

Dentro de las anteriores corrientes, la que más implicaciones ha tenido en el campo de la investigación educativa es la referida al empleo de heurísticas con sus sesgos asociados, de acuerdo con los trabajos de Kahneman (1982)<sup>47</sup>, por las posibles implicaciones que esta teoría puede tener sobre la enseñanza. Desde nuestro punto de vista, otra interpretación muy diferente de algunos de los errores y sesgos asociados a la resolución

---

<sup>44</sup> SIMON, H. A. , “Rational choice and the structure of the environment”, *Psychological Review*, No 63, 1956. Págs. 129 – 138.

<sup>45</sup> TVERSKY, A. Y KAHNEMAN, D. “Judgments of and by representativeness”. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (1982), *Judgement under uncertainty: heuristics and biases* Págs. 84 - 100 Cambridge: Cambridge University Press.

<sup>46</sup> NISBETT, R. E. y ROSS, L. “Human inference: Strategies and shortcomings of social judgment”. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall 1980. Págs 65 -147.

<sup>47</sup> TVERSKY, A. Y KAHNEMAN, D. “Judgments of and by representativeness”. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (1982), *Judgement under uncertainty: heuristics and biases* Págs. 84 - 100 Cambridge: Cambridge University Press.

de problemas probabilísticos, es en términos de obstáculos epistemológicos o didácticos en el aprendizaje (Brousseau, 1983<sup>48</sup>).

A continuación exponemos un breve resumen de la primera de estas teorías siguiendo a Pérez Echeverría (1990)<sup>49</sup>. Esta autora indica que los trabajos recientes sobre la toma de decisiones se han basado en las teorías cognitivas y del procesamiento de la información. La utilización de heurísticas es característica de este modelo y se describen éstas como "mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos con la complejidad de estímulos ambientales"<sup>50</sup> (pág. 51). Es decir, son principios generales que reducen tareas complejas a juicios. En el análisis del razonamiento probabilístico, un juicio de este tipo (heurística) sería un procedimiento que nos llevaría en forma inmediata a la solución del problema. Se diferencian de los algoritmos en que son generalmente automáticas y se aplican de forma no reflexiva, sin considerar su adecuación al juicio a realizar, contrariamente al algoritmo que propone criterios concretos para su uso. Sería necesario recordar aquí la gran diversidad de estudios hechos sobre el término "heurística/o". Como señalan Groner. (1983)<sup>51</sup> hay una tendencia a emplear los términos heurística/o como etiqueta de moda para un gran número de significados diferentes que van desde "métodos imperfectos de solución" hasta "logros creativos". Estos autores analizan el uso de este término en Matemáticas, Psicología, Inteligencia Artificial y Toma de Decisiones.

En Matemáticas lo hacen partiendo de los comentarios a la obra de Euclides por Pappus de Alejandría y citando entre otros a diversos autores que trabajaron sobre el tema, como Descartes, Leibnitz, Bolzano, etc. Modernamente Polya (1982)<sup>52</sup> trata el término de heurística y en él se refiere

---

<sup>48</sup> BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques. No 4 ( 2). Págs.165 - 198.

<sup>49</sup> PEREZ ECHEVERRIA, M. P. "Psicología del razonamiento probabilístico". Madrid, 1990. Pág. 144.

<sup>50</sup> GONZALES L. MARÍA JOSÉ, Introducción a la psicología del pensamiento, Editorial Trotta, Madrid 1998, Pág. 331.

<sup>51</sup> GRONER, R., GRONER, M. y BISCHOF, W. M. "The role of heuristics in models of decision". En R. M. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* Amsterdam: North Holland, (1983). Págs. 87 - 108.

<sup>52</sup> POLYA, G. "¿Cómo plantear y resolver problemas". México: Trillas (1982). Págs. 137 – 185.

a la comprensión del método que conduce a la solución de problemas y, más concretamente, a las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Añade que la heurística se construye sobre una experiencia resultante de la solución de problemas y de la observación de los métodos por otras personas.

A la vista de estos hallazgos iniciales, se da un cambio en la orientación de la investigación del estudio de los juicios aleatorios, entre los cuales se enmarcan los trabajos de los psicólogos matemáticos Amos Tversky y Daniel Kahneman, quienes sostienen que las personas no analizan habitualmente los eventos cotidianos mediante listas exhaustivas de probabilidad, ni elaboran un pronóstico final que combine varios parámetros probabilísticos. Por el contrario, sugieren que en lugar de las leyes de la probabilidad bayesiana en la emisión de los juicios, utilizamos otro tipo de estrategias, “una especie de reglas de andar por casa” que implementamos de forma espontánea. A estas reglas de andar por casa las denominan heurísticos, ya que permiten simplificar la tarea de asignar probabilidades y la tarea de predecir, reduciendo ambas tareas a operaciones más simples.<sup>53</sup>

Su uso podría explicarse aludiendo de nuevo a restricciones cognitivas, tales como la limitación de la memoria a corto plazo, ya que raramente podemos tener en cuenta toda la información, por lo que la seleccionamos dependiendo del tipo de juicio a realizar y de la representatividad de dicha información.

En el ámbito académico la teoría expuesta por Daniel Kahneman, Slovic y Amos Tversky<sup>54</sup>, nos permite comprender que los errores que cometen los estudiantes no se deben necesariamente a la baja fundamentación matemática, sino al desconocimiento de ciertas propiedades estadísticas, que los inducen a asignar probabilidades incorrectas a eventos aleatorios. Además estos autores aportan una clasificación de las heurísticas utilizadas en las afirmaciones de tipo probabilísticos: representatividad, disponibilidad y ajuste y anclaje, heurísticos que se explicaran a continuación, con sus respectivos sesgos asociados.

---

<sup>53</sup> GONZALES L. MARÍA JOSÉ, “Introducción a la psicología del pensamiento”, Editorial Trotta, Madrid 1998, Pág. 329.

<sup>54</sup> KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. (Eds.). Judgment under uncertainty: heuristics and biases. Cambridge: Cambridge University Press 1982.

### 2.2.1 EL HEURÍSTICO DE REPRESENTATIVIDAD

La heurística de representatividad, descrita por Kahneman et al. (1982); Benz, (1982)<sup>55</sup>; Benz y Borovcnik, (1982a)<sup>56</sup> consiste en calcular la probabilidad de un suceso con base en la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene. Se puede enunciar de la siguiente manera: si A y B son dos eventos cualesquiera asociados con el espacio muestral S de un experimento E, este heurístico induce a evaluar la probabilidad de un suceso A por el grado en el que el suceso B es representativo del suceso A, es decir el grado en que A es semejante a B.

En primer lugar, se prescinde del tamaño de la muestra, y con ello del estudio de la variabilidad del muestreo, produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras. En segundo término, se supone que cada repetición del experimento, aunque sea limitada, ha de reproducir todas las características de la población. Por ejemplo, se espera que la frecuencia de una característica en la muestra coincida con la proporción de la misma en la población; por ello, tras una racha larga de aparición de un suceso se espera intuitivamente la aparición del suceso contrario, olvidando la independencia de los ensayos repetidos.

Se utiliza en problemas tales como ¿cuál es la probabilidad de que el objeto A pertenezca a la clase B? Por ejemplo, al enseñársele una fotografía a una serie de individuos, se les pregunta por la probabilidad de que el sujeto que aparece en esta fotografía sea Alemán, esta probabilidad estaría ligada a la tipicidad y prototipicidad del individuo que la asigna. Por tanto, el uso del heurístico consistiría en asignar la probabilidad de que la persona de la fotografía sea Alemán en función de su parecido con nuestro prototipo. A este tipo de juicio se les denomina juicios por representatividad. Sin embargo, la estrategia de basarse en la semejanza ignorando la información estadística, dará lugar a una serie de

<sup>55</sup> BENTZ, H. J. "Stochastic teaching based on common sense". En D. R. Grey y cols. (Eds.), Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics 1982. Págs. 753 - 765. University of Sheffield.

<sup>56</sup> BENTZ, H. J. y BOROVCNIK, M. "On representativeness: A fundamental strategy". En D. R. Grey y cols. (Eds.), Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics, 1982. Págs. 276 - 284. University of Sheffield

sesgos cognitivos, ya que los juicios se verán afectados por variables que influyen en la semejanza y no en las probabilidades y por el contrario, no se verán afectados por información irrelevante para la semejanza pero fundamental desde el punto de vista estadístico<sup>57</sup>, tales como: El tamaño de la muestra de la que se extraen los datos, las probabilidades a priori, la capacidad predictiva del nuevo dato, a partir de las cuales se estiman las probabilidades a posteriori (datos básicos en el teorema de Bayes).

El heurístico de representatividad tiene asociados una serie de sesgos, los cuales son:

#### **2.2.2.1. INSENSIBILIDAD AL TAMAÑO DE LA MUESTRA.**

Experimentos realizados por Tversky y Kahneman, ponen de manifiesto que la mayoría de los sujetos en el momento de lanzar sus juicios probabilísticos suelen ignorar el tamaño de la muestra, lo cual se hace evidente al momento de expresar que la frecuencia real se conserve aún con muy pocas repeticiones o ensayos. Esta típica ilusión cognitiva, de la que hoy se conocen muchos ejemplos, ha sido bautizada por Tversky y Kahneman con el nombre de “Ley de los números pequeños”. A diferencia del cálculo de probabilidades que se basa en la ley de los grandes números, nuestra intuición espera que se respete la “normal” alternancia de los resultados aleatorios en secuencias muy pequeñas. Este sesgo se conoce también como falacia o sofisma del jugador y consiste en creer que en una serie corta de acontecimientos puramente casuales, antes o después también tiene que restablecer el equilibrio de las alternancias entre cara y sello al 50% aproximadamente, en el caso del lanzamiento de una moneda. Como consecuencia de esta insensibilidad al tamaño de la muestra, estos autores afirman que las personas tienden a sacar conclusiones de un suceso, de un acontecimiento o de una característica a partir de muy pocas observaciones.

Teniendo en cuenta que la probabilidad de un suceso se define como su frecuencia relativa en un número suficientemente grande de ensayos, se considera que la probabilidad asignada será más cercana a la probabilidad real del suceso cuanto mayor sea el número de observaciones de las que partimos.

---

<sup>57</sup> Ibíd. Pág. 330.



Tomemos en cuenta una serie de problemas propuestos por estos investigadores a un grupo de individuos:

*Problema tipo 1.*

✦ *Una ciudad está atendida por dos hospitales. En el más grande nacen cada día alrededor de 45 niños, y en el más pequeño nacen unos 15 niños cada día. Como sabes alrededor del 50% de los nacidos son varones. Sin embargo el porcentaje exacto varía de unos días a otros. A veces es más alto del 50% y a veces es menor.*

*Durante un año cada hospital ha registrado los días en los que un 60% de los nacidos eran varones. ¿Qué hospital crees que ha registrado más días en lo que esto haya ocurrido? ¿Es posible que lo que es válido en el caso del 60% o más se radicalmente distinto cuando se llega 100% (todos los nacidos del mismo sexo)? ¿Qué ocurre cuando más del 80% de los nacidos son del mismo sexo?*

En el momento de analizar el problema para dar una respuesta se hace evidente que, por regla general, la proporción entre varones y mujeres sobre el total de nacimientos sea aproximadamente del 50%, pero es igualmente evidente que no todos los días esta proporción será exactamente del 50%. Habrá días en que la proporción se incline a favor de uno u otro sexo. Se consideran días “fatídicos”, los que cada clínica anota en el registro especial, como aquellos en que la proporción se haya desviado hasta un 60%. El promedio de las lecturas obtenidas por Tversky, Kahneman y Bar-Hillel<sup>58</sup> en una serie de experimentos conocidos como The Maternity Ward en un número considerable de individuos es la siguiente:

En la clínica más grande 24%

En la clínica más pequeña 20%.

No hay diferencia 56%

En estos datos se puede ver que más de la mitad de los individuos consideran que la fluctuación estadística no depende del tamaño de la muestra. En realidad, la respuesta correcta es “en la clínica más pequeña”,

---

<sup>58</sup> BAR-HILLEL, M. “The base-rate fallacy controversy”. En R. W. Scholz (Ed.), Decision making under uncertainty Amsterdam: North Holland, 1983. Págs. 39-62.

porque una fluctuación es más probable cuanto más pequeña es la muestra. Esto se ve bien en el caso que todos los nacimientos son del mismo sexo. Aunque sea de manera intuitiva, se puede ver que es más probable tener 15 nacidos del mismo sexo en el mismo día que tener 45. El 20% de individuos que han contestado bien desde un principio no deberían tener ningún problema cuando se pasa al segundo caso (todos los nacidos son del mismo sexo).

En cambio los que han contestado “en la clínica más grande” o “no hay diferencia” (aproximadamente el 80% de los encuestados) se quedan bastante perplejos. Maya Bard-Hillel<sup>59</sup> ha demostrado que cerca del 80% de los individuos da la respuesta correcta cuando se presenta el caso de las fluctuaciones extremas. Cuando se le proporcionan al individuo en el enunciado del problema cifras crecientes entre 60% y 100% como límite para los “días especiales”, sube progresivamente la media de las respuestas correctas, pero no con un crecimiento lineal, si no con un crecimiento más bien lento y una posterior escalada cuando se aproxima a los valores extremos (90% y más). El problema es que cuando las personas conocen la frecuencia real del suceso (igual probabilidad de nacimientos de varones o mujeres) esperan que esta frecuencia aparezca tanto en un número grande de observaciones como en un número muy pequeño de éstas, desconociendo que los procesos de convergencia estocástica solo se producen en series o repeticiones para muestras grandes. Un ejemplo tipo de un sesgo asociado al heurístico de representatividad, es el dado por Piattelli.<sup>60</sup>

#### Problema tipo 2.

*Un dado normal de juego ha sido pintado de tal modo que tiene cuatro caras verdes y dos rojas. Lo lanzamos varias veces seguidas, después de haberlo agitado convenientemente en un cubilete, y se pide a un grupo de personas que hagan apuestas sobre cuál de las siguientes secuencias es la que ha salido en realidad, si se garantiza que una de las secuencias es la real: si no lo adivina pierde mil liras, si adivina gana tres mil liras. (R significa cara roja. V cara verde).*

- a. RVRRR
- b. VRVRRR

<sup>59</sup> Ibíd.

<sup>60</sup> PIATTELLI MASSIMO. “Los túneles de la mente”. Editorial Grijalbo. Barcelona 1995. pág. 58.

c. VRRRRR

*¿Por cuál de estas secuencias estarías dispuesto a apostar?*

Las preferencias por orden generalmente expresadas son: b), a), c). Obsérvese que la probabilidad de obtener una cara verde es de  $2/3$  y la probabilidad de obtener una cara roja es de  $1/3$ , por tanto dos veces inferior a la anterior. Las secuencias están todas “desequilibradas” a favor de una preponderancia de los rojos (los menos probables) y muchos individuos consideran que b) es una secuencia más “equilibrada” y, por tanto, más probable. Se trata nuevamente de un caso en que lo que es más “típico”, intuitivamente nos parece también lo más probable.

Lo extraordinario es que el 65% de todas las personas (a excepción de los expertos en el cálculo de las probabilidades) muestren una tendencia a apostar por b) a pesar de que se demuestra que se puede tener a) de b) eliminando la primera tirada del dado. El más elemental cálculo de las probabilidades debería indicar que la probabilidad de la secuencia más larga es en cualquier caso al menos  $2/3$  inferior a la de la secuencia más corta. Y, sin embargo, la b) les parece la más equilibrada, y esto es producto del sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra, asociado al heurístico de representatividad, en lugar de la opción a). El problema es que se cree que es estadísticamente verdadero para las series cortas lo que es tan sólo aproximadamente verdadero para las series muy largas, y rigurosamente verdadero solamente para secuencias de longitud próxima al infinito. El desconocimiento del tamaño de la muestra se presenta de acuerdo con la forma como esté planteada la pregunta, por ejemplo:

*Problema tipo 3.*

*Imagine que es un explorador que ha atracado en una isla desconocida del Pacífico Sur. Ha encontrado personas, animales y objetos con algunas propiedades que le parecen “raras” y necesita saber lo común que serán estas propiedades en las restantes personas, animales y objetos de la isla. Suponga que se encuentra un pájaro, el “Sheerable”. Es de color azul ¿Qué porcentaje de todos los “Sheerrables” de la isla espera que sean azules? El “Sheerable” anida en un eucalipto. ¿Qué porcentaje de estos pájaros espera que aniden en eucalipto? Suponga que ha encontrado un miembro de una tribu, los barretos y que esta persona es gruesa y de color oscuro. ¿Qué porcentaje los hombres*

*“barretos” esperan que sean de color oscuro? ¿Qué porcentaje espera que sean gruesos?*

*Finalmente se ha encontrado una muestra de un extraño mineral llamado “Floridium” que es un buen conductor de la electricidad y arde con una extraña llama verde. ¿Qué porcentaje del “Floridium” de la isla espera que sea buen conductor de la electricidad? ¿Qué porcentaje del “Floridium” arderá con llama verde?*

Los resultados encontraron que las personas si tienen en cuenta el tamaño de la muestra y no generalizan cuando se les pregunta por ciertas características como el color o la anidación de los “Sheerables” y, sobre todo, por la obesidad de los “barretos”, mientras que si generalizan a partir de una sola observación en el caso de otras características, como las propiedades del “Floridium” o el color de los “barretos”. Esta diferencia se debe a la homogeneidad o heterogeneidad de las características. Así, los sujetos esperan que las propiedades de un mineral sean estables y generalizan a partir de una sola observación, mientras que consideran altamente variable la obesidad o delgadez de los miembros de un grupo y la generalización solo se da cuando hay un número elevado de observaciones.

Por lo tanto, el heurístico de representatividad puede conducir a resultados válidos en algunas situaciones de la vida diaria con bajo costo cognitivo. Sin embargo, cuando un juicio de probabilidad se basa en la similitud entre una muestra y una población o entre una descripción y una categoría, los sujetos tienden a ignorar información esencial desde el punto de vista estadístico como el tamaño de la muestra de la que se extraen los datos. El heurístico de representatividad también es útil para explicar por qué, cuando la descripción o la nueva información de un suceso es suficientemente representativa, las personas tienden a ignorar la información inicial sobre las probabilidades a priori o la frecuencia de un evento, siendo ésta esencial en el caso de la probabilidad Bayesiana. Además, se puede apreciar que las personas no parecen conceder demasiada importancia a los resultados de un diagnóstico o a la capacidad predictiva de distintos datos y, por el contrario, basan sus juicios en la representatividad con respecto a sus resultados.

### **2.2.1.3. INSENSIBILIDAD A LAS PROBABILIDADES A PRIORI.**

A pesar de que en el Teorema de Bayes el conocimiento de las probabilidades a priori es fundamental para tomar una decisión ante una causa determinada, las personas no parecen tenerlas en cuenta y emiten juicios basados únicamente en la información específica que se proporciona cuando ésta es suficientemente representativa (Kahneman y Tversky; 1972<sup>61</sup>).

La Ley de Bayes descubierta a mediados del siglo XVIII dio respuesta a uno de los grandes enigmas del ser humano, ¿cómo es posible calcular la probabilidad desconocida a partir de datos conocidos? o, en otras palabras ¿cómo calcular el futuro, basándose en datos precisos que se refieren al pasado? Las intuiciones normales no son una base adecuada para conseguir dar una respuesta adecuada a tal interrogante porque haría falta subvertir nuestra intuición para librarnos de los razonamientos estadísticos ingenuos.

Un caso típico es aquel en el que hay que prever razonablemente cierto desarrollo de acontecimientos que se producirán en el futuro y se intenta obtener la máxima información sobre los desarrollos más probables. El modelo más estudiado es el del científico que adelanta una hipótesis, realiza los experimentos y después decide hasta qué punto los resultados de estos experimentos confirman o desmienten su teoría. Se trata de calcular exactamente, no de hacer una estimación a ojo, de hasta qué punto es probable que una teoría o una hipótesis sea verdadera, teniendo en cuenta todo lo que sabemos. Los ingredientes esenciales del proceso Bayesiano de decisión racional son:

- i. Una serie de alternativas posibles que preceden la aplicación de la decisión y a la recogida de los datos;
- ii. Las probabilidades asignadas a priori, es decir, antes de la comprobación y de los test a cada una de las alternativas posibles;
- iii. . El grado de fiabilidad y capacidad predictiva de los distintos tests;
- iv. Los resultados de los tests (o encuestas, controles);
- v. Las probabilidades que hay que asignar a cada una de las alternativas posibles a posteriori, es decir, después de haber sabido el resultado de los tests, después de haber conocido los datos suplementarios.

---

<sup>61</sup> D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (1982), *Judgement under uncertainty: heuristics and biases* (pp. 84 - 100) Cambrige: Cambrige University Press.

El Teorema clásico de Bayes (del nombre del canónigo matemático inglés Thomas Bayes que lo demostró a mediados del siglo XVIII) afirma que las probabilidades que aparecen en v) se pueden calcular exactamente sobre la base de los datos obtenidos en i), ii), iii) y iv). El individuo racional ideal es un individuo, definido hoy en día como "bayesiano". Según Piattelli<sup>62</sup> "el único modo racional posible de minimizar los riesgos y maximizar las expectativas de ganancia es adoptar la estrategia descrita por Bayes". Un ejemplo que describe la forma en que el Teorema de Bayes puede ser implementado, para minimizar el error es:

*Problema tipo 4.*

En un problema clásico adelantado por Kahneman y Tversky dividió a un grupo de individuos en tres grupos experimentales:

*El primer grupo debía evaluar la frecuencia en la población de un listado de profesiones y los resultados se representan en la primera columna de la tabla número 1.*

*El segundo grupo recibía la siguiente descripción: Tom W. Es una persona muy inteligente, aunque carece de creatividad. Necesita orden y claridad, así como sistemas claros y nítidos en los que cada detalle tenga un lugar apropiado. Es lento y mecánico al describir, aunque ocasionalmente se "ilumina" con algún juego sentimental y algún destello de imaginación del tipo de ciencia ficción. Es competitivo, parece tener pocos sentimientos y poca simpatía por la gente y no se divierte relacionándose con los demás. Centrado en sí mismo tiene, no obstante un profundo sentido de la moral. La tarea de los individuos consistía en evaluar la semejanza entre esta descripción con cada una de las profesiones de la tabla 1.*

*El tercer grupo de individuos recibía la misma descripción de Tom W. pero, además, las siguientes indicaciones: La descripción de la personalidad de Tom W. fue llevada a cabo durante el último año de bachillerato de Tom W., basándose en pruebas proyectivas. Tom W. es actualmente un estudiante universitario. Por favor,*

---

<sup>62</sup> Piattelli Máximo. Los túneles de la mente. Editorial Grijalbo. Barcelona 1995. pág. 109.

*puntúe los nueve siguientes tipos de estudios, proporcionando la probabilidad de que Tom W. esté estudiando en la actualidad alguna de estas disciplinas.*

*En otras palabras debían realizar los juicios de representatividad que mencionaban Tversky y Kahneman al describir el funcionamiento del heurístico*

TIPO DE ESTUDIO	MEDIA DE FRECUENCIAS	MEDIA DE SEMEJANZAS	MEDIA DE PROBABILIDAD
Empresarial	15	3.9	4.3
Informática	7	201	2.5
Ingeniería	9	2.9	2.6
Humanidades y Educación	20	7.2	7.6
Derecho	9	5.9	5.2
Archivo y Biblioteca	3	4.2	4.7
Medicina	8	5.9	5.8
Ciencias Físicas y Biología	12	4.5	4.3
Ciencias Sociales y Trabajo social	17	8.2	8.0

**Tabla 1** Frecuencias estudiadas para cada tipo de estudio, evaluación de semejanza y probabilidad de que Tom W. se encuentre estudiando las distintas disciplinas.

Los resultados de este estudio mostraron que los juicios de los individuos del tercer grupo correlacionan altamente (0.97) con los juicios de semejanza realizados por los sujetos del segundo grupo mientras que existía una correlación negativa (-0,65) con las frecuencias de cada profesión indicadas por el primer grupo.

Para Tversky y Kahneman, estos resultados ponen de manifiesto que los sujetos se basaban en la semejanza más que en la frecuencia al realizar un juicio de probabilidades. En otras palabras, realizan sus juicios de representatividad de la descripción. En la medida en que esta descripción sea suficientemente representativa, se ignora la probabilidad a priori de que un individuo, del que se conocen muy pocos datos, se dediquen a una profesión determinada.

Un ejemplo que muestra la insensibilidad de los individuos a la probabilidad a priori es:

*Problema tipo 5.*

*Una prueba clínica, capaz de revelar la presencia de cierta enfermedad, da un resultado positivo en un paciente determinado. Se nos dice que:*

- a. La fiabilidad de la prueba en cuestión es del 79%.*
- b. La frecuencia media de esta enfermedad entre la población de la que procede el paciente, en esta franja de edad, es del 1%. Teniendo en cuenta todos estos datos, ¿cuál es, la probabilidad de que ese paciente tenga efectivamente esa enfermedad?*

En el momento de analizar el problema hay quienes están dispuestos a conceder cierta importancia a la información contenida en el punto b), puesto que intuyen que el grado de fiabilidad de la prueba, aun cuando esté determinado por las propiedades de las células y de las moléculas, se combina con la probabilidad de esta base, la que se estima tomando la población en su conjunto, para obtener la probabilidad efectiva de que el paciente sufra la enfermedad. Pero incluso estos lectores, como lo demuestran problemas de este tipo propuesto a muchos médicos de hospitales norteamericanos, consideran de todos modos que a la vista de una prueba positiva la probabilidad es superior al 50%. En el fondo, teniendo en cuenta el resultado de la prueba, todos consideraron que era mayor la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad que la probabilidad de que no la tenga.

En cambio, la respuesta estadísticamente correcta, perfectamente calculable



por el Teorema de Bayes, es que la probabilidad es del 7%. Increíble, pero no es la estadística, ni son las pruebas, ni es la Ley de Bayes; lo que funciona es nuestra intuición normal en cuestiones de riesgo y probabilidad. Según Piatelli,<sup>63</sup> el problema radica básicamente en que nos equivocamos estrepitosamente en el momento de asignar probabilidades por la falta de atención a las frecuencias de base y al hecho de confundir la causalidad con la correlación diagnóstica.

#### 2.2.1.4. INSENSIBILIDAD A LA CAPACIDAD PREDICTIVA DEL DATO.

Un fenómeno frecuentemente observado es la tendencia a utilizar únicamente la información disponible que salta a la vista, sin tratar de inferir. Parece ser que las personas no conceden demasiada importancia a la diagnosticidad o capacidad predictiva del dato. El siguiente problema nos ejemplifica este tipo de sesgo:

*Problema tipo 6.*

*Supóngase que estamos dentro de un despacho y nos preguntamos por la probabilidad de que este lloviendo en la calle. Puesto que estamos en diciembre y esta mañana esta nublado asignaremos una probabilidad  $P(H) = 0.65$ . Supongamos que acaba de entrar Laura en el despacho y observamos que lleva paraguas; la probabilidad de que Laura lleve paraguas dado que esta lloviendo en la calle es de  $P(D/H) = 0.95$ . Sin embargo, nos dicen que Laura casi siempre lleva un paraguas, por lo que la probabilidad de que Laura lleve un paraguas dado que no llueve en la calle es  $P(D/Hc) = 0.95$ .*

En otras palabras, solo cuando conocemos la  $P(D/Hc)$  podemos saber que el hecho de que Laura lleve un paraguas no es un dato que nos permita predecir si llueve o no, ya que no tiene capacidad predictiva. Las personas sin embargo, no consideran la  $P(D/Hc)$  tan relevante como la  $P(D/H)$ , tal como observaron Beyth-Marom y Fischhoff (1983)<sup>64</sup>.

---

<sup>63</sup> Ibid, págs. 84 a 93

<sup>64</sup> FISCHHOFF, B., P SLOVIC Y S. LICHTENSTEIN. "Knowieg with certaninty: The appropriateness of extreme confidence". Journal of Exparimental Psychology: Human Perception and Performance. 1977. Págs. 552 – 564.

En la misma línea, Kahneman y Tversky (1972) encontraron que las personas no tenían en cuenta la capacidad predictiva de distintos datos, sino que basaban el juicio en su representatividad con respecto a un resultado. Uno de los experimentos clásicos desarrollados por estos investigadores fue el siguiente:

*Tres grupos de sujetos debían predecir la nota media para el próximo curso de 10 estudiantes hipotéticos. Esta predicción debía realizarse a partir de una puntuación obtenida por cada uno de estos estudiantes y era idéntica para cada uno de los tres grupos de sujetos. La diferencia se daba en la interpretación de esta puntuación. Para el primer grupo la puntuación representaba la nota media del estudiante en el curso anterior, y se añadía como explicación que si un alumno tenía una puntuación de 6.5 significaba que en el curso anterior había sido superior del 65% de su clase. ¿Para el segundo grupo la puntuación era de la medida obtenida por el alumno en un test de concentración mental. También se informaba a los sujetos que esta medida estaba relacionada con la nota académica, aunque podía verse afectada por otras variables, como la fatiga que podría distorsionar su valor. Para el tercer grupo la puntuación era obtenida en un test sobre el sentido del humor. Se añadía que la medida de estos test tenía cierta relación con el rendimiento académico, ya que, a la larga, los sujetos con puntuaciones altas en el test tendían a obtener mejor nota media. Si embargo, no puede predecirse con precisión la nota de un estudiante a partir de su resultado en el test.*

Según los autores era de esperar que los sujetos simplemente trasladasen la puntuación de los alumnos en el curso anterior y en el test de conocimiento mental a la nota media en el próximo curso, dado que ambas medidas son representativas del rendimiento de los alumnos. Sin embargo, no ocurre lo mismo con el test sobre el sentido del humor, que es muy poco representativo del nivel académico. Los resultados apoyan esta hipótesis, ya que no existen diferencias entre las predicciones realizadas por los dos primeros grupos, mientras que si difieren las predicciones del tercero. En la medida que la información es representativa de la hipótesis propuesta, las personas ignoran su relación con otras posibilidades siendo, por tanto, insensibles a la diagnosticidad del dato.

Todos estos resultados pueden atribuirse a la representatividad, dado que existe un alto grado de correspondencia entre llevar paraguas y que este lloviendo en la calle.

### 2.2.1.5. FALACIA DE LA CONJUNCIÓN.

Uno de los sesgos más comúnmente observados es la llamada “falacia de la conjunción”, en el cual las personas consideran más probable una situación que es la conjunción de dos o más eventos, que aquella que aparece ante nuestros ojos como más ambigua o que únicamente se describe por un solo suceso. Se podría afirmar que esto se debe a que la persona ha malinterpretado la información al considerar que es igualmente probable la ocurrencia de un evento individual, que la de dicho evento y la negación de otro, o que haya confundido la existencia de algún tipo de dependencia entre dichos eventos con la de independencia de estos mismos, pero Tversky y Kahneman demostraron que a pesar de las variaciones necesarias en la información de dicho problema tratando de evitar las confusiones planteadas inicialmente, las personas insistían en considerar más probable sucesos que fueran la conjunción de dos o más eventos.

Uno de los Teoremas básicos de la probabilidad postula que: si A y B son dos eventos asociados con un espacio muestral S de un experimento E, entonces se cumple que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Luego entonces, la probabilidad conjunta de dos eventos  $P(A \cap B)$  es siempre menor o igual que la probabilidad de cada uno por separado. Para estudiar si las personas tienen en cuenta la diferencia entre la probabilidad conjunta y la probabilidad individual, Kahneman y Tversky presentaron el siguiente problema:

*Problema tipo 7.*

*Linda es una joven de 31 años, soltera, desenvuelta, sincera y muy brillante. Actualmente es licenciada en filosofía y cuando era estudiante*

*estaba profundamente comprometida en temas de discriminación y justicia social, participando también en manifestaciones antinucleares. La tarea consiste en asignar una puntuación entre 1 y 8 a las siguientes afirmaciones de forma que 1 sea la afirmación que considere más probable y 8 aquella menos probable:*

- a. Linda es maestra en una escuela elemental.*
- b. Linda es feminista.*
- c. Linda es una asistente psiquiátrica.*
- d. Linda es miembro de la Liga de Mujeres Votantes.*
- e. Linda es cajero en un banco.*
- f. Linda es agente de seguros.*
- g. Linda es cajera en un banco y es feminista.*
- h. Linda es una asistente psiquiatra y agente de seguros.*

La mayoría de sujetos considera más probable la afirmación h) que la afirmación f), a pesar de que h) es la conjunción de c) y f). Este resultado podría explicarse de nuevo mediante el uso del heurístico de la representatividad, puesto que consideran que la afirmación f) es menos representativa de la descripción de Linda.

El sesgo de la falacia de la conjunción se encuentra relacionado con la construcción de escenarios, que está asociado con el heurístico de la accesibilidad, en el cual las personas consideran más probable una situación que aparece como una conjunción de varios sucesos,<sup>65</sup> formando un escenario más detallado, que otra situación más ambigua en la que únicamente se describe un suceso (él cual veremos en el apartado siguiente).

### **2.2.2. HEURISTICO DE ACCESIBILIDAD.**

---

<sup>65</sup> GONZÁLEZ L. MARÍA JOSÉ. "Introducción a la Psicología del pensamiento". Editorial Trotta. Madrid 1998. Pág. 341.

Descrito por Tversky y Kahneman (1973)<sup>66</sup>, éste heurístico es utilizado en juicios en los que se le pide al individuo la estimación de frecuencias. El uso de este heurístico consiste en asignar la probabilidad de un suceso o de un acontecimiento en función de la facilidad con la que puede recordarse. Este heurístico puede conducir a buenos resultados, puesto que lo más frecuente es también lo más disponible en la memoria y su recuperación es fácil y rápida. Sin embargo, lo más accesible no es siempre lo más probable.

Las variables que afectan los juicios que utilizan éste heurístico además de la frecuencia son:

- La facilidad con que el sujeto puede evocar datos relevantes a los juicios que él ha asignado en alguna situación particular. Por ejemplo, considerando que se recuerda mejor la información más reciente o la más impactante, o la más nítida asociada con esta situación.
- La familiaridad, por la cual los juicios están relacionados con la facilidad con que se accede a la información, puesto que es más fácil recordar los datos conocidos.

El heurístico de la accesibilidad está estrechamente relacionado con otro heurístico denominado “heurístico de simulación”. Mientras que el primero se utilizaría en tareas de recuerdo, la simulación se utilizaría en tareas de predicción, ya que se estimaría la probabilidad de un acontecimiento en función de la facilidad con que puede anticiparse o imaginarse.

Tanto el heurístico de la accesibilidad como el de la simulación conducirían a errores en parecidos términos a los producidos por la representatividad. Se ignorarían las probabilidades a priori o la frecuencia real a un evento cuando se dispone de información más reciente o más impactante que contradiga dichas probabilidades a priori.

---

<sup>66</sup> TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1971). “Belief in the law of small numbers”. *Psychological Bulletin*, No 76. Págs. 105-110. Incluido en D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: heuristics and biases* Págs. 23 - 31. Cambridge: Cambridge University Press.

Este heurístico tiene asociados consigo varios sesgos, entre ellos tenemos:

### **2.2.2.1. EL SESGO EGOCENTRICO**

Consiste en que a la hora de asignar un juicio probabilístico, lo que se evoca con mayor facilidad son las acciones u opiniones propias. En el ámbito social, esta prevalecía de la información más accesible sobre el consenso (que equivaldría a la probabilidad a priori) puede apreciarse, por ejemplo, en la creencia de que la opinión que cada uno mantiene es la más frecuente, debido a que las propias ideas, actos o contribuciones son más accesibles que la de otros.

### **2.2.2.2. EL SESGO DEL EFECTO DE LA EXPLICACIÓN**

Consiste en considerar mayor la probabilidad de un suceso que se ha explicado previamente que la probabilidad del resto de las posibilidades. Por ejemplo, se pidió a todos los sujetos que imaginasen una situación en la que un candidato o un equipo resultaban ganadores en unas elecciones presidenciales o en una liga de fútbol, respectivamente. Solo la mitad de los sujetos debían dar una explicación sobre el suceso imaginado, el triunfo del equipo o del candidato. Finalmente, se pidió a todos los sujetos un juicio sobre sus expectativas de que el candidato o el equipo imaginado fuese el ganador. Los resultados indicaron que los sujetos consideraban más probable la situación que previamente habían imaginado, sin necesidad de haberla explicado. Cuando el sujeto da una explicación sobre el hipotético éxito o fracaso, los factores que favorecen una u otra posibilidad se hacen más salientes y, por tanto, más accesibles en la memoria.

Investigaciones posteriores realizadas por Carroll (1978) demostraban, de forma congruente con el heurístico de la accesibilidad, que no es necesario explicar sino únicamente imaginar un resultado para aumentar su probabilidad percibida.

### **2.2.3. LA HEURÍSTICA DE DISPONIBILIDAD**

Otra de las heurísticas usadas en el razonamiento probabilístico es la disponibilidad, por la que se juzgan más probables los sucesos más fáciles de recordar. Igual que con la representatividad, la presencia de errores derivados del uso de esta heurística se evalúan después de su utilización y no hay intento de predecir a priori bajo qué condiciones van a aparecer. Como señalan Sherman y Corty (1984)<sup>67</sup>, esta heurística se apoya en el concepto de muestra, que es también uno de los conceptos claves en estadística. Al evaluar las probabilidades de un suceso, generalmente se usan muestras de datos para su estudio. Con ello corremos el riesgo de que la muestra no sea representativa de la población a estudiar o esté sesgada, cometiendo los consiguientes errores sistemáticos:

- Si el tamaño de la muestra no es representativo se infieren a ella propiedades que no corresponden a la población.
- Si la muestra es sesgada se ocultan o resaltan propiedades de la población que distorsionan las inferencias.

Tversky y Kahneman asocian a la heurística de disponibilidad dos fenómenos característicos como la "correlación ilusoria" y la "construcción de escenarios". El primero de ellos es el fenómeno que se atribuye a aquellos estudios en los que se pretende establecer una correlación entre variables que parecen estar relacionadas en sentido semántico, sin estarlo en sentido estadístico, juzgando la correlación sólo a partir de los casos en que los dos caracteres están presentes y no en aquellos en que los dos están ausentes. Respecto al segundo, Kahneman, Slovic y Tversky, lo han llegado a considerar como una heurística perse, llamándole heurística de simulación. Así, esta heurística parte de la facilidad con que se pueden construir ejemplos o "escenarios" en la valoración de probabilidades y asignaciones de causas, frente a la heurística de disponibilidad que se basa en la facilidad para encontrar ejemplos.

---

<sup>67</sup> SHERMAN, S. E. Y CORTY, E. "Cognitive heuristic. En R. Wyer Jr. y T. S. Krull (Eds.), Handbook of Social Cognition 1984. New Jersey: LEA. Págs. 135 – 198.

Pérez Echeverría (1990)<sup>68</sup> indica que existen cinco casos en los que puede actuar esta heurística de simulación:

- a) Valoración de la situación que ocurrirá en un futuro acontecimiento.
- b) Valoración de la probabilidad de un posible suceso.
- c) Valoración de las probabilidades condicionales.
- d) Valoración de hechos en los que no hubiese sucedido alguno de los sucesos previos.
- e) Valoración de la atribución de la causalidad.

Esta heurística da lugar a sesgos o errores que fácilmente se pueden creer generados por las heurísticas de disponibilidad o de representatividad, ya que por ejemplo la facilidad para construir un ejemplo, se puede atribuir a que acuden con rapidez a nuestra mente acontecimientos análogos o que podemos extraer de nuestra memoria los sucesos más representativos de una clase semejante.

#### **2.2.4. HEURISTICO DE AJUSTE Y ANCLAJE**

Con esta heurística se suelen utilizar estimaciones parciales iniciales no bien ajustadas, en el cálculo de una probabilidad compleja. Según Tversky y Kahneman (1974) se suelen hacer estimaciones según un valor inicial que se utiliza para tener la respuesta final. El punto de partida para este cálculo puede ser la formulación de un problema o el resultado de un caso parcial, donde los ajustes no son adecuados. Partiendo desde puntos distintos se producen estimaciones diferentes y sesgadas hacia los valores iniciales.

Supongamos, por ejemplo que se nos pide calcular en quince segundos aproximadamente, el siguiente producto:

$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$  y se anota el resultado en una hoja de papel.

---

<sup>68</sup> PÉREZ ECHEVERRÍA, M. P. "Psicología del razonamiento probabilístico". Madrid: Universidad Autónoma 1990. Págs. 35 – 68.



A otras personas, que tengan las mismas características de edad y cultura que los primeros, se les pide en cambio, que calculen (también mentalmente y también en quince segundos aproximadamente) el producto:

$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$ . Anotamos el resultado y se encuentra una gran disparidad de resultados.

El promedio de las cantidades obtenidas en cada uno de los casos es distinto, encontrándose que el del segundo caso es muy superior al obtenido en el primer caso. Sin embargo, la experiencia demuestra que cuando se les pregunta individualmente a estos mismos sujetos que enuncien la propiedad conmutativa del producto (que dice: “el cambio del orden de los factores no altera el producto”), se demuestra que la gran mayoría la conoce perfectamente. A este fenómeno de estimar el resultado con base en los pocos cálculos realizados en 15 segundos sin tener en cuenta la propiedad conmutativa, se le denominan efecto de ajuste y anclaje. La propiedad conmutativa permitiría reorganizar la serie de números de tal forma que en el poco tiempo que se dispone para realizar la prueba, las operaciones se hagan con los números más representativos y la inferencia se ajuste más al valor real.

Hay diferencia de opinión respecto a esta heurística, ya que autores como Vega (1984)<sup>69</sup> lo consideran un caso especial de la heurística de disponibilidad, y creen que ciertos errores que se cometen en las estimaciones pueden estar motivados por los cálculos incompletos que se reflejan en la información del problema. También se puede considerar esta heurística al interpretar erróneamente la probabilidad de acontecimientos compuestos por la intersección de sucesos (Sherman y Corty, 1984)<sup>70</sup>, originando errores de sobreestimación de la probabilidad de la intersección, cuando la probabilidad de los primeros sucesos que se observa es muy alta y no se hace un adecuado ajuste de los siguientes sucesos.

Análogamente, en acontecimientos varios donde debe ocurrir al menos uno de ellos (sucesos disjuntos), la probabilidad de cada uno es muy pequeña, aunque no lo sea la de su unión. Pero por el anclaje que puede existir, la

<sup>69</sup> VEGA, M. Introducción a la psicología cognitiva. Madrid: Alianza.1984. Psicología.

<sup>70</sup> SHERMAN, S. E. y CORTY, E. (1984). Cognitive heuristics. En R. Wyer Jr. y T. S. Krull (Eds.), Handbook of Social Cognition. New Jersey: LEA Págs. 135 – 198.

probabilidad final se puede subestimar, debido a un insuficiente ajuste. La información recibida en primer lugar puede llevar a inferir estimaciones erróneas de posibles exploraciones posteriores.

## 2.2.5. OTROS SEGOS EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO

### 2.2.5.1. EL SEGO DE EQUIPROBABILIDAD

En los experimentos de Lecoutre (1985, 1992)<sup>71</sup>, Lecoutre y Durand (1988)<sup>72</sup>, Lecoutre y Cordier (1990)<sup>73</sup>, se describe la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio. Como ejemplo, usan un problema en el que se pregunta si al lanzar dos dados hay la misma probabilidad de obtener un 5 y un 6 que la de obtener dos veces un 5.

A pesar de la variación del contexto y el formato de la pregunta, los resultados

siempre coinciden y demuestran la estabilidad de la creencia en que los dos resultados son equiprobables. Lecoutre<sup>74</sup> y sus colaboradores defienden que ello no es debido a la falta de razonamiento combinatorio, sino a que los modelos combinatorios no se asocian fácilmente con las situaciones en que interviene "el azar". Los sujetos a los que se les pasó la prueba consideran que el resultado del experimento depende del azar y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables, desconociendo la independencia de los resultados.

---

<sup>71</sup> LECOUTRE, M. P. "Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations". Educational Studies in Mathematics No. 23. 1992. Págs. 557-568.

<sup>72</sup> LECOUTRE, M. P. y DURAND, J. L. Judgements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aleatoire. Educational Studies in Mathematics, 1988. Págs.19, 357- 368.

<sup>73</sup> LECOUTRE, M. P. y CORDIER, J. Effet du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. Bulletin de l'APMEP, 1990. Págs. 372, 9 - 22.

<sup>74</sup> *Ibíd.*

### 2.2.5.2. ERRORES SOBRE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Diversos autores como Falk (1986 a, 1986 b)<sup>75</sup>, Bar-Hillel (1983)<sup>76</sup>; Borovcnik (1988)<sup>77</sup> han estudiado las dificultades de los alumnos con la probabilidad condicional; además del error señalado por Steinbring (1986)<sup>78</sup> respecto a la falta de apreciación de la independencia de ensayos sucesivos, les resulta difícil comprender que la probabilidad de un suceso pueda condicionarse por otro que ocurra después que él. Estos sujetos encontrarían sin sentido una pregunta sobre la probabilidad de que la madre de una persona de ojos azules tenga ojos azules. Falk<sup>79</sup> sugiere que esto puede ser debido a una confusión entre condicionamiento y causación. También se confunden con frecuencia las probabilidades condicionales de B dado que ocurrió A, con la probabilidad condicional de A dado que ocurrió B [ $P(B/A)$  y  $P(A/B)$ ]. En particular esto ocurre en la interpretación dada por los estudiantes universitarios al nivel de significación en un contraste de hipótesis (Falk, (1986a)<sup>80</sup>, Vallecillos, (1992, 1994)<sup>81</sup>). Este concepto se define usando una probabilidad condicional como "la probabilidad de rechazar una hipótesis nula cierta" y es interpretado por algunos sujetos como "la probabilidad de que sea cierta una hipótesis nula rechazada".

A partir de la comprensión teórica de los heurísticos y sus sesgos asociados y compartiendo los planteamientos desarrollados por Kahneman y Tversky, respecto a la importancia de desarrollar el pensamiento probabilístico en las

<sup>75</sup> FALK, R. "Conditional probabilities: insights and difficulties". En R. Davidson & J. Swift (Eds.), Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics, 1986. Págs. 292 - 297. University of Victoria

<sup>76</sup> BAR-HILLEL, M. y WAGENAAR, W. A. "The perceptions of randomness". En G. Keren y C. Lewis (Eds.), A Handbook for data analysis in the behavioral sciences: methodological issues. Lawrence Erlbaum 1993. Págs. 311 - 339.

<sup>77</sup> BOROVCNIK, M. "Revising probabilities according to new information". En R. Davidson y J. Swift (Eds.), Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics. University of Victoria 1988. Págs. 298 - 302.

<sup>78</sup> STEINBRING, H. (1986). L'indépendance stochastique. Recherches en Didactique des Mathématiques, No 7 (3). Págs. 5 - 50.

<sup>79</sup> FALK, R. Randomness. An ill-defined - but much needed concept. Journal of Behavioral Decision Making, 1991. No 4. Págs. 215 - 226.

<sup>80</sup> *Ibíd.*

<sup>81</sup> VALLECILLOS JIMÉNEZ, A. "Estudio teórico - experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios". Tesis doctoral Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 1994.

aulas, dando relevancia a la formación estadística, específicamente respecto a las propiedades tales como: la capacidad predictiva del dato, la sensibilidad al tamaño de la muestra, la independencia de los eventos, la sensibilidad a las probabilidades a priori, se pretende aportar en la construcción de las implicaciones educativas para el desarrollo del mismo, minimizando la presencia de los sesgos asociados a los heurísticas utilizados en juicios aleatorios.

Los planteamientos teóricos de Kahneman y Tversky, son los más pertinentes, cuando se trata de hacer aportes educativos, dada la claridad que logran en la explicación de este complejo proceso del desarrollo del pensamiento probabilístico.

### **3. METODOLOGIA**

#### **3.1. TIPO DE ESTUDIO**

La presente investigación constituye un estudio de nivel exploratorio por cuanto examinó un problema del ámbito cognitivo poco estudiado en nuestro país desde los enfoques planteados en el marco teórico, como son los errores y sesgos que presentan los estudiantes de los grados octavos y undécimo de los Colegios Distritales de la Localidad 15 del Distrito Capital en el año 2003, al momento de enfrentarse a la solución de problemas de tipo aleatorio en el ámbito del conocimiento de la probabilidad. Además, es un estudio descriptivo, porque como resultado del proceso se propone un conjunto de implicaciones educativas con las cuales es posible minimizar los sesgos asociados a los heurísticos, los cuales se pudo establecer que emergen debido al desconocimiento por parte de estudiantes de determinadas propiedades estadísticas fundamentales, como el desconocimiento del tamaño de la muestra, la independencia de los ensayos y la capacidad predictiva del dato, entre otras. Con todos estos elementos, entonces se pudo llegar a un nivel importante en la descripción del fenómeno estudiado.

#### **3.2 DISEÑO METODOLOGICO**

La investigación se soporta en métodos cuantitativos con la aplicación de una encuesta con preguntas cerradas de selección múltiple, las cuales están elaboradas en estudios realizados por científicos cuyos trabajos aparecen referenciados en el marco teórico y la bibliografía (ver anexo # 1). Por otro lado, esta investigación acudió al método cualitativo cuando se pidió a los estudiantes argumentar los motivos de las respuestas dadas en las cinco primeras preguntas del test (ver anexo # 2). Estos argumentos fueron solicitados con el objeto de establecer la presencia de los sesgos asociados a los heurísticos de la representatividad ajuste – anclaje y disponibilidad a

partir de la expresión directa y espontánea de las creencias que poseen los estudiantes de los fenómenos aleatorios. Este procedimiento cualitativo tiene su base, como ya se había mencionado en la justificación (ver numeral 1.2), en autores como Shulman (1989), Kira y Miller (1989).

En relación con el instrumento aplicado, como ya se menciona líneas arriba, es una encuesta con preguntas cerradas y abiertas, cuya validez se encuentra suficientemente convalidada en los contextos de los autores mencionados, en Inglaterra con Konold y Garfield (1993) y en España con Batanero y Cañizares (1995). Todo lo relacionado con la estructuración y fundamentación del instrumento puede encontrarse en el anexo número 1.

### **3.3 POBLACION**

La población sujetos de investigación es la de estudiantes de educación básica secundaria grado octavo y media vocacional, grado undécimo de los colegios distritales de la localidad quince comprendidos entre los 11 y 19 años de edad. La muestra utilizada se tomó entre los alumnos de diversos centros de Educación básica secundaria y media vocacional de la ciudad de Bogotá. El número total de alumnos de la muestra fue de 1142 que se distribuyeron en dos grupos: el primero de estos grupos era de 611 alumnos de los grados octavos y el segundo de 531 alumnos de los grados un décimo de 14 colegios públicos de la Localidad 15 de la Capital de la República.

En total participaron en el estudio catorce centros educativos distritales diferentes en los que, en todos los casos, hemos encontrado cooperación e interés por nuestro trabajo. Todos los profesores participantes colaboraron en el éxito de la recogida de datos, motivando a sus alumnos para que completasen el cuestionario con el mayor interés posible y para que describiesen con detalle sus argumentos.

### **3.4 INSTRUMENTO**

El instrumento utilizado en la recogida de datos es un cuestionario para ser completado por escrito por los estudiantes. Está formado por tareas de diferente tipo, tomadas en su mayor parte de investigaciones previas, pues se trataba de evaluar sesgos y heurísticas específicas con cada pregunta de fiabilidad probada.

Como hemos indicado, uno de los fines que pretendemos es la comparación de nuestros resultados con los de otros autores. Completamos este trabajo con el análisis de las diferencias en los dos grupos y el estudio de asociaciones entre diversas heurísticas y sesgos, que constituye un aporte de nuestra tesis.

El instrumento se diseñó tal como se describe a continuación por dos razones, la primera que permitiera comparación de resultados y la segunda utilizar un instrumento válido y confiable que posibilitara evaluar los sesgos.

El cuestionario consta de ocho preguntas agrupadas en dos partes que evalúan aspectos diferentes del razonamiento de los alumnos: La primera parte consta de 4 preguntas y trata de determinar el significado que, para los alumnos, tienen las secuencias de resultados aleatorios.

La segunda se compone de preguntas utilizadas en investigaciones sobre diversas heurísticas y sesgos, evaluando el uso que hacen de ellos los alumnos.

A continuación analizamos cada uno de las preguntas de estos dos apartados.

#### Descripción de la Parte 1:

Con esta primera parte del cuestionario evaluamos las propiedades que los alumnos asignan a las secuencias de resultados aleatorios, a nivel declaratorio (reconocimiento).

Las cuatro preguntas que forman esta parte del cuestionario han sido tomadas del cuestionario "Random One", usado por Green (1988, 1991)<sup>82</sup> en su estudio longitudinal sobre 1.820 escolares ingleses de 7 a 14 años. Preguntas retomadas por Godino, Batanero y Cañizares, en un estudio

---

<sup>82</sup> GREEN, D. R.. Children's understanding of randomness. En E. Davidson y J. Swift (Eds), Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics. University of Victoria.1988. págs. 287 - 291.

longitudinal en escolares de 11 a 18 años en las escuelas españolas<sup>83</sup> Por este motivo, podremos comparar nuestros resultados con los de este autor, para los alumnos de edad similar en los cursos octavos, y extender sus resultados a alumnos de grado undécimos.

En esta parte de la prueba utilizamos uno de los tipos de tareas propuestos por Green<sup>84</sup> en la investigación citada cual es el de reconocimiento de sucesiones o distribuciones aleatorias, aunque se han suprimido algunos de los distractores o algunos de las preguntas similares a las que proponemos, con objeto de que el instrumento global no fuese demasiado largo. Los tipos de preguntas incluidos son de reconocimiento de sucesiones o distribuciones aleatorias. En cada una de las preguntas hemos considerado distribuciones aleatorias lineales y planas.

En las tareas de reconocimiento se presenta al alumno una serie de secuencias o distribuciones aleatorias y se le pide un juicio subjetivo sobre la aleatoriedad de las mismas. En concreto, se le pide que indique cuáles de ellas cree que pueden haber sido generadas por un experimento aleatorio.

#### Descripción de la Parte 2:

Esta parte de cuestionario se orienta a evaluar si los alumnos hacen uso de diversas heurísticas y sesgos, en especial la representatividad, por la que los juicios de probabilidad se realizan en base al parecido entre muestra y población, prescindiendo del tamaño de la muestra. Ha sido construido básicamente con preguntas del test "Intuitive reasoning" de Konold y Garfield (1993)<sup>85</sup>, aunque las preguntas han sido usados por diversos autores, tales como Godino, Batanero y Cañizares, de quienes se retoma su traducción, para aplicar a la población sujeto de esta investigación. El instrumento completo se encuentra en el anexo No. 2.

---

<sup>83</sup> GODINO J.D. y BATANERO, C . "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos" Tomado de Recherches en Didactiques des Mathématiques, 1987. Vol. 14 págs. 325-355.

<sup>84</sup> *Ibíd.*

<sup>85</sup> KONOLD, C. y GARFIELD, J. B.. "Statistical reasoning assessment". Part I: Intuitive thinking. University of Massachusetts: Scientific Reasoning Research Institute. 1993.



## 3.5 PROCESO

### 3.5.1. ESTUDIO PILOTO

Con objeto de obtener unos primeros datos con los que podríamos ensayar el plan de análisis de datos previsto y estimar la generalizabilidad del cuestionario, procedimos a ensayarlo con una muestra piloto. Esta muestra estuvo formada por treinta y tres alumnos de grado octavo y treinta y dos de grado un décimo. Los cuales pertenecían a un mismo colegio de educación secundaria de la ciudad de Bogotá de la Localidad 15 en su gran mayoría de los estratos 2 y 3, de los que treinta y uno eran niños y el resto niñas. Eran alumnos que no habían recibido previamente ninguna enseñanza sobre probabilidad aunque en sus respuestas se podía observar interés por estas cuestiones y ciertas vivencias relacionadas con este mundo del azar.

Una vez recogidos los datos de la muestra piloto, se procedió a resumir sus resultados. Para cada uno de los alumnos se analizaron las respuestas, clasificando los argumentos obtenidos. El propósito principal de este análisis fue detectar posibles problemas de interpretación de los enunciados para corregirlos si fuera necesario. Ya analizados los resultados del cuestionario piloto, pasamos a estudiar los puntos que se deberían modificar para elaborar el cuestionario definitivo. Nuestra intención era realizar los mínimos cambios posibles, puesto que uno de nuestros objetivos era la comparación con los trabajos de Godino, Batanero y Cañizales<sup>86</sup> Green, Lecoutre y Konold<sup>87</sup> de los cuales habíamos tomado los ítems.

Por ello, sólo se ha procedido a variar las preguntas si hubo dificultad de interpretación del enunciado por parte de los alumnos. Ello ha ocurrido en los casos siguientes:

---

<sup>86</sup> GODINO, J. D. BATANERO, C Y CAÑIZARES, M.J. "Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid. 1987.

<sup>87</sup> Op.citp.

En la pregunta 8 se observó que las opciones propuestas por Lecoutre<sup>88</sup> no eran totalmente comparables en las dos partes de esta cuestión. Mientras que en la primera parte había una opción de respuesta "es imposible saberlo", esta opción no existía en la segunda parte. Incluimos esta opción en la segunda parte, porque el alumno puede pensar que no existe un procedimiento matemático para el cálculo de las probabilidades de los sucesos implicados. Además la mayor parte de los alumnos había elegido precisamente esta opción en la primera parte de la pregunta.

Para ello se utilizó el cuestionario tal y cual como se aplicaría en la recopilación de la información (Anexo 2). En cada uno de ellos se puntuaron tanto las respuestas así como los argumentos de las preguntas 1 a 5, obteniéndose los índices de dificultad que se muestran en la tabla 2., como porcentaje de resultados correctos en el total de alumnos. Se evidenció la notable dificultad de la mayoría de las preguntas, y se decidió conservarlas, por ser cada una de ellas fundamental para el estudio de los sesgos que se intentaba evaluar.

El resto de las preguntas se conservaron tal y como estaban. Los resultados de la muestra piloto fueron suficientemente interesantes para indicarnos que merecía la pena estudiar una muestra más amplia. Por otro lado, no tuvimos demasiada dificultad en la categorización de las respuestas, ya que contábamos con categorías previas definidas en otras investigaciones. La mayor parte de las respuestas de los niños pudieron ser englobadas en dichas categorías, aunque, para ser coherentes con el enfoque metodológico también se construyeron categorías nuevas, a partir de los argumentos dados por los sujetos de la población investigada (Ver Anexo 3).

Tabla 2. Porcentaje de respuestas de la muestra piloto.							
PREGUNTA	RESPUESTAS CORRECTA %		PRINCIPAL DISTRACTOR %		OTRAS RESPUESTAS %		
	Octavo	Once	Octavo	Once	Octavo	Once	
	n = 33	n = 32	n = 33	n = 32	n = 33	n = 32	
Pregunta 1	e 9.2	e 24.6	b 12.3	d 9.2	c 10.8	c 9.2	
Pregunta 2	e 7.7	e 16.9	c 20.0	a 13.8	b 10.8	c 10.8	

<sup>88</sup> LECOUTRE, M. P. Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*. 1992. pags. 23, 557 - 568.

Pregunta 3	a 6.2	a 10.8	c 36.9	c 35.4	b 7.7	b 3.1	
Pregunta 4	c 21.5	c 15.4	a 15.4	d 18.5	d 12.3	b 12.3	
Pregunta 5	b 9.2	b 10.8	d 33.8	d 27.7	a 6.2	a 9.2	
Pregunta 6	a 16.9	a 6.2	d 13.8	d 23.1	e 13.8	e 20	
Pregunta 7	c 18.5	c 12.3	e 13.8	d 16.9	d 10.8	e 13.8	
Pregunta 8	b 15.4	b 9.2	e 18.5	e 27.7	d 9.2	a 9.2	

### 3.5.2. DESARROLLO

En la recolección de datos se tuvieron en cuenta las situaciones de evaluación, las respuestas, el análisis e interpretación y las características del individuo o grupo que tiene que responder. En consecuencia, cada uno de estos aspectos se fijaron en cierto modo y estas restricciones constituyeron los límites asumidos de nuestro estudio.

La información sobre la población se organizó teniendo en cuenta género, grado y plantel educativo, datos que se presentan a continuación, en la tabla número 3. Se aclara que los estudiantes encuestados afirman que no han visto probabilidad.

CENTRO EDUCATIVO DISTRITAL.	GENERO				Total	
	MASCULINO		FEMENINO			
	CURSO		CURSO		CURSO	
	Octavo	Once	Octavo	Once	Octavo	Once
Guillermo León Valencia	19	12	14	20	33	32
Liceo Nacional Antonia Santos			40	38	40	38
C.E.D. Republica Bolivariana de Venezuela	16	13	17	6	33	19

C.E.D. Rep. Bol. de Venezuela	19	11	15	5	34	16
C.E.D. Atanasio Girardot	20	21	17	14	37	35
Normal Maria Montessori	26	8	55	29	81	37
C.E.D. Pardo Leal	13	6	22	20	35	26
Distrital Técnico Menorah			39	29	39	29
C.E.D. Andrés Bello	12	15	22	17	34	32
C.E.D. Panamericano	34	11	37	16	71	27
I.E.D Francisco de Paula Santander	12	19	15	15	27	34
Colegio Parroquial la Valvanera	26	19	12	7	38	26
C.E.D. España	20	21	11	15	31	36
Centro Educativo Integral Colsubsidio	15	17	15	13	30	30
C.E.D. El Jazmín	3	41	5	32	8	73
C.E.D. El Jazmín (tarde)	20	24	20	17	40	41
<b>TOTAL</b>	<b>255</b>	<b>238</b>	<b>356</b>	<b>293</b>	<b>611</b>	<b>531</b>

**Tabla 3** Colegios Distritales diferenciados por género y curso

El análisis de contenido (Weber, 1986<sup>89</sup>; Bardin, 1986<sup>90</sup>) de los cuestionarios completados por los alumnos, proporcionó una serie de categorías de

<sup>89</sup> WEBER, R. "Basic Content Analysis". London: Sage. 1986.

respuestas en las variables consideradas en cada uno de los diferentes apartados de las preguntas utilizadas: argumento dado por el alumno, solución aportada, etc.

Las categorías de análisis, que se construyeron a partir de los argumentos dados por cada uno de los 1142 estudiantes, sujetos de investigación (ver anexo No. 3); se lograron mediante un proceso cíclico de comparación de respuestas similares y de agrupación o división de categorías, según se recomienda en Miles y Huberman (1984)<sup>91</sup>, Huberman y Miles (1994)<sup>92</sup>. Como indica Gil (1994)<sup>93</sup>, los datos aislados no son significativos, por lo que, una vez codificados los datos, se elaboraron tablas de frecuencias para las diferentes variables. Considerando que las palabras aisladas resultan descontextualizadas y su análisis puede conducir a interpretaciones equivocadas, se han utilizado como unidades los segmentos repetidos definidos como una secuencia de dos o más palabras no separadas por un delimitador de secuencia que aparecen más de una vez en un corpus de datos textuales. El segmento repetido permite considerar el entorno sintagmático en que las palabras son empleadas, y pone de manifiesto secuencias que se repiten y que en una lectura inicial del texto posiblemente no hubieran sido detectadas. A partir de la búsqueda de segmentos repetidos en las respuestas dadas por los estudiantes, se generaron los grupos de argumentos (ver anexo # 3).

Las de frecuencia tablas se han cruzado con el grupo de alumnos, por lo que se presentan como tablas de contingencia. Una vez codificados los datos, y puesto que el tamaño de la muestra nos lo permitió, se procedió a un estudio de tipo inferencial para efectuar diversos tipos de comparaciones:

- Comparación de respuestas y argumentos en los dos grupos de alumnos para comprobar la hipótesis de igualdad de distribución de respuestas (o de argumentos).

---

<sup>90</sup> BARDIN, L. "El análisis de contenido". Madrid: Akal. 1986.

<sup>91</sup> MILES, M. B. y HUBERMAN, A. M. "Qualitative data analysis. A sourcebook of new methods". London: Sage Publications. 1984.

<sup>92</sup> HUBERMAN, A. M. y MILES, F. M. (1994). "Data management and analysis methods". En D. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), Handbook of qualitative research. 1994. London. Págs.. 428 - 444.

<sup>93</sup> GIL FLORES, J. "Análisis de datos cualitativos". Barcelona. 1994.

- Comparación de argumentos según opción correcta/incorrecta a la pregunta, para descartar la posibilidad de que los alumnos elijan al azar una de las opciones del ítem y para comprobar su comprensión de la opción elegida.

Ambos tipos de contrastes se hicieron empleando el estadístico Chi cuadrado. Además, en cada una de las dos partes de la prueba se llevo a cabo un estudio multivariante para analizar las interrelaciones entre

respuestas a las diferentes preguntas.

Como afirma Cornejo, "El mayor problema que se ha planteado hasta fechas muy recientes al estudio simultáneo de un gran número de variables ha sido la enorme dificultad de captar el conjunto sin perder la red fina de interrelaciones específicas"<sup>94</sup>. La solución viene dada hoy día por las técnicas multivariantes de análisis de los datos. Según Gras (1992)<sup>95</sup> constituyen una ruptura epistemológica con la estadística clásica respecto a los objetivos, los datos tratados, el proceso, los métodos matemáticos empleados y los conceptos implícitos en los mismos.

Al finalizar la primera fase del estudio, que comprendió la recopilación bibliografía y el análisis del estado del arte de la investigación, descrita en la primera parte de esta tesis, llegamos a la conclusión de que las situaciones didácticas experimentadas en otras latitudes resultaban asequibles para los alumnos de secundaria de nuestro país puesto que la teoría de los heurísticos lo, plantea. No obstante, también se identificaron una serie de heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico en los alumnos, así como dificultades de comprensión de algunos conceptos implicados en las actividades propuestas en las prueba piloto implementada con el cuestionario original. Todas estas limitaciones han de tomarse en cuenta en la organización de la enseñanza, ya que los alumnos no construyen su conocimiento probabilístico sobre el vacío, sino a partir de la confrontación y revisión de las ideas previas que traen consigo al comenzar su aprendizaje.

---

<sup>94</sup> CORNEJO, J. M. "Técnicas de investigación social: el análisis de Correspondencias". Barcelona: P.P.U. 1988.

<sup>95</sup> GRAS, R. « L'analyse des données: une méthodologie de traitement de questions de Didactique » . Recherches en Didactique des Mathématiques, 1992. Págs., 59-72.

Debido a la conveniencia de limitar el tamaño del cuestionario, nos centramos en el estudio de los siguientes puntos, que se consideran esenciales para el estudio de los heurísticos y los sesgos asociados en los juicios probalísticos:

a) Las propiedades que los alumnos asignan a las secuencias aleatorias. Este punto es fundamental para la comprensión de las actividades propuestas y de los conceptos implicados en las mismas.

b) El uso de heurísticas y sesgos en la evaluación de probabilidades en experimentos compuestos, de los que nos servimos, para explicar algunos de los resultados observados en las encuestas, incluso en alumnos con un buen razonamiento combinatorio.

c) Finalmente, hemos añadido una pregunta sobre interpretación de enunciados de probabilidad en su acepción frecuencial, puesto que se hace necesario ver si las respuestas dadas pueden sugerir que una porción importante de alumnos podrían ser encuadrados en el "enfoque en el resultado aislado" descrito por Konold<sup>96</sup>.

Una vez recogidos los datos de la muestra, se procedió a resumir sus resultados. En esta sección analizamos las propiedades de las secuencias aleatorias producidas por los alumnos o reconocidas por ellos, que constituyen parte del significado personal asignado por los alumnos a dichas secuencias.

Las preguntas planteadas son: ¿Cuáles son las características de las secuencias y distribuciones aleatorias? ¿Cuáles de ellas coinciden con las propiedades matemáticas? ¿Varían estas características en los dos grupos de alumnos? ¿Cuáles son los argumentos que los alumnos usan para considerar una secuencia como aleatoria o no aleatoria? ¿Cambian con las variables de tarea de las preguntas?

---

<sup>96</sup> KONOLD, C. "Informal conceptions of probability. Cognition and Instruction", 1989. págs, 59 - 98.

Para dar respuesta a estos interrogantes se analizaron las respuestas en las diferentes preguntas, clasificando los argumentos obtenidos, puesto que la aleatoriedad, como indican Bar-Hillel y Wagenaar (1993)<sup>97</sup>, no es una propiedad

observable del dispositivo que la genera y no hay prueba física o lógica, sino solo de tipo estadístico, de la aleatoriedad, por esto se hace necesario comparar los argumentos escritos con lo contestado. Como señalan Harten y Steinbring (1983)<sup>98</sup>, la evaluación de los juicios subjetivos de aleatoriedad es un problema central en la investigación psicológica. Puesto que los estudiantes no tienen un conocimiento detallado de probabilidad, sus respuestas tienen un carácter intuitivo.

El siguiente esquema metodológico, sintetiza el tipo de investigación realizada así como al método, interés de conocimiento y técnicas de recolección de datos utilizados en este estudio.

### **3.6. ANALISIS E INTERPRETACION DE RESULTADOS**

#### **3.6.1 ANALISIS CUANTITATIVO.**

En el siguiente apartado describiremos los resultados de una evaluación del razonamiento probabilístico en los estudiantes los grados octavo y undécimo, de educación básica y media vocacional, de 14 colegios Distritales de la Localidad Quince del Distrito Capital. El objetivo principal de la investigación fue analizar el grado en que estos estudiantes muestran razonamiento normativo o muestran errores y sesgos en la solución de problemas probabilísticos, aportando a la comprensión del desarrollo del pensamiento probabilístico en este intervalo de formación de nuestros

---

<sup>97</sup> BAR-HILLEL, M. y WAGENAAR, W. A. "The perceptions of randomness". En G. Keren y C. Lewis (Eds.), *A Handbook for data analysis in the behavioral sciences: methodological issues*. 1993 Lawrence Erlbaum. págs. 311 - 339.

<sup>98</sup> HARTEN, von G. y STEINBRING, H. "Randomness and stochastic independence. On the relationship between intuitive notion and mathematical definition". En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* 1983. Amsterdam: North Holland. págs. 363 - 374.



estudiantes, sobre el que los antecedentes previos son escasos (Shaughnessy 1992, Luís Serrano y Carmen Batanero 1995)<sup>99</sup>.

Se analizaron también las diferencias en las respuestas dadas por los dos grupos de alumnos, para identificar los puntos en los que el mayor nivel de formación escolar recibida contribuyen a una mejora del razonamiento probabilístico, aquellos otros que han permanecido estables al final de la formación básica y media vocacional y por último, los sesgos que, como sugieren Fischbein y sus colaboradores<sup>100</sup>, pudieran desarrollarse precisamente durante el periodo de la adolescencia.

#### PREGUNTA 1.

¿Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- CCCXX

b.- XCCXC

c.- XCXXX

d.- CXCXC

e.- Las cuatro sucesiones son igualmente probables.

¿Por qué has dado esa respuesta?

	a	b	c	d	e
Octavo	8.7	6.1	4.2	8.9	21.8
Once	5.4	4.5	4.3	10.2	26
Total	14.1	10.6	8.5	19.1	47.8

En esta pregunta se observa que el 43.6% y el 52% de los estudiantes de los grado octavo y undécimo respectivamente, perciben la equiprobabilidad de las diferentes secuencias dando como respuesta la opción e. Entre estos

<sup>99</sup> SERRANO L., BATANERO C. ORTIZ. J.y CAÑIZARES J., "Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria". En Educación Matemática. Madrid. 1996. Págs. 7-25.

<sup>100</sup> FISCHBEIN, E. Y SCHNARH, D. "Intuitions and schemata in probabilistic thinking. En Puig y A. Gutierrez (Eds), Proceedings of the XX PME Conference . V2., Universidad de Valencia. 1996. Págs..353-360.

estudiantes que perciben la equiprobabilidad, 10.3% y 12.8% de los alumnos de grados octavo y undécimo respectivamente, esgrimen como argumento, que debe haber aproximadamente igual número de caras y sellos, lo cual pone en evidencia el sesgo de la insensibilidad al tamaño de la muestra asociado con uso de la heurística de la representatividad.

Entre los estudiantes que no perciben la equiprobabilidad en el lanzamiento de las monedas, el 30% de los alumnos de ambos grupos, escogen las opciones **b** y **d**, las cuales son precisamente las series más ordenadas de resultados y que respetan la proporción teórica de caras y sellos. Esto podría interpretarse como un argumento típico del sesgo de la insensibilidad a las probabilidades a priori, por que sus juicios estarían basados en las sucesiones que mejor representan los resultados, es decir en la semejanza más que en la frecuencia y el tamaño de la muestra, lo cual esta asociado con la heurística de la representatividad.

El uso de dicho sesgo se hace evidente, porque al momento de escoger cual sería la secuencia más probable, el argumento más usado es que debe haber aproximadamente igual número de caras y sellos, lo cual es una muestra de que la intuición espera que se conserven aun en muy pocas repeticiones o ensayos la alternancia normal de los resultados.

Es también muy importante hacer notar que este sesgo, que se conoce como la falacia o sofisma del jugador, que consiste en creer que en un serie corta de lanzamientos también se tiene que restablecer el equilibrio de las alternancias entre caras y sellos al 50% aproximadamente en el lanzamiento de una moneda, se encuentra en proporciones iguales en estudiantes de grado octavo y undécimo, lo cual pone de manifiesto que dicho sesgo se conserva o incrementa en el periodo de la adolescencia y que la educación formal no ayuda reducirlo.

Además, el 20.5 y el 22.3% de los estudiantes de grado octavo y undécimo respectivamente, afirman que dicha equiprobabilidad es cuestión de suerte y que, por lo tanto no habría forma de inferir cual podría ser el resultado más probable contradiciendo su propia respuesta.

Tabla 6. Argumentos dados por los estudiantes de octavo y undécimo en la pregunta 1. (%)
--

CURSO	ARGUMENTOS DADOS PREGUNTA 1	a	b	c	d	e	Total
octavo							
A	Debe haber aprox. igual número de caras y sellos	1.1	0.8	0.0	1.3	10.3	13.6
B	Debe haber alternancia entre caras y sellos	1.1	1.1	0.3	6.6	1.0	10.2
C	Es cuestión de suerte	2.8	2.5	1.3	3.1	20.3	30.2
D	Hay un patrón regular	0.8	0.5	1.5	2.6	0.0	5.6
E	Por experiencia propia	7.1	3.8	2.6	1.8	2.0	17.2
F	Más prob. dos caras consecutivas o dos sellos	0.7	0.7	0.2	0.2	0.8	2.5
G	Es más probable que salgan caras (sellos)	2.6	1.0	1.6	0.8	0.7	6.7
H	Es más aleatoria, sin regularidad fija.	0.7	0.3	1.6	1.3	4.8	8.7
I	No contesta	0.5	1.6	0.7	1.5	0.9	5.3
	Total.	17.4	12.3	8.4	18.1	43.3	100.0
Undécimo							
A	Debe haber aprox. igual número de caras y sellos	0.4	0.4	0.4	2.9	12.8	16.8
B	Debe haber alternancia entre caras y sellos	1.7	1.7	0.2	7.2	1.7	12.6
C	Es cuestión de suerte	1.0	2.1	1.1	2.7	22.3	29.1
D	Hay un patrón regular	0.8	1.1	1.0	1.9	2.7	7.4
E	Por experiencia propia	1.5	1.0	2.7	1.9	4.0	11.0
F	Más prob. dos caras consecutivas o dos sellos	0.8	0.6	0.0	0.0	0.0	1.3
G	Es más probable que salgan caras (sellos)	2.1	0.8	1.3	0.2	0.2	4.6
H	Es más aleatoria, sin regularidad fija.	0.6	0.6	0.4	1.7	5.1	8.4
I	No contesta	1.5	0.8	1.1	1.1	2.9	7.4
	Total.	10.7	9.0	8.6	20.0	51.6	100.0

### Pregunta 2.

Abajo listamos las mismas sucesiones de caras y cruces. ¿Cuál de las sucesiones es menos probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

- a.- CCCXX
- b.- XCCXC
- c.- XCXXX

d.- CXCXC

e.- Las cuatro sucesiones son igualmente poco plausibles.

¿Por qué has dado estas respuestas?

	a	b	c	d	e
Octavo	7.2	2.7	12.1	9.6	18.1
Once	7.7	1.6	10.8	8.8	20.7
Total	14.9	4.3	22.9	18.4	38.9

Nuevamente es la respuesta correcta **e**, la más frecuente entre los dos grupos de estudiantes (36.2 y el 41.3% de los grupos de octavo y undécimo respectivamente) y al igual que en la pregunta número uno, el argumento más frecuente es que debe haber aproximadamente igual número de caras y sellos, evidenciando una vez más los sesgos antes enumerados.

La opción escogida como la menos probable es la **c** (24.2 y 21.6% de los alumnos de grado octavo y undécimo respectivamente), la cual es precisamente la que menos respeta la alternancia teórica de caras y sellos, puesto de manifiesto anteriormente como un argumento de la falacia del jugador.

La respuesta menos frecuente en el total de estudiantes es la opción **b**, la cual parece ser teóricamente la más representativa del experimento. Además, 33.1% de los estudiantes de los grados octavo y undécimo, que responden correctamente las preguntas uno y dos, parecen comprender la idea de independencia en cada una de las repeticiones realizadas con la moneda y entender el concepto de equiprobabilidad.

Tabla 8 Argumentos dados por los estudiantes de octavo y undécimo en la pregunta 2. (%)							
CURSO	ARGUMENTOS PREGUNTA 2	a	b	c	d	e	Total
octavo							
A	Debe haber aprox. igual número de caras y sellos	1.2	0.3	0.5	0.8	7.6	10.4
B	Debe haber alternancia entre caras y sellos	1.3	0.3	3.6	1.8	1.3	8.4
C	Es cuestión de suerte	3.0	1.5	1.3	1.7	14.7	22.2
D	Hay un patrón regular	1.7	0.2	3.1	3.0	3.0	10.9
E	Por experiencia propia	1.7	1.3	3.6	4.0	2.2	12.7
F	Más prob. dos caras consecutivas o dos sellos	0.7	0.2	1.7	2.0	0.5	5.0
G	Es más probable que salgan caras (sellos)	2.6	0.8	3.8	1.3	0.7	9.3
H	Es más aleatoria, sin regularidad fija.	1.0	0.2	2.5	3.3	3.6	10.6
I	No contesta	1.5	0.7	3.6	1.7	2.5	10.1
Total.		14.6	5.5	24.2	19.5	36.6	100.0
Undécimo							
A	Debe haber aprox. igual número de caras y sellos	1.3	0.0	1.9	1.3	7.9	12.5
B	Debe haber alternancia entre caras y sellos	2.7	0.4	5.2	1.7	1.5	11.6
C	Es cuestión de suerte	2.1	1.0	1.1	2.3	17.5	25.2
D	Hay un patrón regular	1.7	0.2	3.3	3.9	3.1	12.1
E	Por experiencia propia	1.2	0.4	1.2	0.8	2.5	6.0
F	Más prob. dos caras consecutivas o dos sellos	0.4	0.4	1.3	1.0	0.2	3.3
G	Es más probable que salgan caras (sellos)	2.7	0.4	2.7	0.4	0.8	6.9
H	Es más aleatoria, sin regularidad fija.	1.5	0.2	1.7	1.7	5.6	10.8
I	No contesta	1.5	0.4	1.9	3.9	2.3	11.0
Total.		15.2	3.3	21.6	217.5	41.4	100.0

### Pregunta 3.

En la maternidad de la ciudad X están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa, según el sexo del recién nacido.

¿Cuál de estos casos te parece más probable?

- a.- Que entre los próximos 10 nacimientos 8 o más sean varones.
- b.- Que entre los próximos 100 nacimientos 80 o más sean varones.
- c.- Las dos cosas anteriores son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

En esta pregunta, la respuesta más usual es considerar los dos casos como equiprobables o sea la opción **c** (el 64,8 y 71.0% de los estudiantes de grado octavo y undécimo respectivamente). Este grupo de personas estarían prescindiendo del tamaño de la muestra y, con ello, del estudio de la variabilidad del muestreo produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras, lo cual es el argumento típico del sesgo de la insensibilidad al tamaño de la muestra asociado a la heurística de representatividad.

Si comparamos los resultados, es evidente que en lugar de atenuarse o disminuir el sesgo con la edad y la educación formal recibida en el colegio, este parece acentuarse y aumentar con el tiempo.

De los que contestan la opción **c**, el argumento más frecuentemente utilizado por ambos grupos es afirmar que en igual proporción nacen hombres y mujeres, desconociendo que la propiedad mas relevante, es la mayor variabilidad de las muestras pequeñas, lo cual es evidencia del uso de los sesgos de la insensibilidad al tamaño de la muestra y de insensibilidad a la capacidad predictiva del dato, ambos asociados a la heurística de representatividad.

No obstante, algunos alumnos han dado la respuesta correcta **a** (22.2% y 20.5% de los alumnos de grado octavo y undécimo respectivamente), siendo más frecuente en el caso de los alumnos del grado octavo por un pequeño porcentaje. Pero de estos alumnos, solo el 2% y 5% de octavo y undécimo argumentan la mayor variabilidad de las muestras pequeñas. Esto no descartaría el desarrollo de los sesgos asociados a la heurística de representatividad a lo largo de la adolescencia.

Tabla 9: Respuestas que dan los estudiantes en la pregunta 3. (%).

	a	b	c
Octavo	11.1	5.1	32.4
Once	10.2	3.3	35.5

Total	21.3	8.4	72.3
-------	------	-----	------

Se han considerado los siguientes argumentos:

CURSO	ARGUMENTOS PREGUNTA 3	a	b	c	Total
octavo					
A	La muestra pequeña es más variable	2.0	1.0	0.8	3.8
B	Por igual proporción	0.5	0.8	15.3	16.8
C	Hay mayor proporción en muestras más grandes	0.7	0.7	0.2	1.5
D	Igual probabilidad	0.8	0.5	10.6	12.8
E	Deben nacer más niñas	2.0	0.7	2.2	4.8
F	No se sabe cuantos serán hombres o mujeres	2.3	1.2	14.6	19.4
G	Nacen más niños que niñas	8.3	4.3	13.8	26.6
H	No contesta	4.7	1.2	7.5	13.5
	Total.	21.8	10.3	65.3	100.0
Undécimo					
A	La muestra pequeña es más variable	4.8	0.0	0.8	5.5
B	Por igual proporción	1.0	0.2	24.0	25.1
C	Hay mayor proporción en muestras más grandes	1.1	1.5	0.4	3.0
D	Igual probabilidad	0.4	0.0	13.5	14.3
E	Deben nacer más niñas	1.9	1.1	1.3	4.6
F	No se sabe cuantos serán hombres o mujeres	1.1	1.0	14.1	16.3
G	Nacen más niños que niñas	5.3	1.5	6.5	13.3
H	No contesta	4.6	1.1	10.3	17.1
	Total.	20.5	6.5	71.1	100.0

La respuesta más frecuente en los alumnos de grado octavo, es considerar que nacen más niños que niñas (26.6%), o decir, que no se sabe cuantos serán hombres o mujeres (19.4%) lo cual implicaría que estarían

considerando los sucesos aleatorios como impredecibles, incluso en términos probabilísticos.

En los grados once, las respuestas más frecuentes han sido considerar sólo la igualdad de probabilidad (25.1%) o argumentos que no se corresponden con sus respuestas. En el 17.1% de los casos se da la opción de no respuesta, lo que indica que el alumno no es capaz de argumentar su respuesta.

#### PREGUNTA 4

¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos?

- a.- La fracción de chicos será mayor o igual a  $7/10$ .
- b.- La fracción de chicos será menor o igual a  $3/10$ .
- c.- La fracción de chicos estará comprendida entre  $4/10$  y  $6/10$ .
- d.- Las tres cosas son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

	a	b	c	d
Octavo	9.7	6.0	12.2	21.5
Once	7.1	5.4	14.2	20.9
Total	16.8	11.4	26.4	42.4

En este caso, los alumnos esperan que se vuelva al valor esperado del número de nacimientos al escoger la opción **c** (12.2% y 14.2% de los alumnos de los grados octavos y undécimo respectivamente), la cual es la respuesta correcta. Además, el porcentaje de estudiantes que dio una respuesta simultáneamente correcta a las preguntas 1, 2 y 4 es del 26.8% del total, lo cual sugiere que, incluso aunque los estudiantes consideran equiprobables los resultados de un experimento aleatorio compuesto, su capacidad combinatoria no es suficiente para utilizarla en la evaluación de probabilidades binomiales.



Sin embargo, es también frecuente el uso incorrecto de la regla de Laplace<sup>101</sup> para obtener una respuesta satisfactoria a un problema, lo cual es evidente al observar que el argumento de la equiprobabilidad es el menos utilizado y que prácticamente ningún estudiante de grado once lo utiliza, en contraposición con el 3.2% de los alumnos de octavo.

La mayor parte de los alumnos considera que deben nacer más niños que niñas o en un argumentos similar deben nacer más niñas que niños o bien creer que no es posible predecir el número de niños que nacerá (aproximadamente el 50% del total de estudiantes), lo cual indica una incorrecta percepción del fenómeno de la convergencia de las frecuencias relativas. El problema que se evidencia, es que cuando las personas conocen la frecuencia real del suceso (igual probabilidad en el nacimiento de hombres y mujeres) se espera que esta frecuencia aparezca tanto en un número grande de observaciones como en un número muy pequeño de estas, desconociendo que los procesos de convergencia estocástica solo se producen en series o repeticiones para muestras muy grandes. Luego estos estudiantes estarían cayendo en el sesgo de la insensibilidad al tamaño de muestra.

Lo más probable en ambos grupos es el considerar las tres opciones como equiprobables **d**, (el 41% del total de estudiantes), poniendo de manifiesto la poca capacidad combinatoria.

CURSO	ARGUMENTOS PREGUNTA 4	a	b	c	d	Total
octavo						
A	La muestra pequeña es más variable	0.2	0.0	0.0	3.5	3.7
B	Por igual proporción	0.2	1.0	1.2	4.4	6.9
C	Hay mayor proporción en muestras más grandes	0.3	0.0	0.7	0.3	1.4
D	Igual probabilidad	0.5	2.0	3.2	8.3	14.7
E	Deben nacer más niñas	1.2	5.4	3.0	1.0	11.0

<sup>101</sup> Según la regla de Laplace, la probabilidad de un evento esta dada por la relación entre el número de maneras en que el experimento es favorable al evento versus el número de maneras en que el experimento se podría realizar, cuando los resultados son equiprobables.

F	No se sabe cuantos serán hombres o mujeres	0.7	0.8	5.1	12.3	19.8
G	Nacen más niños que niñas	11.7	1.4	4.7	2.7	20.6
H	No contesta	4.6	1.5	5.9	7.9	20.9
	Total.	19.3	12.3	24.3	40.9	100.0
Undécimo						
A	La muestra pequeña es más variable	1.0	0.0	0.8	4.8	6.5
B	Por igual proporción	0.8	0.2	2.3	2.9	6.1
C	Hay mayor proporción en muestras más grandes	0.2	0.2	0.2	0.2	0.8
D	Igual probabilidad	0.4	0.6	2.9	6.1	10.1
E	Deben nacer más niñas	0.8	6.3	4.2	1.9	13.5
F	No se sabe cuantos serán hombres o mujeres	0.8	1.0	4.2	16.4	23.6
G	Nacen más niños que niñas	9.1	1.1	4.6	0.8	16.2
H	No contesta	1.1	1.3	8.8	8.2	21.7
	Total.	14.3	11.0	28.2	41.7	100.0

### PREGUNTA 5.

Quando lanzamos dos dados simultáneamente:

- Hay las mismas posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
- Hay más posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
- Hay menos posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
- Es imposible saberlo.

Elige la opción que crees más adecuada y razona tu respuesta.

	a	b	c	d
Octavo	6.9	10.0	5.5	26.1
Once	7.3	11.8	2.8	26.8

Total	14.2	21.8	8.3	52.9
-------	------	------	-----	------

Los resultados en esta pregunta parecen desalentadores a la hora de valorar el razonamiento combinatorio de los alumnos. Tan solo 21.8% de los alumnos de ambos grado dan la respuesta correcta **b**.

Los alumnos piensan que, o bien los resultados son equiprobables, haciendo una incorrecta generalización de la regla de Laplace (4.8% y el 9.3% de los estudiantes de octavo y undécimo respectivamente) o, en su gran mayoría, que es imposible saber la respuesta a esta pregunta (aproximadamente el 50% del total de personas). Es decir, se declaran incapaces de aplicar la regla de Laplace, probablemente por dificultad de la enumeración del espacio muestral.

Los argumentos dados por los estudiantes se relacionan con las respuestas a la pregunta número cinco, en la tabla número 14. La mayor parte de los alumnos dan un argumento de representatividad. Esto se pone de manifiesto cuando justifican sus respuestas, argumentando la experiencia (8.1% octavo y 5.6% undécimo) lo cual implica el desconocimiento de la independencia de cada una de las repeticiones y el que los resultados no son equiprobables, o se apoyan en que el resultado es impredecible, lo cual muestra la incapacidad de realizar un inventario exhaustivo del espacio muestral que representa el experimento que implicaría un argumento de tipo combinatorio. Una gran proporción de los estudiantes no argumentan las respuestas, lo que indica que el alumno no es capaz de plantear el porque escogió dicha solución.

CURSO	ARGUMENTOS PREGUNTA 5	a	b	c	d	Total
octavo						
A	Es impredecible o depende de la suerte	6.0	3.3	3.2	38.4	52.5
B	Es equiprobable	2.1	0.7	0.5	1.4	4.8
C	Razonamiento de tipo combinatorio	1.2	1.4	0.2	1.6	5.3
D	Es más difícil que se repita el número	2.6	9.2	2.8	2.5	17.1
E	Por experiencia	0.5	2.6	3.2	1.4	8.1
H	No contesta	1.1	3.2	1.6	0.0	11.8
	Total.	13.6	20.4	11.4	51.8	100.0

Undécimo						
A	Es impredecible o depende de la suerte	3.9	6.8	2.3	35.7	48.8
B	Es equiprobable	4.4	1.0	0.0	3.9	9.3
C	Razonamiento de tipo combinatorio	2.3	2.5	0.0	2.5	9.1
D	Es más difícil que se repita el número	1.2	10.6	0.6	2.3	14.7
E	Por experiencia	1.2	1.9	1.4	0.8	5.6
H	No contesta	1.5	0.8	1.5	6.2	10.2
	Total.	14.7	23.9	6.0	52.9	100.0

### PREGUNTA 6.

Quando lanzamos tres dados simultáneamente ¿cuál de estos resultados es más fácil que ocurra?

- Obtener un 5, un 3 y un 6.
- Obtener dos veces el 5 y una vez el 3.
- Obtener tres veces el número 5.
- Todos estos resultados son igualmente probables.
- Es imposible saberlo.

Nuevamente es la capacidad combinatoria la que le permitirá al estudiante asignar una probabilidad correcta en este tipo de situaciones. Como podemos ver, solamente en 17.9% del total de estudiantes contestan correctamente la pregunta al escoger la opción **a**, apreciándose una gran diferencia entre los dos grupos (21.8% y 14.0% de alumnos de grado octavo y undécimo respectivamente). Esto indicaría que la habilidad de aplicar la regla de Laplace y de realizar un inventario de las posibilidades se perdería con la edad y la educación formal, lo cual permitiría un desarrollo más general del sesgo de la equiprobabilidad.

Igual que en el numeral quinto, es la opción **e** (que manifiesta la imposibilidad de saber cual es el resultado más probable entre las opciones dadas), la escogida más frecuentemente. Se pone de manifiesto la poca capacidad de realizar un inventario exhaustivo o un conteo de todos los elementos del espacio muestral, para asignar una probabilidad que se ajuste a los requerimientos normativos.

Es el sesgo de la equiprobabilidad, el que se pone de manifiesto cuando el 30,7% y el 39.1% de los alumnos de grado octavo y undécimo escogen la opción **d**, pero a diferencia de los alumnos que escogen la opción **e**, ello no es debido a la falta de razonamiento combinatorio, sino a que los estudiantes no logran asociar fácilmente los modelos combinatorios a las situaciones en las que el azar interviene. La misma situación se presentaría en los ítems siete y ocho, donde el 16.5% y el 50.9% del total de estudiantes, afirman que los resultados son igualmente probables respectivamente.

Tabla 15: Respuestas que dan los estudiantes en la pregunta 6 (%).

	a	b	c	d	e
Octavo	10.9	2.1	2.1	15.3	19.5
Once	7.0	2.4	1.2	19.6	19.7
Total	17.9	4.5	3.3	34.9	39.2

#### Pregunta 7.

¿Es alguno de este resultado menos probable que los otros dos?

Tabla 16: Respuestas que dan los estudiantes en la pregunta 7 (%).

	a	b	c	D	E
Octavo	8.3	9.6	13.9	7.4	10.4
Once	6.3	6.8	15.4	9.1	12.3
Total	14.6	16.4	29.3	16.5	22.7

Es importante ver que la opción más frecuente entre los estudiantes es la respuesta correcta **c** (29.3% del total), pero solamente 8.9% de los estudiantes contestan correctamente las preguntas 6 y 7. Este resultado podría interpretarse como un error asociado a la heurística de la

disponibilidad, motivado por los cálculos incompletos en el desarrollo de ambos problemas y con unos resultados limitados se asignan probabilidades.

### Pregunta 8

Una ruleta se divide en 5 áreas de igual tamaño. Se da un fuerte impulso a la flecha de la ruleta. ¿Cuál de los siguientes resultados es más verosímil que resulte al girar la ruleta tres veces?

- 215 en este orden exacto.
- obtener los números 2, 1, 5, en cualquier orden.
- obtener los números 1, 1, 5 en cualquier orden.
- a y b son igualmente verosímiles.
- a, b, y c son igualmente verosímiles.

Respuestas dadas en la pregunta número 8 son:

	a	b	d	d	e
Octavo	2.6	13.0	4.8	5.9	23.6
Once	1.5	11.1	2.5	7.4	27.3
Total	4.1	24.1	7.3	13.3	50.9

La respuesta más frecuente es el considerar equiprobables los resultados, lo cual implicaría que se hace una extensión incorrecta de la regla de Laplace, al no tener un inventario total de los posibles sucesos.

Es importante hacer notar que solamente 6 estudiantes contestan correctamente las preguntas 6, 7 y 8, poniendo de manifiesto la baja capacidad combinatoria de los alumnos.

#### 3.6.1.1. DISTRIBUCIONES DE LAS RESPUESTAS.

Presentamos en la Tabla 18 (todos estos resultados se hacen con base en los reportes del anexo 3, en cada casilla se lista la frecuencia relativa con

respecto a la muestra total y la opción escogida) los porcentajes de respuestas de los dos grupos de alumnos a cada pregunta, junto con los valores  $p$  correspondientes al contraste Chi cuadrado (Tabla 19), que se usó para comparar la distribución de respuestas a cada pregunta en los dos grupos de alumnos.

Tabla 18. Porcentaje de respuestas en los dos grupos de estudiantes.							
PREGUNTA	RESPUESTAS CORRECTA %		PRINCIPAL DISTRACTOR %		OTRAS RESPUESTAS %		
	Octavo	Once	Octavo	Once	Octavo	Once	
	n = 610	n = 530	n = 610	n = 530	n = 610	n = 530	
Pregunta 1	e 43.56	e 51.71	d 18.15	d 20.03	a 17.49	a 10.68	
Pregunta 2	e 36.25	e 41.91	c 24.17	c 21.64	d 19.53	d 17.74	
Pregunta 3	a 21.76	a 20.69	c 65.28	c 71.26	b 10.23	b 6.51	
Pregunta 4	c 24.3	c 29.60	d 41.70	d 41.0	a 19.90	a 15.00	
Pregunta 5	b 21.01	b 24.60	d 53.26	d 54.56	a 14.13	a 15.08	
Pregunta 6	a 21.36	a 13.80	e 40.17	e 39.80	d 29.06	d 38.64	
Pregunta 7	c 28.46	c 25.66	e 21.54	e 24.09	b 18.85	d 18.41	
Pregunta 8	b 25.35	b 22.57	e 47.22	e 52.28	d 12.5	d 15.84	

Tabla 19. Porcentaje de respuestas en los dos grupos de estudiantes. Y contraste chi cuadrado			
PREGUNTA	RESPUESTAS CORRECTA %		
	Octavo	Once	P
	n = 610	n = 530	
Pregunta 1	e 43.56	e 51.71	.007
Pregunta 2	e 36.25	e 41.91	.053
Pregunta 3	a 21.76	a 20.69	.031
Pregunta 4	c 24.3	c 29.60	.022
Pregunta 5	b 21.01	b 24.60	.001
Pregunta 6	a 21.36	a 13.80	.002
Pregunta 7	c 28.46	c 25.66	.000
Pregunta 8	b 25.35	b 22.57	.058

### 3.6.1.2 DIFERENCIA EN LOS DOS GRUPOS DE ESTUDIANTES.

Los estudiantes de grado undécimo tuvieron mayor porcentaje de respuestas correctas en los preguntas 1, 2 y 4. Sin embargo, no hubo diferencias significativas en las respuestas en los dos grupos de estudiantes en las preguntas 3 y 5. Los estudiantes de grado octavo tuvieron un porcentaje más alto de respuestas correctas en las preguntas 6, 7 y 8. Como consecuencia de la distribución de las respuestas mostrada en la tabla 19, deducimos un ligero progreso en el razonamiento probabilístico con la edad e instrucción recibida en el segundo grupo de estudiantes y un mantenimiento o incluso empeoramiento del sesgo de equiprobabilidad con la mayor edad e instrucción, lo cual se pone de manifiesto en un mayor porcentaje de respuestas correctas en las preguntas 1 y 2 para el primer caso.

La razón por la cual se estudiaron los cursos octavo y undécimo para nuestra investigación del desarrollo del pensamiento probabilístico, era contrastar como el tiempo de permanencia en la educación formal ayuda al estudiante a formar y consolidar los conceptos en las áreas del lenguaje y la matemática que le permiten argumentar al momento de tomar decisiones. Sin embargo, las concepciones sobre las secuencias aleatorias, las probabilidades binomiales y los inventarios exhaustivos en la solución de



problemas estocásticos no parecen verse favorecidas con la enseñanza formal.

### 3.6.1.3 ERRORES ETECTADOS.

Aunque el 47 % de los estudiantes (535 del total de los alumnos) respondieron correctamente la pregunta 1, ello no indica que la mayor parte de los alumnos utilice un razonamiento normativo en esta pregunta. Para mostrarlo, analizaremos conjuntamente las respuestas a las preguntas seleccionadas. Un gran porcentaje de alumnos (32.7 %) dio una respuesta correcta simultáneamente a las dos primeras preguntas sobre lanzamiento de monedas. Estos alumnos considerarían todas las secuencias presentadas como igualmente probables, teniendo una concepción correcta sobre las secuencias de resultados en una serie corta de ensayos.

Por otro lado, el 13.7 % de los alumnos que dieron la respuesta correcta en la pregunta 1, dieron una respuesta incorrecta en la pregunta 2, un resultado también señalado por Konold (1993)<sup>102</sup> en sus estudios previos y Serrano (1996)<sup>103</sup>, lo que en opinión de estos autores, indicaría en estos alumnos el enfoque en el resultado aislado. De cualquier manera, el porcentaje de los estudiantes que cambió su respuesta de correcta en la pregunta 1 a incorrecta en la 2 fue más alto en la investigación de Konold (1993)<sup>104</sup> y Serrano (1996)<sup>105</sup> (24%), que en nuestro estudio (13.7 %).

El porcentaje de estudiantes que dio simultáneamente una respuesta correcta a las preguntas 1, 2 y 4 sólo fue el 6.7%, el cual es muy semejante al encontrado por Serrano<sup>106</sup> (1996, el 9 %), lo que sugiere que, incluso aunque los estudiantes consideran equiprobables los resultados del experimento aleatorio compuesto, su capacidad combinatoria no es suficiente para utilizarla en la evaluación de probabilidades binomiales.

---

<sup>102</sup> KONOLD, C. POLLATSEK, A., WELL A., LOHMEIER, J. y LIPSON, A. "Inconsistencies in students' reasoning about probability. Journal for Research in Mathematics Education, Madrid. 1993. Págs. 392-414.

<sup>103</sup> SERRANO L., BATANERO C. ORTIZ. J. y CAÑIZARES J., "Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria". En Educación Matemática. Madrid. 1996. Págs. 7-25.

<sup>104</sup> Opcit.

<sup>105</sup> Opcit

<sup>106</sup> Ibíd.

La respuesta correcta a la pregunta 4 puede obtenerse también mediante un razonamiento incorrecto basado en la heurística de la representatividad, pues esta respuesta correcta sería también la más representativa. Para evaluar el porcentaje de estudiantes que razona consistentemente según la heurística de la representatividad hemos estudiado el porcentaje que elige la respuesta incorrecta en las preguntas 1 y 2 y dan una respuesta correcta en la pregunta 4. Este porcentaje fue del 17.5% muy semejante al 22 % obtenido por Serrano (1996)<sup>107</sup> que correspondería a los alumnos que, usan en su razonamiento la heurística de la representatividad.

Basándonos en la respuesta dada a la pregunta 3, encontramos en la gran mayoría de los estudiantes (68.1%) la creencia en la estabilidad de las frecuencias, incluso en pequeñas muestras, y la consideración de que ambos hospitales tienen la misma probabilidad que el 80% o más niños en un día concreto. Esto sugiere que la "ley de los pequeños números", aspecto de la heurística de la representatividad, sería un sesgo muy extendido entre nuestros alumnos.

La dificultad de los estudiantes en las preguntas 5 y 6 no indica necesariamente el sesgo de equiprobabilidad, porque un gran grupo de estudiantes (49.8% en la pregunta 5 y 38.5 % en la pregunta 6) eligen la respuesta "es imposible saberlo", que posiblemente indicaría el enfoque en el resultado aislado, mientras sólo 13.5% en la pregunta 5 y 5.3% en la pregunta 6 eligen la respuesta a) y b) respectivamente, que sería la esperada en los estudiantes con sesgo de equiprobabilidad. Puesto que en las investigaciones de Lecoutre<sup>108</sup> no se incluye la opción "es imposible saberlo", pensamos que parte de los resultados que esta autora atribuye al sesgo de equiprobabilidad, podrían deberse en realidad a un razonamiento según el "enfoque en el resultado". De todas formas, un gran número de estudiantes parecen mostrar el sesgo de equiprobabilidad en sus respuestas a las preguntas 5 (14.2 %), 6 (34.7 %), 7 (16.3%) y 8 (50.7 %) al dar como respuesta a), d), d) y e) respectivamente.

Finalmente indicamos que sólo 66 estudiantes (5.77 %) dieron respuesta correcta a la mayoría de las preguntas del cuestionario (53, 11 y 2, dieron 5,

---

<sup>107</sup> *Ibíd.*

<sup>108</sup> LECOUTRE, M. P. "Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations" ..Educational Studies in Mathematics No. 23. 1992. Págs. 557-568.

6 y 7 respuestas correctas), mostrando un razonamiento combinatorio suficiente y un razonamiento probabilístico adecuado. Por otra parte 110 estudiantes que equivale al 9.63%, no dieron ninguna respuesta correcta. Ello señala la gran dificultad de las tareas probabilísticas, incluso al finalizar la secundaria, por lo que los alumnos que ingresan en los cursos de estadística en los primeros años de universidad pudieran tener una serie de creencias erróneas sobre probabilidad que dificultaría notablemente su comprensión de la inferencia estadística.

#### 3.6.1.4. ANÁLISIS DE ARGUMENTOS

Para completar nuestro estudio y profundizar en los tipos de razonamiento de los alumnos, se les pidió justificar respuesta en las cinco primeras preguntas del cuestionario. Puesto que las preguntas 6, 7 y 8 evalúan el mismo conocimiento que el 5, no se consideró necesario pedir al alumno una justificación en los mismos. A continuación describimos brevemente la tipología de razonamientos de los alumnos.

*Preguntas 1 y 2:* Los argumentos de los alumnos en estas preguntas se han clasificado de la forma siguiente:

a) *Debe haber aproximadamente igual número de caras y sello o hay la misma probabilidad de caras y sello.* En este apartado hemos incluido los alumnos que manifiestan explícitamente su expectativa en la conservación de la frecuencia relativa de caras y sellos, en relación a la probabilidad teórica, incluso en una secuencia corta, como en los siguientes ejemplos: "*Si la moneda está equilibrada, existe la misma probabilidad de que salga cara o sello*", "*Al lanzar una moneda tienes un 50 % de cara y un 50 % de sello y por lo tanto tienen todas las mismas posibilidades*".

Este argumento es utilizado por el 15% de los estudiantes en la solución de la pregunta 1, de los cuales solo 63 de octavo y 67 de grado once dan una respuesta correcta, mostrando dominio de argumentos frecuenciales o el principio de indiferencia, los otros dan este argumento para justificar una opción incorrecta, lo que sería una respuesta típica de la heurística de la representatividad. En la pregunta 2, el 11.2% de los estudiantes lo utilizan como argumento, de los cuales 46 estudiantes de octavo y 41 de once lo emplean para justificar una respuesta correcta.

b) *Debe haber frecuentes alternancias entre caras y sello.* Estos alumnos se apoyan en una propiedad diferente al considerar, no la tendencia global señalada por la frecuencia, sino la variabilidad, indicada por la alternancia de resultados. Por ejemplo: *"Es más probable una alternancia entre caras y sellos que el que salgan dos sellos o caras seguidas o tres", "Como la probabilidad de que salga cara o sello es del 50 %, en teoría debería salir una vez sí y otra no cara"*.

Este argumento es utilizado por el 11.2% para justificar la respuesta dada en la pregunta 1, y por 9.7% para justificar la dada en la segunda pregunta. La propiedad que estos alumnos fallan en aplicar es la "pérdida de memoria" de una sucesión de Bernoulli, así como la idea de independencia de los ensayos sucesivos. Es también una respuesta típica de la heurística de la representatividad.

c) *Es cuestión de suerte, puede ocurrir cualquiera de las secuencias.* El 29.5% en la primera pregunta y 23.3% en la segunda de todos los estudiantes encuestados justifican la equiprobabilidad de los resultados, no por un razonamiento combinatorio, sino por su creencia en la impredecibilidad de lo aleatorio, o su creencia en la "suerte": *"Según la suerte que tengamos y según la moneda como la tires"*. Un grupo importante de estos alumnos podrían estar razonando de acuerdo con el "enfoque en el resultado aislado" descrito por Konold (1989, 1991)<sup>109</sup>: *"Sólo lanzando la moneda se puede saber la sucesión que sale y que será casi seguramente distinta de la siguiente, todo depende de la suerte"*, dado que 125 y 89 estudiantes de octavo, 91 y 117 de grado once lo utilizaron como razón para dar una respuesta correcta en la 1ª y 2ª pregunta, entonces se puede afirmar que este argumento, es el más frecuentemente utilizado por nuestros estudiantes: *"En cinco tiradas pueden salir cinco cruces o cinco caras y también cualquier otra variante"*.

d) *Hay un patrón regular.* Se alude explícitamente al hecho de que una secuencia aleatoria no debe tener un patrón reconocible, el cual es dado por el 6.4% y 11.3% de los estudiantes como razones en las preguntas 1 y 2: *"Es*

---

<sup>109</sup> KONOLD, C. "Informal conceptions of probability" *Cognition and Instruction*, No. 6. 1989. Págs. 59-58

*demasiada casualidad que se lleve un orden en la lista de los resultados", "Es muy difícil que se alternen con tanta regularidad".*

e) *Por experiencia propia.* Es el argumento dado por el 14.3% y 9.5% de los estudiantes, como razón en la respuesta a la 1ª y 2ª pregunta. Los alumnos argumentan su experiencia sobre sucesiones obtenidas en juegos de azar, aunque no saben dar una razón para su elección: *"Lo sé, porque he jugado mucho a esto", "Varias veces he hecho esta prueba y casi siempre me ha salido ese resultado".*

f) *Más probable dos caras consecutivas o bien dos sellos consecutivos.* En este caso (1.9% y 4.1% en la 1ª y 2ª pregunta), la razón es contrapuesta a la b), ya que esperan la existencia de algunas rachas y no la constante alternancia de resultados. *"No creo que se alternen las caras y las cruces cada vez que se lancen".* Es el argumento menos utilizado por los estudiantes de los dos grupos.

g) *Es más probable que salgan caras (sellos).* Algunos alumnos conceden una mayor probabilidad a uno de los sucesos, debido a que las monedas, en general, no son perfectamente simétricas (5.6% y 8.1% de octavo y once respectivamente): *"Creo que al tirar una moneda sale siempre más veces la cara que el sello", "Es raro que no salgan más las caras que las sellos", "Siempre salen más las sellos".*

h) *Es más aleatoria, sin regularidad fija.* Esta es la razón dada por el 8.5% y el 10.5% de los estudiantes de grado octavo y once, respectivamente. Se utiliza el argumento contrario al d): *"Lo veo más probable, porque no sigue el mismo orden".*

Por último, un número apreciable de alumnos (7.4% y 12% en las respuestas a la pregunta 1 y 2, respectivamente) indica que no sabe justificar su respuesta, o simplemente la deja en blanco.

En la tabla 20 (en cada casillas se da la frecuencia con relación al valor de n respectivo) se presentan los resultados. En general los alumnos argumentan que, debido al carácter aleatorio, puede obtenerse cualquier resultado (categoría c). También tiene una frecuencia importante el considerar que debe haber aproximadamente igual número de caras y sellos o hay la misma probabilidad de caras y sellos (categoría a) en el caso de argumentar la

respuesta correcta a la pregunta. En la segunda pregunta, se observa la misma tendencia en los argumentos dados.

Tabla 20. Porcentaje de argumentos dados en las respuestas a 1 y 2.					
	Argumentos	Pregunta 1 (%)		Pregunta 2 (%)	
		R. Incorrecta	R. Correcta	R. Incorrecta	R. Correcta
		n = 607	n = 535	n = 707	n = 433
a	Debe haber aprox. igual número de caras y sellos	6.8	24.3	5.8	20.1
b	Debe haber alternancia entre caras y sellos	18.6	2.8	13.4	3.7
c	Es cuestión de suerte	15.7	45.2	12.0	41.6
d	Hay un patrón regular	6.9	5.5	13.3	7.9
e	Por experiencia propia	21.4	6.2	11.6	6.0
f	Más prob. dos caras consecutivas o dos sellos	2.8	0.9	6.1	0.9
g	Es más probable que salgan caras (sellos)	9.9	0.9	12.9	1.8
h	Es más aleatoria, sin regularidad fija.	6.8	10.5	9.9	11.8
No contesta	No contesta	9.2	3.6	12.7	6.2

También se ha apreciado una dependencia del argumento con el tipo de respuesta. El argumento c (impredecibilidad debida a la aleatoriedad) ha estado unido a la opción correcta, tanto en el pregunta 1 como en el 2. En el caso de elegir una sucesión como más probable (pregunta 1) se han utilizado preferentemente las categorías b), c) y e). En el caso de considerar alguna secuencia como menos probable (pregunta 2), se han utilizado los argumentos b), d) y g).

*Preguntas 3 y 4:* Se han considerado los siguientes argumentos:

a) *La muestra pequeña es más variable.* Es este el argumento utilizado en general por el 5% de los estudiantes en las respuestas de la 3ª y 4ª pregunta. Estos serían los alumnos que piensan que, debido al carácter aleatorio del experimento, la variabilidad de la frecuencia relativa disminuye con el número de ensayos, apreciando el fenómeno de la convergencia: *"Porque puede haber una racha de nacimientos de varones en un número pequeño, pero es demasiada casualidad que en cien casos se den ochenta", "Al aumentar la población se estabiliza la proporción"*.

b) *Por igual proporción.* Se argumenta que las dos muestras tienen igual proporción y por ello sus probabilidades son iguales, esta es la razón dada por el 20.5% de los estudiantes en la 3ª pregunta y en el 6.4% en la 4ª. Es la respuesta típicamente descrita en los estudios sobre representatividad. (Bentz y Borovcnik, 1982 b<sup>110</sup>; Kahneman, 1982<sup>111</sup>; Pérez Echeverría, 1990<sup>112</sup> y Serrano 1996<sup>113</sup>): *"Porque es el mismo porcentaje", "Es lo mismo 8 de 10 que 80 de 100"*.

c) *Hay mayor proporción en muestras más grandes.* Es un argumento utilizado por menos del 2% de los estudiantes y en este caso se aplicaría ahora la representatividad, no en función del parecido entre el valor del estadístico muestral y el parámetro proporcional, sino al parecido entre dos características de la muestra -la proporción y su tamaño: *"La muestra sobre cien sujetos, ofrece un margen mayor y es más difícil acertar en el pronóstico", "Teniendo mayores posibilidades de que ocurra el fenómeno en grandes muestras"*.

d) *Igual probabilidad.* En general es un argumento utilizado por el 13% de los estudiantes, el cual es muy similar al argumento b) pero usando el término probabilidad: *"En los dos casos la probabilidad es del 80 %", "A efecto de probabilidad es el mismo resultado"*.

---

<sup>110</sup> BENTZ, H. J. y BOROVCHNIK, M. "Some remarks on empirical investigations on probability and statistics concepts". University of Sheffield. 1982. En D. R. Grey y cols. (Eds.), Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics .págs.. 266 - 275.

<sup>111</sup> KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. (Eds.). "Judgment under uncertainty: heuristics and biases". 1982. Cambridge: Cambridge University Press.

<sup>112</sup> PEREZ ECHEVERRIA, M.P. "Psicología del razonamiento probabilístico". Madrid, 1990.

<sup>113</sup> SERRANO L., BATANERO C. ORTIZ. J.y CAÑIZARES J., "Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria". En Educación Matemática. Madrid. 1996. Págs. 7-25.

e) *Deben nacer más niñas*. No se admiten los datos del problema, alegando que la proporción de niñas debiera ser mayor, argumento utilizado básicamente en el 12% de los casos en la 4ª pregunta. Es una manifestación de la heurística de la representatividad con un nuevo matiz, los datos del enunciado son incorrectos, puesto que esa proporción no puede ocurrir, ni siquiera en una muestra pequeña: *"Lo normal es que nazcan más niñas que niños"*.

f) *No se saben cuantos serán hombres o mujeres*. Es en general el argumento más utilizado por los estudiantes de grado undécimo (16.4% y 23% en la 3ª y 4ª pregunta respectivamente) para ellos, los sucesos aleatorios son impredecibles, incluso en términos probabilísticos. No puede responderse a la pregunta, puesto que no podemos siquiera predecir la probabilidad de los distintos resultados. *"No hay ninguna regla para predecir si serán hombre o mujeres", "Depende del azar y no se sabe lo que sucederá"*.

g) *Nacen más niños que niñas*. Es un argumento similar al e) pero dando mayor probabilidad al nacimiento de hombres y es en términos generales el más usado por los estudiantes de grado octavo (26.2% y 28.3 % en la 3ª y 4ª pregunta respectivamente), aunque en términos generales el 20% de todos los estudiantes lo esgrimen como razón: *"Suelen nacer mayormente más niños", "En estos tiempos suelen nacer más hombres"*.

Por último, un número apreciable de alumnos (15.5% y 22.2% en las respuestas a la pregunta 3 y 4 respectivamente) indica que no sabe justificar su respuesta, o simplemente la deja en blanco.

Con relación a la tabla 21, las respuestas más frecuentes en la tercera pregunta estuvieron relacionadas con la consideración de que nacen más niños que niñas, implicando la no admisión o desconocimiento de los datos del problema (categoría g). Es importante el grupo de alumnos que da una respuesta confusa o no contesta, lo que indica que el alumno actúa por intuición, pues no es capaz de argumentar su respuesta. Los argumentos correctos, a) en la tercera pregunta y d) en la cuarta, es una de las más utilizadas con relación a la opción correcta, mientras que los b), f) y



adicionalmente en la cuarta g) respectivamente, están asociados a la incorrecta.

Tabla 21. Porcentaje de argumentos dados en las respuestas a 3 y 4.					
	Argumentos	Pregunta 3 (%)		Pregunta 4 (%)	
		R. Incorrecta	R. Correcta	R. Incorrecta	R. Correcta
		n = 902	n = 239	n = 849	n = 292
a	La muestra pequeña es más variable	1.6	15.5	6.1	1.4
b	Por igual proporción	25.1	3.3	6.4	6.5
c	Hay mayor proporción en muestras más grandes	1.6	4.2	0.8	1.7
d	Igual probabilidad	16.2	2.9	12.6	11.6
e	Deben nacer más niñas	3.5	9.2	11.3	13.7
f	No se sabe cuantos serán hombres o mujeres	20.6	8.4	22.4	17.8
g	Nacen más niños que niñas	16.7	32.6	18.5	17.8
No contesta	No contesta	14.4	23.8	21.4	29.5

*Pregunta 5:* Hemos analizado también los argumentos en estas preguntas, clasificándolos en los siguientes tipos:

a) *Es impredecible o depende de la suerte.* Es el argumento utilizado por 50.5% de los estudiantes y análogo al comentado en casos anteriores donde manifiestan su incapacidad de dar una razón ajustada a las propiedades de la probabilidad: "No lo sabemos, los juegos son al azar"; "Depende de la fuerza, la posición, etc...", en que tires los dados y es imposible saber todo con exactitud"; "Por mucho que haga pruebas y lance los dados, jamás podré asegurar lo que saldrá".

b) *Es equiprobable.* Puesto que los resultados elementales son equiprobables, también se consideran equiprobables los resultados de los

experimentos compuestos. Se observa aquí una falta de discriminación entre los sucesos simples y compuestos del espacio muestral producto y es utilizada por el 6.9%: *"Porque la posibilidad de que en un dado salga un cinco y en el otro un seis es la misma que si en un dado sale un cinco y en el otro cinco"; "Hay las mismas posibilidades de obtener dos veces el mismo número que de obtener dos números distintos"*.

c) *Razonamiento de tipo combinatorio*. Estos tipos de argumentos son poco utilizados por los alumnos (9.5% del total) y las respuestas más usuales que emplean están relacionadas con el concepto Laplaciano de probabilidad, más que con el razonamiento combinatorio y se aprecia en el 4.9% y 8.9% de los estudiantes de octavo y undécimo respectivamente:

d) *Es más difícil que se repita el número*: Es dado por el 15.5% de los estudiantes los cuales afirman razones tales como: *"Al ser dados distintos, hay más posibilidades de que salga un 5 y un 6 que dos veces el 5, ya que si en un dado solo hay un 5, en los demás se puede sacar cualquier número mientras que es muy raro que salga un 5 en cada uno de los dados"*.

e) *Por experiencia*. Aunque a veces completan sus justificaciones de otros argumentos diciendo que les suele pasar así a ellos (6.8% de los estudiantes), este argumento tiene entidad propia como para justificar las opciones dadas y sus respuestas tipo suelen ser: *" Porque cuando juego al parques, me suele pasar eso, aunque no siempre"*;

Con relación a la tabla 22, la mayor parte de los alumnos se apoya en que el resultado es impredecible (categoría **a**), es decir el "enfoque en el resultado aislado". Aunque esto es cierto para cada caso particular, sí podremos predecir las frecuencias de los diversos resultados a la larga. Es también bastante frecuente el argumento **d**) de representatividad. También se apoyan en la equiprobabilidad de los resultados o sesgo de la equiprobabilidad (categoría **b**). Sólo 21 alumnos usan un argumento de tipo combinatorio (categoría **c**), para justificar la respuesta correcta. Al comparar el argumento empleado según la opción elegida fuese correcta o incorrecta, vemos que el argumento de impredecibilidad (categoría **a**) está asociado en un mayor porcentaje a la opción incorrecta y el **d** (más difícil el mismo número) a la correcta.

Tabla 22. Argumentos dados pregunta 5.			
Pregunta 5 (%)			
	Argumentos	R. Incorrecta	R. Correcta
		n = 898	n = 240
a	Es impredecible o depende de la suerte	58.0	22.5
b	Es equiprobable	7.7	3.8
c	Razonamiento de tipo combinatorio	6.2	8.6
d	Es más difícil que se repita el número	7.8	44.6
e	Por experiencia	5.8	10.4
No contesta	No contesta	14.5	10.0

En el próximo capítulo se realizará la interpretación de los resultados anteriormente descritos

### 3.6.2. ANALISIS CUALITATIVO.

A continuación se realiza de manera explícita la articulación entre los datos obtenidos y el referente conceptual construido en este trabajo investigativo.

A través de la investigación y la comparación de resultados de los estudiantes de los grados octavo y undécimo fue posible evidenciar la presencia de sesgos asociados al uso de los heurísticos, lo cual se puede interpretar como la no correspondencia de la enseñanza de la matemática y la estadística respecto al desarrollo del pensamiento probabilístico. Cuando se enseña matemática y estadística es frecuente que para solucionar un problema se acuda a la ejecución de un algoritmo, que se basa en la implementación de una secuencia de proposiciones y pasos que conducen a la obtención de una respuesta correcta de un problema determinado. Sin embargo, cuando se trata de resolver problemas fuera del contexto en el cual fueron enseñados los conceptos, los estudiantes tienden a recurrir a

heurísticos, lo cual es adecuado, porque este ayuda a reducir el grado de complejidad del problema. El error aparece en el momento en que en forma descontextualizada el heurístico se aplica sin tener en cuenta las propiedades de la estadística o del contexto donde el problema es planteado.

De acuerdo a lo anterior es posible plantear que el error asociado al heurístico se da por la ausencia de análisis y desconocimiento de las características particulares de la situación, lo cual lleva al estudiante a presentar los sesgos asociados al heurístico, cometiendo errores en la solución del problema y evidenciando su escasa habilidad para la aplicación de conceptos.

Respecto a la contribución de la enseñanza formal en la reducción de la presencia de los sesgos asociados a los heurísticos, las diferencias encontradas en los resultados de las respuestas dadas por los estudiantes de octavo y undécimo son mínimas. Esto se puede interpretar como una falta de intencionalidad explícita en la educación formal para implementar procesos de análisis y posibilitar en el estudiante la argumentación de los procesos en la toma de decisiones.

Uno de los aspectos relevantes es la falta de argumentación, que de acuerdo a los resultados obtenidos, es la falencia más recurrente de los estudiantes sujetos de nuestra investigación, lo cual tiene múltiples posibilidades de interpretación; puede atribuirse a la no comprensión de los procesos aleatorios y las propiedades de los mismos, en el caso de los estudiantes cuyas respuestas a los problemas planteados son incorrectas. O a la ausencia de correlación de la competencia léxica y argumentativa con la competencia lógico matemática, en la cual el estudiante que da la respuesta correcta, no puede explicar como llego a esta conclusión, o sus argumentos van en contravía de la respuesta dada, o son demasiado simples y no logran niveles explicativos adecuados.

Utilizar la semejanza como herramienta en la solución de problemas estocásticos, le permite al individuo llegar a respuestas correctas con bajo costo cognitivo, siempre y cuando tenga presente las limitaciones de esta heurística, lo cual implica necesariamente que el individuo debe conocer en todo momento cuales son las propiedades que limitarían el uso de esta herramienta. Parecería que la educación formal no hace suficiente énfasis en la enseñanza de las propiedades de la estadística y los ejercicios

realizados en clase, incluso refuerzan la presencia de los sesgos asociados a los heurísticos porque estos son repetitivos y descontextualizados. En esta investigación se evidencia que los estudiantes de undécimo tienden a cometer más errores cuando se trata de solucionar problemas estocásticos, porque sus juicios están basados en las sucesiones que mejor representan los resultados, es decir en la semejanza más que en la frecuencia y el tamaño de la muestra, lo cual está asociado con el heurístico de la representatividad.

Los argumentos simples, tales como: “es cuestión de suerte”, “no hay respuesta”, “por experiencia propia”, reflejan la tendencia de los adolescentes de salir fácilmente del problema, tomando decisiones rápidas y no importando si las mismas son correctas o no. Pareciera que la respuesta rápida es lo reforzado académicamente y que la educación formal no da el suficiente valor a la reflexión y al análisis previo en situaciones determinadas que requieren del estudiante tomar una decisión. El heurístico de ajuste y anclaje y la utilización de la semejanza explica esta tendencia, en la cual los estudiantes tienden a evocar lo último que les ha sucedido y que tiene similitud con el problema planteado, para sin el análisis necesario optar por la respuesta que se le parece más a su último recuerdo. Ahora bien, considerar los sucesos aleatorios como impredecibles incluso en términos probabilísticos, demuestra la falta de habilidad de los estudiantes para realizar inventarios exhaustivos a partir del cual determinar de los sucesos dados, el más probable.

Lo anterior está conectado con la excesiva confianza que los estudiantes tienen en un pequeño número de repeticiones, lo cual implica cometer el error de pensar que lo que ocurre en la población se debe reflejar en una pequeña muestra, por cuanto es mayor la variabilidad en pequeñas muestras. Se encuentra una tendencia a omitir los antecedentes históricos y todos los datos que hacen parte de la información del problema. A los adolescentes se les facilita analizar contextos pequeños, inmediatos y no realizar inventarios exhaustivos de las diferentes situaciones para tomar decisiones con mayor posibilidad de acierto en la respuesta y con argumentos válidos y complejos, haciéndose más sensibles a la capacidad predictiva del dato. Intencionalidad que no parece clara en la educación formal, lo cual se hace evidente en la respuesta dada a la pregunta 3, en donde los estudiantes de grado octavo dan una respuesta correcta en mayor proporción que los de grado undécimo, además escogen la opción c en menor proporción que los de grado 11. Esta opción c, evidenciaría que el

sesgo de la “falacia del jugador” se acentúa con la edad y probablemente con el nivel académico.

Se esperaría que la capacidad combinatoria aumentara con el grado de escolaridad del adolescente y que asignaturas como química, física, matemática y estadística, contribuyeran a su desarrollo, sin embargo los resultados encontrados en esta muestra de estudiantes, evidencia que no es así, puesto que en las preguntas (3 y 4), que abordan este aspecto lo desarrollan mejor los estudiantes de grado octavo. Lo mismo ocurre con el uso incorrecto de la regla de Laplace, desconociendo la equiprobabilidad y la independencia de los resultados. Los adolescentes optan por no responder y quienes responden evidencian en sus argumentos la poca capacidad para predecir datos. Posiblemente la educación formal prepara al estudiante en la solución de ejercicios concretos, repetitivos y descontextualizados, donde la solución es única y la exigencia a nivel interpretativo y argumentativo es mínima, porque se requiere del estudiante la reproducción de una serie de pasos que lo conducen a la respuesta correcta; es claro que este tipo de situaciones no posibilita el desarrollo del pensamiento probabilístico.

Probablemente si se generaran espacios en los cuales se exigiera al estudiante enfrentarse a problemas en los cuales confluyen múltiples situaciones que él puede reconocer en su cotidianidad y que no admiten respuesta única, el adolescente se vea avocado a plantear diferentes respuestas de acuerdo al nivel de complejidad planteado en el problema y motivado a profundizar en las variantes de una misma situación, buscando información, interpretándola, aplicándola a la situación específica, que lo lleven a formular diversas hipótesis y le exijan implementar métodos de demostración. Todo esto potenciaría el reconocimiento de situaciones aleatorias, sus propiedades y por ende el desarrollo del pensamiento probabilístico en los adolescentes, enriqueciendo su competencia lógico matemática e interpretativa.

La incorrecta utilización de la regla de Laplace que se evidencia en las respuestas 5, 6, 7 y 8, confirma la interpretación planteada en los párrafos anteriores, mostrando poca capacidad en los estudiantes para realizar análisis de tipo combinatorio y se mantiene la tendencia de un número mayor de estudiantes de octavo que responden correctamente en comparación con los de grado undécimo,. Esto confirma nuestra hipótesis, respecto a la ausencia de intencionalidad explícita de la educación formal, para actuar en la minimización de los sesgos asociados a los heurísticos, por lo cual dichos sesgos van aumentando a medida que el adolescente avanza en su formación

académica y es cada vez mas evidente su falta de capacidad para asignar probabilidades.

### **3.7. IMPLICACIONES EDUCATIVAS PARA MINIMIZAR LOS ERRORES Y SESGOS EN LOS JUICIOS PROBABILÍSTICOS Y CONTRIBUIR A DESARROLLAR EL PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO.**

Para el desarrollo de estas implicaciones educativas, retomamos el planteamiento de Flórez Ochoa, Rafael (2000) respecto a que “la pedagogía tiene como objetivo el estudio y diseño de experiencias culturales que conduzcan al progreso individual en su formación humana. La pedagogía, es un disciplina humanista optimista, que cree en las posibilidades de progreso de las personas y en el desarrollo de sus potencialidades”.<sup>114</sup> Es decir la formación de los estudiantes.

Formación, que constituye un proceso asociado al humanismo e inseparable de la cultura, la enseñanza-aprendizaje y las competencias personales. De tal manera, que aunque la palabra formación se deriva del cultivo de las capacidades previas, va más allá de ellas en cuanto se trata de la apropiación de aquello en lo cual y a través de lo cual uno se forma “formación es un concepto genuinamente histórico. El resultado de la formación no se produce al modo de objetivos técnicos, sino que surge del proceso interior de la formación y conformación y se encuentra por ello en constante desarrollo y progresión”<sup>115</sup>. Ente este mismo orden de ideas, Flórez O. Rafael (2000), plantea que la formación es “la cualificación y el alcance que logran las personas, sobre todo en sensibilidad, inteligencia, autonomía y solidaridad”<sup>116</sup>.

Y finalmente la competencia, entendida esta como una acción situada, que se define en relación con determinados instrumentos mediadores que llevan a reconocer la diferencia entre aprendizaje intuitivo y el aprendizaje como producto de una enseñanza consciente e intencionada propiciada por un docente a través de prácticas educativas.

---

<sup>114</sup> FLÓREZ OCHOA, RAFAEL (2000). Docentes del siglo XXI. Cómo desarrollar una práctica docente competitiva. Bogotá, Editorial McGraw-Hill. Pág. 19

<sup>115</sup> H.G. Gadamer (1984). Verdad y método. Madrid, Editorial Sígueme. Pág. 49

<sup>116</sup> FLOREZ OCHOA, RAFAEL. Docente del siglo XXI. Cómo desarrollar una práctica docente competitiva. Bogotá, Editorial McGraw Hill 2000.

La propuesta desarrollada parte de las siguientes premisas básicas para el desarrollo del Pensamiento Probabilístico:

- Los heurísticos son factibles de ser reconocidos y además que se pueden elaborar estrategias pedagógicas que le permitan al individuo enfrentar los sesgos que son inducidos por el desconocimiento de propiedades estadísticas: sensibilidad al tamaño de la muestra, sensibilidad a las probabilidades a priori, sensibilidad predictiva del dato, y la independencia de eventos.
- Que estas estrategias deben ser tales que permiten al individuo llevar a un nivel superior estas reglas cognitivas que le ayudan con bajo costo interpretar, asignar probabilidades y enfrentar la realidad.
- El significado de los objetos matemáticos depende del contexto y situaciones problemáticas involucradas.

### **3.7.1. IMPORTANCIA DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO EN ADOLESCENTES**

Por adolescencia solemos entender una etapa que se extiende, grosso modo, desde los 12-13 años hasta aproximadamente el final de la segunda década de la vida. Por tratarse de una época de transición en la que ya no se es niño, pero en la que aún no se tiene status de adulto, la toma de decisiones tiene unas características especiales: aún están en el sistema escolar, dependen de sus padres y viven con ellos, están realizando la transición de un sistema de apego en gran parte centrado en la familia, a un sistema de apego centrado en el grupo de iguales, a un sistema de apego centrado en una persona del otro sexo; por sentirse miembros de una cultura de edad (cultura adolescente) que se caracteriza por tener sus propias modas y hábitos, su propio estilo de vida, sus propios valores; por tener preocupaciones e inquietudes que no son ya las de la infancia, pero que todavía no coinciden con las de los adultos.<sup>117</sup>

---

<sup>117</sup> COLL CESAR Y ALVARO MARSHESI. Desarrollo Psicológico y Educación I. Psicología Evolutiva. Alianza Editorial. Madrid. 2001.



Los heurísticos, son fundamentales en la formación del adolescente porque promueven el mejoramiento de las habilidades para resolver problemas, ya que un heurístico esta formado por un grupo de procesos problematicos entre los cuales se encuentran la formación del interés cognoscitivo, el reconocimiento de los patrones propios de resolución, el reconocimiento del problema, la formulación de hipótesis, la elaboración de estrategias de resolución, la ejecución de resolución del problema, la regulación de procesos, así como las soluciones halladas a los problemas y la promoción de nuevos procesos de resolución.<sup>118</sup>

Aún cuando es claro que existen dos posiciones respecto a la adolescencia: una que habla de tensiones y dramas como elemento caracterizador de la adolescencia, la otra que enfatiza el carácter culturalmente determinado de la forma en que se vive este periodo de la vida humana, es igualmente claro que existen algunos datos que son incuestionables y que tienen que ver con abandonos escolares, con suicidios o intentos de suicidio, embarazos precoces indeseados, consumo, abuso y adicción a sustancias psicoactivas y en general dificultades importantes de ajuste a la familia. Por lo cual el uso de juicios probabilísticos es fundamental para la toma de decisiones, no solo para ejercicios y problemas que requieren de la matemática y la probabilidad, sino también relacionados con diversos contextos sociales y con su vida diaria. Es importante preguntarse que lleva a estos adolescentes a tomar decisiones como las descritas, que análisis hicieron (si es que lo hicieron) de su situación y de la probabilidad de salir del problema, para que la decisión de tal forma que afecta considerablemente su proyecto y calidad de vida.

Posibilitar que los adolescentes lleven a un nivel superior estas reglas cognitivas, les permitirá desarrollar habilidades para interpretar, asignar probabilidades y enfrentar la realidad, acercando la cotidianidad a una formación académica que con frecuencia son poco motivantes, sin una clara utilidad para su vida.

A continuación se presenta un decálogo de implicaciones, construidas a partir de la investigación realizada y de los aportes previos de autores que han intentado dar aportes para el desarrollo del pensamiento probabilístico.

---

<sup>118</sup> GARCIA GARCIA JOSE JUAQUÍN. "Didáctica de las ciencias resolución de problemas y desarrollo de la creatividad".1998. pág. 118.

### 3.7.1.1. CONTEXTUALIZACIÓN.

*Contextualice los ejercicios de desarrollo de pensamiento probabilístico con la vida cotidiana del adolescente.*

El desarrollo del pensamiento probabilístico, requiere implementar estrategias motivantes en los estudiantes, por cuanto existe la tendencia a asimilarlo a situaciones abstractas que para el estudiante carecen de “utilidad” en su vida, así que la invitación a los docentes es la de contextualizar los ejercicios en la generación adolescente actual.

Presentar problemas relacionados con el medio ambiente del alumno y con su vida diaria, que los haga mayormente significativos y que generen un interés cognoscitivo en el estudiante; estos problemas pueden referirse al porqué del funcionamiento de las cosas, de la ocurrencia de los fenómenos naturales, a la necesidad de satisfacer requerimientos o condiciones dentro de una situación perteneciente a la vida diaria o a la aplicación práctica de conceptos y teorías.

#### **Ejemplo:**

*Para trabajar el sesgo de Insensibilidad al tamaño de la muestra en el Heurístico de representatividad:*

*La participación de los adolescentes en relaciones sexuales es muy elevada, y produce cada año en Estados Unidos un millón de embarazos en adolescentes, la mayoría de ellos no planeados ni deseados. De los cuales el 50% son bebés que nacen vivos y el los restantes son partos malogrados o abortos inducidos. Sin embargo el porcentaje exacto varía de unos días a otros. A veces es más alto del 50% y a veces es menor.*

*Durante un año cada ciudad ha registrado los días en los que un 60% bebés nacieron vivos. ¿Qué ciudades crees que ha registrado más días en lo que esto haya ocurrido? ¿Es posible que lo que es válido en el caso del 60% o más se radicalmente distinto cuando se llega 100% (todos los bebés nacen vivos)? ¿Qué ocurre cuando más del 80% de los bebés nacen vivos?*

### **3.7.1.2. ANALISIS DE PROCESO.**

*Organice el espacios académicos donde los estudiantes tengan la oportunidad de analizar en profundidad el proceso de toma de decisión que los llevo a elegir un opción en una situación determinada.*

Lo probabilística no es solamente lo referente a números, así que las situaciones que inviten a los estudiantes a pensar, a argumentar, es lo fundamental, no tanto la “respuesta correcta”, sino el análisis del proceso de la toma de decisión. Es importante entonces enseñar a pensar, planteando ejercicios didácticos dirigidos, que conduzcan a mejorar la capacidad de razonamiento probabilístico al resolver problemas e incluyan aspectos como el control y aislamiento de variables, el uso de la probabilidad, el reconocimiento de correlaciones y la lógica combinatoria.

Al respecto Bourdieu (1978) señala lo siguiente “no basta actuar para entender. La intervención sino esta respaldada por una teoría que dé cuenta de ella, se mueve a ciegas, inconsciente de los efectos que produce, incapaz de reconocer límites y abrir posibilidades, inhabilitada para la crítica y el perfeccionamiento; condenada si se quiere a ser copia de sí misma”. Para ayudar a minimizar los sesgos que presentan los estudiantes en el momento de realizar un juicio se debe tener en cuenta en orientar adecuadamente sobre las herramientas heurísticas para el reconocimiento de los patrones propios de resolución de un problema los cuales se pueden posibilitar utilizando los siguientes procedimientos:

- ✓ **Presentar al alumno un problema y luego pedirle que lo resuelva,** para que trate de representar en forma ordenada, mediante un esquema la ruta que contemple los pasos que siguió para resolverlo, indicándole que en su esquema diagrama debe incluir los datos, variables, o incógnitas tenidas en cuenta, las fases de resolución del

problema, los procesos y operaciones correctas e incorrectas que ha utilizado, al igual que los procedimientos abandonados. en el proceso de resolución.

- ✓ **Pedirle al alumno que escriba los pasos** que utiliza cada vez que se enfrenta a un problema.
- ✓ **Establecimiento de subobjetivos:** Esta herramienta se utiliza luego del análisis de metas y fines del problema y consiste en resolverlo por partes, de acuerdo al grupo de fines y metas que ya se ha determinado, es decir de forma parcial para finalmente obtener una solución completa, esto requiere de la capacidad para fraccionar el problema y poder trabajarlo punto por punto, por lo que si no se puede manejar alguna de esas partes, ésta debe ser descompuesta también en partes más pequeñas.
- ✓ **Simplificación:** Esta herramienta consiste en la reducción de problemas complejos, eliminando algunas de sus variables, o sustituyendo el problema por una versión más simplificada que contiene sólo las características centrales. Otras formas de simplificar el problema son: Solucionar un problema abstracto surgido a partir del problema real y utilizar el patrón de resolución seguido de la resolución del problema real; concentrarse en una situación concreta más sencilla, construir modelos a escala que faciliten la resolución del problema y realizar experimentos de simulación.

### **Ejemplo:**

*Analice la siguiente situación y decida si esta de acuerdo con la conclusión planteada.*

*Dos personas que viven en distintas regiones pueden considerarse igualmente felices, pero cuando una de esas personas se compara con la otra tiende a considerar que esta es más feliz si vive en una región de mejor clima o en la que el acceso a diversiones o bienes culturales es mayor. La percepción de lo felices o desgraciados que somos es, por tanto, subjetiva y, en el sentido clásico, irracional.*

### 3.7.1.3. SITUACIONES SIGNIFICATIVAS.

*Permita al estudiante seleccionar dentro de un grupo de situaciones problema, aquella que sea para él personalmente significativa, es decir una situación problema que realmente quisiera poder solucionar.*

La identificación de una situación problemática implica una toma de conciencia acerca de lo que es desconocido, es decir aquello que debe ser buscado y sus probabilidades de solución “visualizar un problema es agregar algo definitivo al conocimiento, reconocer un problema que puede ser resuelto y que vale la pena resolver es de hecho un descubrimiento por su propia naturaleza”<sup>119</sup>.

#### **Ejemplo:**

Para trabajar el sesgo de Insensibilidad a las probabilidades a priori en el heurístico de representatividad

Adaptación del problema clásico adelantado por Kahneman y Tversky.<sup>120</sup>

Divida a su grupo de estudiantes en tres subgrupos

- ❖ *El primer grupo debe evaluar la frecuencia en la población de un listado de situaciones:*

---

<sup>119</sup> POLANYI 1973 Citado por GARRET, R.M. “Resolución de problemas, creatividad y originalidad” Revista chilena de educación Vol. 14 N1-12 1999. Pág. 21.

<sup>120</sup> KAHNEMAN, D., Y A. TVERSKY. “Choice, values and frames”. Cáp. 11 de. 1986. Pág. 52.

TIPO DE SITUACION	PROBABILIDAD ESPERADA	PROBABILIDAD
Las madres solteras deciden quedarse con sus bebés.		
Las madres solteras dan sus hijos para que los familiares los adopten.		
La maternidad entre las adolescentes solteras es una tragedia.		
Las adolescentes que quedan embarazadas se casan con el padre del bebé.		
Las adolescentes embarazadas obtienen un buen trabajo.		
Las adolescentes embarazadas interrumpen sus estudios.		

**TABLA 23. EJERCICIO DE PROBABILIDAD**

- ❖ *El segundo grupo recibe la siguiente descripción: A los padres de Laura (adolescente de 15 años de edad), no les gusta su novio porque plantean que es grosero, y no es buena persona, además bebe demasiado y tiene mala reputación, es demasiado viejo para ella muy inteligente, aunque carece de creatividad. El embarazo aumento las objeciones y Laura no es capaz de llegar a un acuerdo con ellos, por lo cual acuden a la ayuda de un Psicólogo. En la sesión con el Psicólogo Laura relata que fue solo una relación sexual y que no se cuidaron, que ella no tiene claros sus sentimientos, porque son incompatibles en muchas cosas.*

*La tarea consiste en evaluar la semejanza entre esta descripción con cada una de las situaciones de la tabla 23 y seleccionar la decisión que consideran tomo Laura.*

- ❖ *El tercer grupo de estudiantes recibe la misma descripción de Laura y los siguientes complementos: La descripción de*

*la situación de Laura es de un caso sucedido el año anterior. Laura es actualmente vive en el mismo barrio. Por favor, puntúe las siete situaciones de la tabla proporcionando la probabilidad de que Laura haya tomado una de las decisiones descritas.*

#### **3.7.1.4. ZONA DE DESARROLLO PROXIMO.**

*Trabaje en zona de desarrollo próximo: “lo que el estudiante puede hacer hoy con ayuda del docente, lo podrá hacer mañana por sí solo”.*

“La zona de desarrollo próximo es la diferencia entre el nivel de desarrollo real actual (ZDR) y el nivel de desarrollo potencial, determinado mediante la resolución de problemas con la guía o colaboración de adultos o compañeros más capaces”<sup>121</sup>

El concepto de zona de desarrollo próximo en relación con la enseñanza comprensiva, a la cual David Perkins (1995) atribuye a la pedagogía de la comprensión una serie de características que podrían ser sugerentes para las prácticas universitarias “ésta debe favorecer el desarrollo de procesos reflexivos como la mejor manera de generar la construcción del conocimiento, porque estos procesos incorporan el nivel de comprensión epistemológico, esto es, el modo como se formulan las explicaciones y justificaciones en el marco de las disciplinas. También tenderá a la resolución de problemas; considerará las imágenes mentales preexistentes con el objeto de construir nuevas, atendiendo a las rupturas necesarias; favorecerá la construcción de ideas potentes y se organizará alrededor de temas productivos centrales para la disciplinas, accesible a docentes y estudiantes, ricos en ramificaciones y derivaciones. Manera de superar el conocimiento frágil, el pensamiento pobre y la búsqueda trivial de muchas prácticas”.<sup>122</sup>,

---

<sup>121</sup> COLL CESAR Y ALVARO MARSHESI. Desarrollo Psicológico y Educación II. Psicología de la Educación. Alianza Editorial. Madrid. 2001.

<sup>122</sup> PERKINS, DAVID (1995), citado por Litwin, Edith en: Configuraciones Didácticas. Pág. 100

- ✓ **Preguntar** a los estudiantes por aquello que se conoce y no se conoce de la situación propuesta en el aula de clase, con el fin de que ellos separen lo conocido de lo desconocido.
  
- ✓ **Pedirle a los alumnos que elaboren una lista de interrogantes** sobre una situación que se presente en el aula y que luego, la clasifiquen en orden de importancia, es decir, que elaboren preguntas gnoseológicas de búsqueda con respecto a la situación.
  
- ✓ **Interrogar a los alumnos sobre posibles nuevos puntos de vista y soluciones** a una situación problema que se supone ya resuelta, así como también por aquellas cosas que no han sido contempladas en la solución propuesta al problema.
  
- ✓ **Subir la cuesta:** Esta herramienta heurística es derivada de la teoría de procesamiento de la información y se basa en la suposición de que resolver un problema es acercarse progresivamente del estado inicial del problema al estado final, es decir a su solución y es por ello que la resolución implica la aparición de estados intermedios entre el estado inicial y el estado final, que resultan de aplicar varias y diferentes operaciones al estado inicial, a los que a su vez, se pueden aplicar varios operadores diferentes que producen más estados intermedios; repitiéndose esta secuencia muchas veces antes de lograr la consecución del estado final. La utilización de esta herramienta concibe la existencia de varias vías de resolución a partir del estado inicial pero solamente la factibilidad de una o de un pequeño número de ellas.

***Ejemplo: La falacia del jugador:***

*Los señores Buena fe tienen cinco niñas y ningún niño.*

*Señora Buena fe: ¡Cuánto espero que nuestro próximo bebé no sea otra niña!*

*Señor Buena fe: Querida después de cinco niñas, forzosamente tiene que ser un niño. ¿Tendrá razón el buen señor?*



### 3.7.1.5. CON AMIGOS SE APRENDE MEJOR.

Esta posición ha sido mantenida por investigadores constructivistas que pueden considerarse a medio camino entre las aportaciones piagetianas y cognitivas y las vygotskianas. Por ejemplo, por los que han mantenido que la interacción social produce un favorecimiento del aprendizaje mediante la creación de conflictos cognitivos que causan un cambio conceptual. Es decir, el intercambio de información entre compañeros que tienen diferentes niveles de conocimiento provoca una modificación de los esquemas del individuo y acaba produciendo aprendizaje, además de mejorar las condiciones motivacionales de la instrucción. Para posibilitar el desarrollo del pensamiento probabilístico es importante:

- ✓ Poner de tarea al alumno el elaborar un manual de instrucciones para sus compañeros, en el cual les explique los pasos necesarios para que ellos puedan resolver eficazmente problemas.
- ✓ Formar parejas de alumnos en las cuales uno de ellos resuelve el problema expresando en voz alta lo que hace en el proceso de resolución, y el otro, registra esos procesos.

#### **Ejemplo**

*Por parejas discutir y argumentar la siguiente afirmación, luego defender su respuesta en una plenaria.*

*Hay muchos jugadores convencidos que podrán ganar a la ruleta esperando a que se produzca una larga racha de rojos y apostando entonces al negro. ¿Servirá de algo este sistema?*

### 3.7.1.6. TRABAJO EN EQUIPO.

*El desarrollo del pensamiento probabilístico es responsabilidad de todo el grupo de docentes.*

Decidir, argumentar, es indispensable en todos los espacios académicos, “las probabilidades subjetivas”, deben convertirse en cotidianas en todos los docentes, porque fortalecen las competencias de interpretación y argumentación, básicas en el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Tomar tópicos pertenecientes a otras áreas del conocimiento, como contextos para situaciones problema que incluyen conceptos y principios de un área específica, posibilita la actividad constante de los estudiantes en torno al los turísticos y de esta forma contribuir al desarrollo del pensamiento probabilístico.

García propone una serie de estrategias heurísticas para que el docente ayude a mejorar la eficacia y la eficiencia con la cual los alumnos elaboran las estrategias de resolución para resolver problemas, estrategias que han sido reseñadas por gran cantidad de autores<sup>123</sup> como lo indica en su libro: Todos los docentes pueden asumir en sus espacios académicos:

- ✓ **La Interrogación Gnoseológica:** Esta herramienta consiste en preguntarse cuestiones referidas al estado inicial del problema, los conocimientos requeridos para resolver el problema y los procedimientos que pueden ser utilizados en su resolución. Estas preguntas pueden ser: ¿Qué condiciones presenta el problema?, ¿Qué información poseo acerca del problema?, ¿Qué nueva información necesito?, ¿Cómo puedo encontrar lo que necesito acerca de...?, ¿Cómo saber cuando he resuelto el problema?, ¿Qué hacer para...?, ¿Qué objetos puede utilizarse?, ¿Qué otra cosa en el experimento puede asegurar el resultado y las condiciones óptimas?
  
- ✓ **Planteamientos ejecutivo a partir de sistemas cualitativos:** Esta herramienta consiste en la elaboración de un plan de decisiones principales a partir de la representación y descripción en términos cualitativos de los aspectos clave del problema, plan de solución que requiere un esquema general que puede servir para guiar la elaboración de estrategias de resolución más precisas y del uso y manejo de diagramas y modelos, que provean los significados necesarios para la resolución del problema.

---

<sup>123</sup> GARCIA GARCIA JOSE JUAQUÍN. “Didáctica de las ciencias resolución de problemas y desarrollo de la creatividad”.1998. Pág. 129-133

**Ejemplo para trabajar el sesgo egocéntrico en el heurístico de accesibilidad**

*Analizar con los estudiantes las siguientes situaciones:*

*Tú tenías un problema con tus padres, consultaste al Orientador del Colegio y te sentiste mejor. Ahora tienes un problema con tu novio(a), ¿vas a consultar con el Orientador del colegio?*

*No hiciste el ejercicio de estadística y pasaste el logro, ¿Dejarías de hacer el ejercicio de Química, para pasar el logro correspondiente?*

**3.7.1.7. VARIEDAD DE CONTEXTOS.**

*Presentar la situación problema de varias formas y en varios contextos, sin que esto implique el cambio de los conceptos y principios requeridos para su solución, para lo cual puede hacer uso de:*

**La Modificación del problema:** Esta herramienta heurística consiste en transformar, adicionar o sustraer la información presente en el enunciado del problema, especialmente la referida a sus variables y condiciones, lo que se puede hacer reemplazando las condiciones o las variables del problema por otras equivalentes, retirando una de ellas para intentar reimponerla de nuevo o recombiniéndolas en formas diferentes, o a través de la introducción de elementos auxiliares como nuevos conceptos, diferentes formas de tratar la información y equivalencias no usuales.

**La búsqueda de patrones análogos:** Esta herramienta consiste en la búsqueda de problemas que presentan similitudes, analogías o equivalencias con el problema a resolver, ya sea en su enunciado, datos, formas de resolución o tipo de respuesta, tratando de encontrar patrones afines con el problema por resolver, para así transferirlos a la nueva situación. El recuerdo de los patrones afines va desde la resolución de problemas ya conocidos y similares al actual es decir con incógnitas o variables parecidas, hasta la construcción de un nuevo problema análogo

actual, pero con menos variables; esta búsqueda de patrones análogos se lleva a cabo gracias al proceso mental denominado transferencia analógica, proceso que implica la capacidad de los individuos de elaborar semejanzas y practicar el razonamiento analógico, y en el que no siempre es fácil ver la analogía crítica existente entre dos problemas.

- ✓ **El Cambio de las condiciones y los contextos** de diversos tipos de situaciones que al parecer son normales y que no presentan aún verdaderos problemas para los individuos.

***Ejemplo: Animales imaginarios:***

*Dibujar en cartulina diferentes animales. Por ejemplo un perro, un cerdo, un tigre y un león. De cada cartón se hacen dos partes, cortando la cabeza. Formar todos los posibles animales combinando cabezas y cuerpos entre sí. ¿Cuántos resultan?*

**3.7.1.8. SITUACIONES COTIDIANAS.**

*Analizar con mayor precisión situaciones que corrientemente no se toman en cuenta por hacer parte de la rutina de los individuos, para lo cual puede hacer uso de:*

- ✓ **La generación acrítica de ideas:** Esta herramienta heurística proviene de la teoría sobre la creatividad y consiste en la emisión por parte del individuo de una gran cantidad de ideas, si que éstas sean sometidas inicialmente a la crítica racional para luego seleccionar de este grupo las más adecuadas, que podrían construir el comienzo del diseño de estrategias de resolución adecuadas para resolver el problema; al utilizar esta herramienta heurística se recomienda imaginar ideas poco corrientes, tener en cuenta que las ideas propias no tienen por qué ser las mismas que se les ocurre a otras personas y que existen en la mayoría de casos muchas maneras de resolver un problema.

- ✓ **La reformulación:** Esta herramienta heurística consiste en replantear el problema, encontrando una manera totalmente distinta de representarlo, es decir de describir el estado inicial del problema y posible estado final al cual se quiere llegar, esto se puede hacer cambiando la notación en la cual está escrito el problema o considerando argumentos para resolverlo, contruidos a partir de la elaboración de contradicciones y contraejemplos.
  
- ✓ **La elaboración de anticipaciones** acerca de lo que sucedería si se mantienen o se cambian las condiciones físicas o las magnitudes que intervienen en una situación.
  
- ✓ **La futurización los contextos** y las situaciones presentes en una situación que aún no se ha construido en un problema reconocido.
  
- ✓ **Caminando hacia atrás:** Esta herramienta heurística consiste en razonar a la inversa, es decir retrógradamente, o sea desde el estado final y deseado del, problema hacia el estado inicial, de fin a inicio, desde lo que se busca a lo dado.
  
- ✓ **De a los estudiantes la oportunidad de experimentar con el computador** en donde pueda hacer una variedad de cálculos y representaciones gráficas. La simulación con el ordenador puede contribuir a mejorar la comprensión del estudiante de las ideas de variabilidad muestral, estadístico y su distribución. Moore (1995)<sup>124</sup>

***Ejemplo: El vestuario de la muñeca:***

*Con una muñeca real o recortable y un número dado de faldas y blusas diferentes, averiguar de cuántos modos distintos puede vestirse la muñeca. Puede usarse el diagrama de árbol y discutirse sobre los errores cometidos por los estudiantes.*

---

<sup>124</sup> MOORE, D. S. "The basic practice of Statistics". New York: 1995. Freeman.

Según Fischbein,<sup>125</sup> este tipo de ejercicios mejora la capacidad de resolver problemas combinatorios en niños y adolescentes, mediante el uso del diagrama de árbol para variaciones y permutaciones.

### 3.7.1.9. FORMACIÓN DE DOCENTES.

*Formación de docentes en heurísticos y sus sesgos asociados.*

Enseñar, no sólo refiere a la competencia del docente para mostrar, explicar y argumentar los contenidos, ya que ésta está interrelacionada directamente con el aprendizaje de los estudiantes, de tal manera, que enseñar implica además tener en cuenta un contexto determinado y con grupos de estudiantes con características particulares.

Lo anterior lleva a abordar la temática de la didáctica, ésta, según González Margarita, (1992)<sup>126</sup> “Es el conjunto de conocimientos teórico- prácticos referentes a enseñar y aprender que conforman un saber, los cuales se sustentan en interpretaciones diferentes sobre los procesos de conocimiento y, enseñanza -aprendizaje. La finalidad de la didáctica es propiciar la información y el desarrollo del conocimiento”. Por lo cual, se requiere formar a los docentes, tanto inicial como continuamente en los heurísticos y sus sesgos asociados, para la comprensión de los mismos y la implementación de estrategias pedagógicas para minimizar dichos sesgos, en pro del desarrollo del pensamiento probabilístico tanto de docentes como de estudiantes.

La preocupación en la enseñanza de la estadística, es identificar los puntos difíciles y errores que cometen los estudiantes al utilizar un heurístico, como está estipulado en el marco teórico estos errores tienen una base psicológica y no es suficiente para superarlos la comprensión de las leyes teóricas de la probabilidad, por eso es importante que el profesor reconozca estos sesgos cuando sus alumnos los manifiestan, para que haga tomar a sus alumnos conciencia de ellos. La enseñanza formal no es suficiente para superar esos

---

<sup>125</sup> FISCHBEIN, E Y GAZIT. “¿Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? Educational Studies in Mathematics, No. 15. 1984.

<sup>126</sup> GONZALEZ P, MARGARITA. “Opción crítica de la didáctica” en Revistas Perfiles Educativos. México, UNAM. 1992. Págs. 35 – 72.

errores, sino que los alumnos necesitan experimentar sobre fenómenos aleatorios. Es importante plantear a los alumnos este tipo de problemas y discutir con ellos sobre sus concepciones erróneas, por lo cual se requiere la formación del docente en el planteamiento adecuado de problemas para desarrollar pensamiento probabilístico.

Los docentes debemos contribuir a minimizar dichos sesgos, desde nuestro trabajo en el aula, es conveniente que el estudiante primero haga predicciones sobre las posibilidades de obtener diferentes resultados en experimentos aleatorios sencillos con recursos tales como ruletas, dados o monedas, luego obtenga datos empíricos de estos experimentos y finalmente compare las probabilidades experimentales generadas con sus predicciones originales -Esta metodología ha sido recomendada por Glayman y Varga (1975)<sup>127</sup>, Godino. (1987)<sup>128</sup>, y Alhgren y Garfield (1991)<sup>129</sup>, entre otros autores, como un camino para ayudar a los estudiantes a construir concepciones e intuiciones correctas sobre los sucesos aleatorios, ya que diversos investigadores han llamado la atención sobre el pobre razonamiento estocástico en sujetos adultos (Kahneman *et al.*, 1982).-

### **Ejemplo:**

*Podemos estimar que la probabilidad de ser asaltado en un determinado barrio de la ciudad es muy alta basándonos en el conocimiento de que una persona próxima fue asaltada en ese barrio. En este caso, el juicio de probabilidad muestra un sesgo dictado por la aplicación del heurístico de disponibilidad (juzgamos como probable lo que es coherente con la información que, por su recencia o su relevancia personal, tenemos a nuestra disposición en ese momento). Este sesgo se mostraría claramente si, a pesar de saber que en otro barrio también se dan asaltos considerásemos, sin embargo, que es menos probable que nos asalten en él.*

### **3.7.1.10. INCLUSIÓN EN EL CURRÍCULO.**

*El desarrollo del pensamiento probabilístico como parte fundamental de currículo.*

<sup>127</sup> GLAYMAN, y VARGA, T. "Las probabilidades en la escuela". Barcelona 1975.

<sup>128</sup> GODINO, J. D. BATANERO, C Y CAÑIZARES, M.J. "Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid. 1987.

<sup>129</sup> AHLGREN, A. GARFIELD, J."Analysis of the probability curriculum. En R. Kapadia y M. Borovcnik. Publicado en: Probability in Education. 1991. Alemania. Págs. 107 -134.

Es fundamental incluir la enseñanza de la estadística y la probabilidad en el currículum actual adelantando la materia al comienzo de la educación básica secundaria e incluso en algunos casos a la enseñanza básica primaria. Es importante, utilizar actividades de enseñanza donde el estudiante primero haga predicciones sobre las posibilidades de obtener diferentes resultados en experimentos aleatorios sencillos con recursos tales como ruletas, dados o monedas, luego obtenga datos empíricos de estos experimentos y finalmente compare las probabilidades experimentales generadas con sus predicciones originales.

El primer paso para comenzar a enseñar probabilidad es asegurarnos que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas, es decir de apreciar algunas características de aleatoriedad. Los estudiantes y en general las personas, no tienen un razonamiento probabilístico adecuado cuando se hacen inferencias intuitivas sobre acontecimientos inciertos, confían en sus heurísticas que aparentemente tienen validez, ya que parecen razonables pero que a menudo los llevan a sesgos predecibles.

***Ejemplo de los tipos de preguntas para detectar los sesgos de los individuos:***

*Marcos es un joven metódico, nada interesado por la política y cuya diversión principal son los ordenadores" ¿Qué le parece más probable?, ¿Qué Marcos sea estudiante de ingeniería ó de humanidades...?*

*Cuando se hacen preguntas de este tipo, la mayoría de la gente tiende a decir que seguramente Marcos estudia ingeniería. Un juicio así resulta, según Kahneman, de la aplicación automática (inmediata, no meditada) del heurístico de representatividad. Suponemos que Marcos estudia ingeniería simplemente porque su descripción encaja con un cierto prototipo o estereotipo del estudiante de ingeniería. Pero esto implica pasar por alto el hecho de que los estudiantes de humanidades o "letras" son mucho más abundantes que los de ingeniería, con lo cual es mucho más probable*



*encontrar estudiantes de humanidades que se correspondan con la descripción de Marcos. (Kahneman 1982).<sup>130</sup>*

---

<sup>130</sup> KAHNEMAN, D., SLOVIC, D.Y TVERSKY, A. "Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. Cambridge University. 1982.

#### 4. CONCLUSIONES

Con la investigación: Aproximación cognitiva al desarrollo del pensamiento probabilístico en estudiantes de media vocacional, se cumplieron los objetivos planteados inicialmente: se realizó la selección, configuración y reelaboración de los ítems y los argumentos, que permitió generar el instrumento para evaluar el pensamiento probabilístico en 1.142 estudiantes de grado octavo y undécimo de los centros educativos distritales de la localidad 15 de Bogotá.

Se identificaron los sesgos de insensibilidad al tamaño de la muestra, insensibilidad a las probabilidades a priori, insensibilidad predictiva del dato, falacia de la conjunción, equiprobabilidad y probabilidad condicional asociados a los heurísticos de representatividad, disponibilidad y ajuste y anclaje a partir de la aplicación del instrumento validado. En el proceso de identificación de estos sesgos se evidenció además, la utilización del sesgo del resultado aislado, por ejemplo, cuando estudiantes que dan respuesta correcta a la pregunta 1, no lo hacen con la pregunta dos, lo cual permite concluir un enfoque de resultado aislado, como planteo Konold<sup>131</sup> en sus investigaciones.

Cuando se analizan los resultados de las respuestas dadas en las preguntas 1, 2 y 4, las cuales determinan el grado de capacidad combinatoria, por parte de los estudiantes en la solución de problemas probabilísticos, se observa que solamente el 6.7% del total de ellos da una respuesta correcta a estos tres ítems, lo que implica que el 93.3% de estudiantes tiene una escasa capacidad combinatoria en la solución de problemas compuestos. Al comparar estos resultados con las investigaciones previas realizadas en otros países, (Serrano, 1996, el 9%)<sup>132</sup>, se observa la semejanza entre los grupos poblaciones sujetos de investigación, con lo cual se puede concluir que el problema del desarrollo probabilístico, no se da solamente en nuestro

---

<sup>131</sup> KONOLD, C. Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 1989. 6, Pág.

59 - 98.

<sup>132</sup> SERRANO, L.; BATANERO, C.; ORTIZ, J. J. "interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato". *SUMA*. 1996. Págs. 43-49.

país y que no existe intencionalidad explícita en la educación formal, de minimizar los sesgos asociados a los heurísticos.

La investigación permitió evidenciar la escasa utilización de las propiedades estadísticas, tales como la independencia y equiprobabilidad de los resultados, para implementar en forma correcta el concepto Laplaciano de la probabilidad; la capacidad predictiva del dato y el tamaño de la muestra, para asignar probabilidades en situaciones concretas. En conclusión los estudiantes a la hora de enfrentarse a problemas estocásticos, desconocen el tamaño de la muestra y la capacidad predictiva del dato, lo cual induce a caer en sesgos tales como: “la ley de los pequeños números” y “la falacia del jugador”, entre otros.

El análisis de correspondencia múltiple permitió identificar la existencia de diferencias entre las respuestas dadas por los estudiantes de los grados octavo y undécimo, encontrando.

Como quedo claro en nuestro referente conceptual, el heurístico es una herramienta útil y apropiada en la solución de problemas, por lo cual el reto educativo es entonces, la reflexión sobre ¿Cómo lograr que los estudiantes reconozcan el valor de la utilización del heurístico en la solución de problemas, sin caer en los sesgos asociados a los mismos?

Para aportar en este sentido, nuestra investigación plantea algunas implicaciones educativas y pedagógicas que posibilitan minimizar errores y sesgos en los juicios probabilísticos y contribuyen a desarrollar el pensamiento probabilístico. En donde es claro que el enfoque institucional es fundamental, porque el aula de clase es un escenario reducido, que se ve afectado por el contexto general del plantel educativo. Así que solo los docentes de estadística, matemáticas y ciencias no bastarían para lograr impacto en la toma de decisiones argumentadas y utilizando enfoques adecuados y ajustados a la normatividad.

Un valor agregado en nuestra investigación, es poner en evidencia que además del desconocimiento de las propiedades estadísticas, los estudiantes de la localidad 15 de Bogotá, tiene problemas en su competencia léxica, y no logran niveles adecuados de argumentación de sus respuestas. Lo cual ratifica que solo una estrategia conjunta que logre convocar a la

comunidad educativa en pleno, mostrará en décadas posteriores, resultados favorables en lo que respecta al desarrollo del pensamiento en todas sus dimensiones, las cuales al parecer están entrelazadas y se influyen mutuamente.

Si bien es cierto que el 94%, de los estudiantes de la población sujeto de investigación no mostraron un razonamiento combinatorio suficiente y un razonamiento probabilístico adecuado, queda la pregunta respecto al 6%, restante, para invitar a próximos investigadores interesados en este tema a indagar sobre el perfil y las condiciones que posibilitan a una franja de la población lograr niveles adecuados de la capacidad combinatoria de interpretación y del desarrollo del pensamiento probabilístico. En contraposición a esta situación positiva, la investigación da cuenta de cómo un 9.63% de estudiantes, tienen respuestas incorrectas en todo el cuestionario, demostrado el poco manejo de razonamiento combinatorio y probabilístico.

Los argumentos dados por los estudiantes se dividen en dos tipos, unos basados en las propiedades estadísticas y otros en la experiencia, que muestra, dos de las tres formas básicas de acceder al conocimiento. Resulta inquietante como después de 8 y 11 años de educación formal, prima en los estudiantes la manifestación de tipo empírico, lo cual deja entrever el poco impacto que la educación formal tiene en el discurso que manejan los estudiantes. Sería interesante realizar investigación de pensamiento probabilístico en sujetos no escolarizados y contrastarlos con los obtenidos en esta investigación y en otras semejantes.

La implementación de las estrategias planteadas en nuestra investigación, posibilitaría que una franja mayor de estudiantes lograra niveles aceptables de razonamiento combinatorio y probabilístico, minimizando los sesgos asociados a los heurísticos y a partir de considerar el desarrollo del pensamiento probabilístico como parte fundamental de currículo y como responsabilidad de todo el grupo de docentes, contextualizar problemas interdisciplinarios, transversales en el currículo, que se relacionen con la vida cotidiana del adolescente. Organizar espacios académicos donde los estudiantes tengan la oportunidad de analizar en profundidad el proceso de toma de decisión que los llevo a elegir un opción en una situación determinada; permitiendo al estudiante seleccionar dentro de un grupo de situaciones problema, aquella que sea para él personalmente significativa, es decir una situación problema que realmente quisiera poder solucionar.

Finalmente, trabajar en zona de desarrollo próximo: “lo que el estudiante puede hacer hoy con ayuda del docente, lo podrá hacer mañana por sí solo”, fomentando el trabajo en equipo porque: con amigos se aprende mejor, presentar la situación problema de varias formas y en varios contextos, sin que esto implique el cambio de los conceptos y principios requeridos para su solución, sin duda mejorara el pensamiento probabilístico de los estudiantes.

## BIBLIOGRAFIA

1. AHLGREN, A. GARFIELD, J."Analysis of the probability curriculum. En R. Kapadia y M. Borovcnik. Publicado en: Probability in Education. 1991. Alemania. Págs. 107 -134.
2. BARDIN, L. "El análisis de contenido". Madrid: Akal. 1986.
3. BAR-HILLEL, M. y WAGENAAR, W. A. "The perceptions of randomness". En G. Keren y C. Lewis (Eds.), A Handbook for data analysis in the behavioral sciences: methodological issues. Lawrence Erlbaum 1993. Págs. 311 - 339.
4. BATANERO, C. y GODINO, J. D. The use of multivariate methods to analyze students' stochastic conceptions. Proceedings of the IV International Conference on 1994.
5. BENTZ, H. J. y BOROVCNIK, M. "Some remarks on empirical investigations on probability and statistics concepts". University of Sheffield. 1982. En D. R. Grey y cols. (Eds.), Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics. Págs. 266 - 275.
6. BOGOYA MALDONADO DANIEL. VINENT SOLSONA MANUEL. "Resultados. Evaluación de competencias básicas en Lenguaje, Matemática y ciencias Naturales". Sexta aplicación. Calendario A. Alcaldía mayor Bogotá. D.C: Secretaría de Educación. Octubre 2001. Pág. 75.
7. BOROVCNIK, M. "Revising probabilities according to new information". En R. Davidson y J. Swift (Eds.), Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics. University of Victoria 1988. Págs. 298 - 302.

8. BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques. No 4 ( 2). Págs.165 - 198.
9. COLL CESAR Y ALVARO MARSHEI. Desarrollo Psicológico y Educación I. Psicología Evolutiva. Alianza Editorial. Madrid. 2001.
10. COLL CESAR Y ALVARO MARSHEI. "Desarrollo Psicológico y Educación II. Psicología de la Educación". Alianza Editorial. Madrid. 2001.
11. CORNEJO, J. M. "Técnicas de investigación social: el análisis de Correspondencias". Barcelona: P.P.U. 1988.
12. DENZIN, N. K. y LINCOLN, Y. S. "Handbook of qualitative research methods" London: 1994.
13. ETXEBERRÍA, J. GARCIA, E. "Análisis de datos y textos". Editorial Ra-Ma, Madrid 1995, Págs. 137-162.
14. FALK, R. "Conditional probabilities: insights and difficulties". En R. Davidson & J. Swift (Eds.), Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics, 1986. Págs. 292 - 297. University of Victoria.
15. FALK, R. Randomness. An ill-defined - but much needed concept. Journal of Behavioral Decision Making, 1991. No 4. Págs. 215 - 226.
16. FISCHBEIN, E. (1975). "The intuitive sources of probability thinking in children". Dordrecht: Reidel 1975. Págs. 120 – 195.
17. FISCHBEIN, E. "The intuitive sources of probabilistic thinking in childrecht: reife". En Seminario sobre "Recursos para el aprendizaje en el aula de matemáticas". Granada 1998 Págs. 20-23.

18. FISCHBEIN, E. Y GAZIT, A. "The combinatorial solving capacity in children and adolescents". Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1988. Págs. 5, 193 - 198.
19. FISCHBEIN, E. Y GAZIT. "¿Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? Educational Studies in Mathematics, No. 15. 1984. Pág. 154.
20. FISCHBEIN, E., NELLO, M. S. Y MARINO, M. S. "Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents". Educational Studies in Mathematics 1991. Págs. 22, 523 - 549.
21. FISCHBEIN, E. Y SCHNARH, D. "Intuitions and schemata in probabilistic thinking. En Puig y A. Gutierrez (Eds), Proceedings of the XX PME Conference . V2., Universidad de Valencia. 1996. Págs. 353-360.
22. FISCHHOFF, B., P SLOVIC Y S. LICHTENSTEIN. "Knowieg with certaninty: The appropriateness of extreme confidence". Journal of Exparimental Psychology: Human Perception and Performance. 1977. Págs. 552 – 564.
23. FLOREZ OCHOA, RAFAEL. "Docente del siglo XXI. Cómo desarrollar una práctica docente competitiva". Bogotá 2000, Editorial McGraw Hill
24. FREUDENTHAL, H. "The empirical law of large numbers" or "The stability of frequencities". Educational Studies in Mathematics, 1972. Págs. 4, 484 - 490.
25. GARCIA GARCIA JOSÉ JOAQUÍN. "Didáctica de las ciencias resolución de problemas y desarrollo de la creatividad".1998. Págs. 129-133
26. GIL FLORES, J. "Análisis de datos cualitativos". Barcelona. 1994. Pág. 184.



27. GLAYMAN, y VARGA, T. "Las probabilidades en la escuela". Barcelona 1975. Pág. 132.
28. GODINO J. D. y BATANERO, C. "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos" Tomado de Recherches en Didactiques des Mathématiques, 1987. Vol. 14 Págs. 325-355.
29. GODINO, J. D. BATANERO, C Y CAÑIZARES, M. J. "Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid. 1987. Págs. 140 – 182.
30. GONZALEZ L. MARÍA JOSÉ, "Introducción a la psicología del pensamiento", Editorial Trotta, Madrid 1998, Pág. 329.
31. GONZALEZ P, MARGARITA (). "Opción crítica de la didáctica" en Revistas Perfiles Educativos (México, UNAM). 1992. Págs. 35 – 72.
32. GRAHAM Alan. Probabilidad, intuición y una hoja electrónica. Centre for Mathematics Educación. University England. 2000.
33. GRAS, R. « L'analyse des données: une méthodologie de traitement de questions de Didactique ». Recherches en didactique des mathématiques, 1992. Págs., 59-72.
34. GREEN, D. R. "School pupils' probability concept. *Teaching Statistics*, No 5 febrero(2), 1983. Págs. 34 - 42
35. GREEN, D. R. "Children's understanding of randomness". En E. Davidson y J. Swift (Eds), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. University of Victoria. 1988. Págs. 287 - 291.

36. GRONER, R., GRONER, M. y BISCHOF, W. M. "The role of heuristics in models of decision". En R. M. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* Amsterdam: North Holland, (1983). Págs. 87 - 108.
37. HARTEN, VON G. Y STEINBRING, H. "Randomness and stochastic independence. On the relationship between intuitive notion and mathematical definition". En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* 1983. Amsterdam: North Holland. Págs. 363 - 374.
38. H. G. GADAMER (1984). "Verdad y método. Madrid". Editorial Sígueme. Pág. 49
39. HOEMAN, H.W. y ROSS, B.M. "Children's concept of chance and probability". En Brainerd, *Lógica y materiales de cognición para niños*. Springer Verlag Berlin 1982. Págs 93-121.
40. HUBERMAN, A. M. y MILES, F. M. (1994). "Data management and analysis methods". En D. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research*. 1994. London. Págs. 428 - 444.
41. INHELDER, B. Y PIAGET, J. *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Editorial Paidós. Barcelona 1955. Págs. 15 -84.
42. KAHNEMAN, D., Y A. TVERSKY. "Choice, values and frames". Cap. 11 de. 1986.
43. KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. (Eds.). "Judgment under uncertainty: heuristics and biases". Cambridge. 1982. Cambridge University Press.
44. KAPADIA, R. "Didactical phenomenology of probability". En R. Davidson y J. Swift Ediciones, *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, 1986. Págs. 260 - 264. University of Victoria.

45. KIRK, J. y MILLER, M. L. "Reliability and validity in qualitative research". London: 1986.
46. KONOLD, C. "Informal conceptions of probability. Cognition and Instruction", 1989. Págs. 59 - 98.
47. KONOLD, C. "¿Issues in assesing conceptual understading in probability and statistis?". Journal of Statistics Educations. Vol. 3 1995. Págs 1-3.
48. KONOLD, C. y GARFIELD, J. B.. "Statistical reasoning assessment". Part I: Intuitive thinking. University of Massachusetts: Scientific Reasoning Research Institute. 1993. Pág. 72.
49. KONOLD, C. POLLATSEK, A. WELL A., LOHMEIER, J. y LIPSON, A. "Inconsistencies in students´reasoning about probability. Journal for Research in Matthematics Education, Madrid. 1993. Págs. 392 - 414.
50. LEBART, L. Morineau. (1985). Tratamiento estadístico de datos. Barcelona, Marcombo. Pág. 85.
51. LECOUTRE, M. P. "Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations". Educational Studies in Mathematics No. 23. 1992. Págs. 557-568.
52. LECOUTRE, M. P. y CORDIER, J. Effet du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. Bulletin de l'APMEP, 1990. Págs. 372, 9 - 22.
53. LECOUTRE, M. P. y DURAND, J. L. Judgements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aleatoire. Educational Studies in Mathematics, 1988. Págs.19, 357- 368.

54. MILES, M. B. y HUBERMAN, A. M. "Qualitative data analysis. A sourcebook of new methods". London: Sage Publications. 1984.
55. MOORE, D. S. "The basic practice of Statistics". New York: 1995. Freeman. Pág. 45.
56. NISBETT, R. E. y ROSS, L. "Human inference: Strategies and shortcomings of social judgment". Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall 1980. Págs 65 -147.
57. PEREZ ECHEVERRIA, M. P. "Psicología del razonamiento probabilístico". Madrid, 1990. Pág. 144.
58. PERKINS, DAVID (1995), citado por Litwin, en: Configuraciones Didácticas. Pág. 100.
59. PIAGET, J. E INHELDER, B. La enése de L'idée de Hasard Chez L'enfant. Presses Universtarie de France. Paris 1990, Pág. 1.
60. PIAGET J. Artículo: Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En compilación de Maillo Adolfo y Aizpun Alberto. "La enseñanza de las matemáticas". Editorial Aguilar. Madrid. 1963. Pág. 8.
61. PIATTELLI PALMARINI MÁXIMO. "Los túneles de la mente ¿Qué se esconde tras nuestros errores". Editorial Grijalbo. Mondadori. Barcelona. 1995. Pág. 29.
62. POLANYI 1973 Citado por GARRET,R.M. "Resolución de problemas, creatividad y originalidad" Revista chilena de educación Vol. 14 No 1-12 1999. Pág. 21.

63. ROSS, B. M. "Randomization of binary sequences". American Journal of Psychology, 1955. Págs. 68, 136 - 138.
64. SCARDAMALIA, M. Información processing capacity and the problem of horizontal décalage: A demonstration using combinatorial reasoning tasks. Child Development. 1977 Págs. 28 – 37.
65. SERRANO L., BATANERO C. ORTIZ. J. Y CAÑIZARES J., "Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria". En Educación Matemática. Madrid. 1996. Págs. 7-25.
66. SHERMAN, S. E. Y CORTY, E. "Cognitive heuristic. En R. Wyer Jr. y T. S. Krull (Eds.), Handbook of Social Cognition 1984. New Jersey: LEA. Págs. 135 – 198.
- SHAUGHNESSY, J. M. "Research in probability and statistics: reflections and directions". En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, 1992. London: MacMillan. Págs. 465 - 494.
66. SHULMAN, L. S. "Paradigmas y Programas de investigación en la enseñanza. Una perspectiva contemporánea". En M. C. Wittrock (Ed), La investigación de la enseñanza. Editorial Pidos. Barcelona. 1989. v. 1, Págs. 9 – 92...
67. SIMON, H. A. A behavioral model of rational choice. Quarterly Journal of Economics, 1955. Págs. 69, 99 - 118.
68. SIMON, H. A. , "Rational choice and the structure of the environment", Psychological Review, No 63, 1956. Págs. 129 – 138.
69. STEINBRING, H. (1986). L'indépendance stochastique. Recherches en Didactique des Mathématiques, No 7 (3). Págs. 5 - 50.
70. TVERSKY. A. Y D KAHNEMAN. "Availability: A heuristic for judging frequency and probability". Cognitive Psychology. No 4, 1973, Págs. 207-232.

71. VEGA, M. "Introducción a la psicología cognitiva". Madrid. Alianza.1984.

Psicología.

72. SAVAGE, L. J. "The sure-thing principales", en the fundations of statistics", John Wiley & Sons, Neuva York, 1954. Págs 21 – 26.

73. WEBER, R. "Basic Content Analysis". London. 1986.

74. VALLECILLOS JIMÉNEZ, A. "Estudio teórico - experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios". Tesis doctoral Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 1994.

## ANEXOS

### ANEXO No. 1 CUESTIONARIO

En este anexo se realiza una descripción del cuestionario que fue utilizado para la recopilación de la información, en los centros educativos del Distrito Capital.

Dicho cuestionario es analizado, resuelto y discutido previamente con los estudiantes de los grupos 01, 02, 03 y 04 de la asignatura Probabilidad y Estadística para ingeniería de la Universidad de La Salle, sede centro, en el primer semestre del año 2003. Se pone especial énfasis; tanto en el lenguaje utilizado, sus posibles interpretaciones por parte de los escolares como en el nivel de abstracción requerido para su correcta solución.

Las preguntas, después de esta etapa son las que a continuación se relacionan:

#### Pregunta # 1

¿Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- C C C X X

b.- X C C X C

c.- X C X X X

d.- C X C X C

e.- Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

#### Pregunta # 2

Abajo listamos las mismas sucesiones de caras y cruces. ¿Cuál de las sucesiones es menos probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- C C C X X

b.- X C C X C

c.- X C X X X

d.- C X C X C

e.- Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

En estas preguntas, empleadas también por Kahneman y Tversky (1982) y Konold et al. (1993), se usa de nuevo el contexto de monedas. En lugar de preguntar si se considera o no aleatoria la secuencia, se pide al alumno una estimación de la probabilidad de la misma. Ello requiere que el alumno compare mentalmente las secuencias dadas entre sí y con otras posibles secuencias producidas en la serie de ensayos dada. Es decir, se requeriría la identificación de los elementos de un espacio muestral producto de considerar todas las secuencias posibles. Aunque no es preciso enumerar todo estos elementos, debe comprenderse el tipo de configuración combinatoria que se produce como resultado del experimento producto. Se trata de comprobar si la estimación de la probabilidad de una secuencia corta de caras y cruces se hace en base a su representatividad.

Estas preguntas han sido obtenidas como síntesis de las preguntas 3, 4 y 5 del test de Konold y Garfield. Konold (1993) y además, traducidas y empleadas por, Batanero y Cañizares en el año 1995 en un estudio comparativo de 235 escolares en España. Estas preguntas son utilizadas para estudiar si los alumnos razonaban en base al "enfoque en el resultado aislado", las secuencias son mucho más cortas, para que el alumno ponga en  juego  su razonamiento combinatorio.

### Pregunta # 3

En el hospital de cierta ciudad se registra el número de niños y niñas recién nacidos. ¿Cuál de los siguientes casos te parece más probable? (ver anexo 1)

- a.- Que entre los próximos 10 nacimientos 8 o más sean varones.
- b.- Que entre los próximos 100 nacimientos 80 o más sean varones.
- c.- Las dos cosas anteriores son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

### Pregunta # 4

¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos?:

- a.- La fracción de chicos será mayor o igual a  $7/10$ .
- b.- La fracción de chicos será menor o igual a  $3/10$ .
- c.- La fracción de chicos estará comprendida entre  $4/10$  y  $6/10$ .
- d.- Las tres cosas son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué



Estas son una versión modificada de la pregunta 4 empleada en la fase de entrevistas por Serrano y Batanero en 1995 y consta de dos partes. Aunque el espacio muestral asociado al experimento simple tiene sólo dos resultados posibles, el concepto de probabilidad que se aplicaría mejor a esta pregunta sería el frecuencial. Además, no se proporciona la secuencia de resultados, sino sólo la frecuencia de ocurrencia de uno de los resultados.

En la primera parte de esta pregunta, se trata de ver si los alumnos aprecian el efecto del tamaño muestral sobre la fluctuación del proceso de muestreo. En la segunda parte, se trata de ver si los alumnos perciben la mayor probabilidad de los valores centrales de la distribución. Es decir, mientras que la parte 1 evalúa la percepción de la variabilidad de las secuencias aleatorias y del efecto del número de experimentos sobre esta fluctuación, la parte 2 evalúa la percepción de la tendencia del proceso.

#### Pregunta # 5

Cuando lanzamos dos dados simultáneamente:

- a.- Hay las mismas posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
- b.- Hay más posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
- c.- Hay menos posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
- d.- Es imposible saberlo.

Elige la opción que crees más adecuada y razona tu respuesta.

#### Pregunta # 6

Cuando lanzamos tres dados simultáneamente, ¿cuál de estos resultados es más fácil que ocurra?:

- a.- Obtener un 5, un 3 y un 6.
- b.- Obtener dos veces el 5 y una vez el 3.
- c.- Obtener tres veces el número 5.
- c.- Todos estos resultados son igualmente probables.

Escribe la opción que has elegido

#### Pregunta # 7

¿Es alguno de estos resultados menos probable que los otros dos?

Esta es una pregunta tomado de Lecoutre y Durand (1988) y Lecoutre y Cordier (1990), quienes lo han empleado extensamente en sus investigaciones.

Sin embargo, también puede servir para evaluar la representatividad en contexto de datos y evaluación del razonamiento combinatorio. Se pide considerar un experimento doble y triple.

#### Pregunta # 8

Una ruleta se divide en 5 áreas de igual tamaño. Se da un fuerte impulso a la flecha de la ruleta. ¿Cuál de los siguientes resultados es más verosímil que resulte al girar la ruleta tres veces?:

- a.- 215, en este orden exacto
- b.- Obtener los números 2, 1, 5, en cualquier orden.
- c.- Obtener los números 1, 1, 5 en cualquier orden.
- d.- Las opciones a y b son igualmente verosímiles.
- e.- Las opciones a, b, y c son igualmente verosímiles.

En esta pregunta, tomada de Konold y Garfield (1993), se trata de comprobar si los alumnos estiman la probabilidad de una secuencia de resultados con base a su representatividad o, si por el contrario, hacen uso del razonamiento de tipo combinatorio. El espacio muestral del experimento simple tiene 5 resultados posibles, en un contexto de ruletas. El distractor a) se incluye para ver si los alumnos hacen uso de la idea de orden.

**ANEXO NUMERO 2**  
**CUESTIONARIO FINAL**

UNIVERSIDAD DE LA SALLE  
Bogotá Colombia.  
División de Formación Avanzada.  
Maestría en Docencia  
Proyecto “Desarrollo de Pensamiento Probabilístico”

Cuestionario para alumnos

Genero: Masculino \_\_\_\_\_ Femenino \_\_\_\_\_ Edad: \_\_\_\_\_  
Colegio: \_\_\_\_\_  
Jornada: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_  
Fecha: \_\_\_\_\_  
Cuantos años: \_\_\_\_\_

Introducción: El presente cuestionario tienen como único propósito recopilar información con fines de investigación, por tanto a pesar de ser anónimo les rogamos diligenciarlos con toda la seriedad posible. En cada caso, marca solo una de las alternativas dadas con una X y cuando se pida justifica tu respuesta.

1. ¿Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?
- CCCXX;
  - XCCXC;
  - XCXXX;
  - CXCXC;
  - Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué razón has dado esa respuesta?

---



---



---



---

2. Cuál de las siguientes sucesiones es menos probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?
- CCCXX;
  - XCCXC;
  - XCXXX;
  - CXCXC;
  - Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué razón has dado esa respuesta?

---



---



---



---

3. En la sala de maternidad de la ciudad **X** están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa según el sexo del recién nacido. Por este motivo han ideado el sistema de registro que se muestra a continuación. En dicho hospital se registra el número de niños y niñas recién nacidos. ¿Cuál de los siguientes casos te parece más probable?
- Que en los próximos 10 nacimientos 8 o más recién nacidos sean varones;
  - Que en los próximos 100 nacimientos 80 o más recién nacidos sean varones;
  - Las dos cosas anteriores a) y b) son igual de probables.

¿Por qué razón has dado esa respuesta?

---



---



---



---

4. Si observamos los siguientes 10 nacimientos, ¿Qué te parece más probable que ocurra?
- La fracción de varones será mayor o igual a  $7/10$ ;
  - La fracción de varones será menor o igual a  $3/10$ ;
  - La fracción de varones estará comprendida entre  $4/10$  y  $6/10$ ;
  - Las tres opciones anteriores a), b) y c) son igual de probables.

¿Por qué razón has dado esa respuesta?

---



---



---



---

5. Cuando lanzamos dos dados simultáneamente:

- a. Hay las misma posibilidad de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces un número 5;
- b. Hay más posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el número 5;
- c. Hay menos posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el número 5;
- d. Es imposible saberlo.

Razona tu respuesta

---



---



---



---

6. Cuando lanzamos simultáneamente tres dados, ¿cuál de estos resultados es más fácil que ocurra?

- a. Obtener un 5, un 3 y un 6;
- b. Obtener dos veces un 5 y una vez el 3;
- c. Obtener tres veces el número 5;
- d. Todos estos resultados son igualmente probables;
- e. Es imposible saberlo;

7. ¿Es alguna de las afirmaciones del numeral (6) te parece menos probable que las otras y porque razón?

---



---



---

8. Una ruleta está dividida en cinco áreas iguales, numeradas del 1 al 5. ¿Cuál de los siguientes resultados es más probable que ocurra al girar la ruleta tres veces?:

- a. 2, 1, 5, en e este orden exactamente;
- b. 2, 1, 5, en cualquier orden;
- c. 1, 1, 5, en cualquier orden;
- d. Las opciones a) y b) son igual de probables;
- e. Las opciones a), b) y c) son igual de probables.

GRACIAS.

### ANEXO No. 3 ARGUMENTOS.

Para completar el análisis de la encuesta y profundizar en los tipos de razonamiento de los alumnos, se deben tener en cuenta los argumentos dados en los numerales 1 al 5. Puesto que las preguntas 6 al 8 evalúan el mismo conocimiento que la pregunta 5.

Para el análisis de estos argumentos, debemos entender que estamos ante datos de naturaleza textual, es decir, datos expresados en forma de cadenas verbales de cierta extensión que terminan siendo registrados como textos escritos que requieren del análisis cualitativo.

Para nuestra investigación, que tiene un alto componente interpretativo, el análisis de los argumentos expresados por los estudiantes en cada una de las cinco primeras preguntas, nos permite caracterizar y tener una visión más amplia del cómo el uso de las heurísticas por parte de los estudiantes tiene consigo asociado una serie de sesgos que los inducen a cometer errores al lanzar un juicio probabilístico.

En este proceso, la cuantificación y el análisis estadístico se han mostrado como válidas herramientas analíticas en el trabajo con datos cualitativos, y pueden ser utilizados conjuntamente con otras herramientas no cuantitativas.

Probablemente, el modo más habitual y conocido de analizar cuantitativamente los datos cualitativos textuales consista en la aplicación de técnicas estadísticas a los valores numéricos resultantes del recuento de códigos. Es decir, el análisis estadístico es utilizado como un procedimiento complementario a un proceso previo de análisis en el que al menos se han desarrollado tareas de reducción de datos basadas en las operaciones de categorización y codificación.

Así, por ejemplo, el número de veces que una idea, un concepto o una palabra aparece en el conjunto de datos o en los datos textuales correspondientes a cada individuo, caso, contexto, etc. estudiado es el punto de partida para la aplicación de técnicas cuantitativas.

La finalidad básica de esta estrategia es la de lograr la reducción de los datos textuales y obtención de la frecuencia de una palabra o concepto, para posteriormente aplicar algún tratamiento estadístico. Como ocurre en la tradición cuantitativa del análisis de contenido, las categorías suelen ser

deductivas y son consideradas como variables antes que como instrumentos para organizar conceptualmente y presentar la información. Queda la impresión que interesa más la frecuencia de los códigos que el propio contenido de las categorías, por que su centro de interés básico es el recuento de las apariciones de dichos códigos.

Un enfoque alternativo es el tratamiento lexicométrico o de la estadística textual, desarrollados por la escuela francesa del análisis de datos. La idea básica es contar las ocurrencias de las unidades verbales básicas (generalmente palabras) y operar algún tipo de análisis estadístico a partir de los resultados de tales recuentos. Supone, por tanto, recurrir a la cuantificación de los textos desde el primer momento, sin que medien operaciones de codificación previas.

Lebart y Salem definen lexicometría como un conjunto de métodos que permiten realizar reorganizaciones formales de la secuencia textual y análisis estadísticos con el vocabulario resultante de una segmentación<sup>133</sup>. De esta definición se infiere que un primer tipo de métodos serian aquellos que permiten operar reorganizaciones formales de la secuencia textual, es decir, aquellos métodos que suponen desestimar la secuencia lineal de las unidades diferenciadas dentro de un texto y disponerlas en algún otro que resulte interesante de cara a alcanzar resultados y extraer conclusiones. Estos métodos, que pueden implicar la realización de cierto tipo de recuentos para el cálculo posterior de algún índice estadístico o la aplicación de técnicas cuantitativas de análisis, dan lugar a la construcción de los denominados documentos lexicométricos. Para su obtención, es necesario partir de una segmentación del texto en unidades.

## **1. Las unidades de estadística textual**

La primera operación realizada sobre los textos objeto de análisis consiste en la segmentación del corpus textual. La segmentación implica diferenciar las unidades elementales y precede, necesariamente, tanto a la construcción de documentos lexicométricos como a los recuentos que servirán de base para los análisis estadísticos posteriores. Es posible diferenciar diversas metodologías para realizar este tipo de procedimientos, las cuales son; formas graficas, formas reducidas, segmentos repetidos, etc.

---

<sup>133</sup> LEBART, L. Morineau. (1985). Tratamiento estadístico de datos. Barcelona, Marcombo. Pg. 85.



## 1. 1 Forma grafica

La forma es una unidad física fácilmente reconocible por el ordenador o por el individuo cuando el recuento se realiza en forma manual que propicia por tanto una segmentación automática del texto. Por esta razón ha sido la primera incorporada a programas informáticos textuales y la más frecuentemente empleada.

De esta manera la forma grafica (secuencia de caracteres no delimitadores – en general, letras comprendidas entre dos caracteres delimitadores-) resulta fácilmente identificable y permite una segmentación de texto en unidades inequívocamente delimitadas, a diferencia de lo que ocurre cuando el analista procede a segmentar el texto utilizando como criterio de división por ejemplo, la unidad temática.

Un riesgo implícito en el uso de la forma grafica como unidad, radica en que no siempre se corresponde biunívocamente con la palabra, que es la unidad básica de significado. Las variaciones de género y número, las desinencias de los verbos y otros sufijos pueden afectar a una palabra dando lugar a que esta aparezca con varias formas.

## 1. 2 Lema

Para solucionar este inconveniente, algunos autores proceden a reunir bajo una misma forma denominada lema (generalmente, los verbos en infinitivo, los sustantivos en singular, etc.), a todos los vocablos que cuentan con una misma raíz y con un significado equivalente. Son de esta línea, autores como Bolasco, que propone la forma textual, identificada con una raíz léxica que corresponde a una sola forma grafica o a sus diferentes flexiones siempre que sean portadoras de un significado indudablemente equivalente para las finalidades del estudio, o identificada con diferentes raíces léxicas que corresponden a diferentes formas graficas con igual significado<sup>134</sup>. De este modo, podrían ser al mismo tiempo eliminadas ciertas ambigüedades que presentan las formas graficas homónimas derivadas de lemas diferentes.

Cuando la tarea es realizada por un ordenador no resulta fácil discernir mediante procedimientos automatizados, cuando una palabra se emplea con uno u otro significado sobre todo cuando en forma intencionada se ignoran la existencia de fenómenos como la polisemia o la homonimia que dan cabida a

---

<sup>134</sup> ETXEBERRÍA, J. GARCIA, E. Análisis de datos y textos. Editorial Ra-Ma, Madrid 1995, pag 137-162.

las variaciones gramaticales, las cuales pueden quedar enmascaradas en las variaciones léxicas.

En conclusión, la eliminación automática de ambigüedades presenta un problema para los lematizadores, puesto que dicho proceso requiere la interpretación sintagmática y gramatical de la forma con el necesario retorno al texto, premodificación o examen de los contextos en que aparecen.

### **1.3 Segmentos repetidos**

Considerando que las palabras aisladas resultan descontextualizadas y su análisis puede conducir a interpretaciones equivocadas, se han utilizado como unidades los segmentos repetidos definidos como una secuencia de dos o más palabras no separadas por un delimitador de secuencia que aparecen más de una vez en un corpus de datos textuales. El segmento repetido permite considerar el entorno sintagmático en que las palabras son empleadas, y pone de manifiesto secuencias que se repiten y que en una lectura inicial del texto posiblemente no hubieran sido detectadas.

Los segmentos repetidos han sido utilizados para llevar a cabo análisis estadísticos a partir de su frecuencia, o para aclarar los resultados de análisis sobre formas simples. Constatando la reiterada presencia de segmentos repetidos en un cuerpo textual, resulta más fácil la vuelta a los textos para recomponer secuencias discursivas clave y reducir la ambigüedad que podría provocar el alto nivel de polisemia asociado a las formas aisladas.

### **1.4 Cuasisegmentación.**

Los cuasisegmentos, son considerados unidades formadas por palabras que aparecen en una determinada secuencia existiendo entre ellas una distancia máxima de separación fijada, medida en número de palabras. De esta forma podría evitarse la alteración que la inclusión de ciertas palabras provoca en los segmentos repetidos.

## **2 Glosarios.**

Una vez que se ha terminado el proceso de segmentación del corpus del texto, se puede proceder a construir diversos documentos lexicométricos, los cuales no precisan la realización de operaciones diferente al mero conteo de frecuencias, y esto consiste únicamente en una organización de las unidades contenidas en el texto, siguiendo determinado criterio.

Probablemente el más simple de todos sea el glosario de unidades utilizadas, denominado vocabulario del texto. El vocabulario del texto puede ser presentado en orden lexicométrico, es decir, según frecuencias decrecientes y recurriendo al orden alfabético en los casos de igual frecuencia.

En el proceso de análisis de texto por los métodos lexicométricos existen dos líneas: la que toma el texto tal y como ha sido producido, sin introducir en el ningún tipo de modificaciones que pudieran estar marcadas por la subjetividad del investigador y los que intervienen sobre las formas gráficas antes de someterlas a los diferentes análisis. A veces esta intervención se concreta en operaciones lematizadoras o suprimiendo los términos con menor contenido significativo.

El objetivo básico del glosario de formas es, que a partir de un ordenamiento lexicométrico nos permita acceder a los términos de mayor presencia en el corpus, para tener una primera información sobre la importancia cuantitativa de los significados representados por ellos.

El glosario de formas por orden alfabéticos (también denominado orden lexicográfico) nos permite determinar fácilmente si una forma está presente o no dentro del vocabulario de un texto. Además, a partir de este ordenamiento detectar las palabras que poseen una misma raíz léxica y difieren solo en su terminación, y tomarlo como punto de partida para realizar un análisis sobre el léxico básico en el caso de un proceso de lematización del vocabulario.

### **3. Concordancia.**

La concordancia de una forma constituye otro de los documentos lexicométricos que cuentan con una mayor tradición de uso. Sus primeras utilidades conocidas se remontan al siglo XIII, momento a partir del cual se editan diferentes estudios de concordancia sobre La Biblia, comparando distintos pasajes del texto sagrado para precisar el sentido en que eran empleadas disertes palabras. El uso del ordenador en las últimas décadas del siglo XX, no solo simplificó la tarea, sino que propició una evolución en el modo de concebir este tipo de estudios.

El sentido que actualmente se confiere al término, elaboración de concordancias consiste en presentar todos los contextos en que aparece una determinada forma, que recibe el nombre de forma-polo. Este tipo de documentos resulta útil cuando queremos explorar o precisar el sentido en que es empleada, dentro de los textos analizados, una determinada forma

que podría presentar distintos significados o cuando el interés del analista se dirige al estudio de determinados elementos temáticos dentro del texto, que pueden ser identificados por el uso de varias palabras. La obtención de las concordancias para esas palabras permitiría conocerle contenido expresado en relación a tales temas. Las concordancias podrían ser también elaboradas para una secuencia de palabras, para un lexema, un sufijo, etc.

En la elaboración de concordancias es preciso partir de la selección de una varias formas-polos la selección de las formas que van a ser estudiadas puede realizarse a partir de un interés temático por parte del analistas o puede basarse en interés frecuenciales y de distribución.

Determinadas las formas-polo, es preciso definir que entendemos por contexto de una forma. La solución habitual en los procedimientos informáticos en presentar las dos cadenas de caracteres de un tamaño fijado que preceden y suceden a la forma-polo utilizando como delimitadores de frase, signos de puntuación tales como el punto o el punto y coma.

#### **4. Inventario de segmentos repetidos.**

Consisten en listados de todos los segmentos repetidos que aparecen más de una vez en un corpus, con indicación de su frecuencia o el número de formas simples de que constan. Según el criterio de ordenación, los inventarios pueden ser alfabéticos, jerárquicos (ordenados por tamaño en número de formas), ordenados por frecuencias, cronológicos (por orden de aparición en el tiempo) u ordenados en función de determinadas formas-polo.

En esta forma de proceder, la representación alfabética puede ser interesante cuando queremos localizar los segmentos repetidos que comienzan por una determinada forma-polo.

El examen de los segmentos repetidos que incluye esta forma refleja el sentido con que es empleada en los textos: contar no se emplea aquí con el sentido de una operación de recuento o acción de comunicar algo, sino en su acepción “tener en cuenta”, y en particular, los usos que más se repiten, aluden a tener en cuenta la opinión de las personas entrevistadas. Por esto puede resultar más clarificador la revisión de los segmentos que tienen una mayor extensión, y por tanto una mayor información.

Es así como para el análisis de los argumentos dados por los estudiantes en la encuesta practicada procedió

## ANÁLISIS DE ARGUMENTOS

**Preguntass 1 y 2:** Los argumentos de los alumnos en estos ítems se han clasificado de la forma siguiente

- a) *Debe haber aproximadamente igual número de caras y cruces o hay la misma probabilidad de caras y cruces.* En este apartado hemos incluido los alumnos que manifiestan explícitamente su expectativa en la conservación de la frecuencia relativa de caras y cruces, en relación a la probabilidad teórica, incluso en una secuencia corta, como en los siguientes ejemplos: *"Si la moneda está equilibrada, existe la misma probabilidad de que salga cara o cruz", "Al lanzar una moneda tienes un 50 % de cara y un 50 % de cruz y por lo tanto tienen todas las mismas posibilidades".*
- b) *Debe haber frecuentes alternancias entre caras y cruces.* Estos alumnos se apoyan en una propiedad diferente al considerar, no la tendencia global señalada por la frecuencia, sino la variabilidad, indicada por la alternancia de resultados. Por ejemplo: *"Es más probable una alternancia entre caras y cruces que el que salgan dos cruces o caras seguidas o tres", "Como la probabilidad de que salga cara o cruz es del 50 %, en teoría debería salir una vez sí y otra no cara".*
- c) *Es cuestión de suerte, puede ocurrir cualquiera de las secuencias.* Los estudiantes justifican la equiprobabilidad de los resultados, no por un razonamiento combinatorio, sino por su creencia en la impredecibilidad de lo aleatorio, o su creencia en la "suerte": *"Según la suerte que tengamos y según la moneda como la tires", "Sólo lanzando la moneda se puede saber la sucesión que sale y que será casi seguramente distinta de la siguiente, todo depende de la suerte", "En cinco tiradas pueden salir cinco cruces o cinco caras y también cualquier otra variante".*
- d) *Hay un patrón regular.* Se alude explícitamente al hecho de que una secuencia aleatoria no debe tener un patrón reconocible: *"Es demasiada casualidad que se lleve un orden en la lista de los resultados", "Es muy difícil que se alternen con tanta regularidad".*
- e) *Por experiencia propia.* Los alumnos argumentan su experiencia sobre sucesiones obtenidas en juegos de azar, aunque no saben dar una razón para su elección: *"Lo sé, porque he jugado mucho a esto", "Varias veces he hecho esta prueba y casi siempre me ha salido ese resultado".*
- f) *Más probable dos caras consecutivas o bien dos cruces consecutivas.* En este caso, la razón es contrapuesta a la b), ya que esperan la existencia de algunas rachas y no la constante alternancia de resultados. *"No creo que se alternen las caras y las cruces cada vez que se lancen".*
- g) *Es más probable que salgan caras (cruces).* Algunos alumnos conceden una mayor probabilidad a uno de los sucesos, debido a que las monedas,

en general, no son perfectamente simétricas: *"Creo que al tirar una moneda sale siempre más veces la cara que la cruz", "Es raro que no salgan más las caras que las cruces", "Siempre salen más las cruces".*

- h) *Es más aleatoria, sin regularidad fija.* Se utiliza el argumento contrario al d): *"Lo veo más probable, porque no sigue el mismo orden".*
- i) Por último, un número apreciable de alumnos indica que no sabe justificar su respuesta, o simplemente la deja en blanco.

**Preguntas 3 y 4:** Se han considerado los siguientes argumentos:

- a) *La muestra pequeña es más variable.* Son los alumnos que piensan que, debido al carácter aleatorio del experimento, la variabilidad de la frecuencia relativa disminuye con el número de ensayos, apreciando el fenómeno de la convergencia: *"Porque puede haber una racha de nacimientos de varones en un número pequeño, pero es demasiada casualidad que en cien casos se den ochenta", "Al aumentar la población se estabiliza la proporción".*
- b) *Por igual proporción.* Se argumenta que las dos muestras tienen igual proporción y por ello sus probabilidades son iguales: *"Porque es el mismo porcentaje", "Es lo mismo 8 de 10 que 80 de 100".*
- c) *Hay mayor proporción en muestras más grandes.* Se aplica ahora la representatividad, no en función del parecido entre el valor del estadístico muestral y el parámetro proporcional, sino al parecido entre dos características de la muestra -la proporción y su tamaño: *"La muestra sobre cien sujetos, ofrece un margen mayor y es más difícil acertar en el pronóstico", "Teniendo mayores posibilidades de que ocurra el fenómeno en grandes muestras".*
- d) *Igual probabilidad.* Similar al argumento b) pero usando el término probabilidad: *"En los dos casos la probabilidad es del 80 %", "A efecto de probabilidad es el mismo resultado".*
- e) *Deben nacer más niñas.* No se admiten los datos del problema, alegando que la proporción de niñas debiera ser mayor. Es una manifestación de la heurística de la representatividad con un nuevo matiz, los datos del enunciado son incorrectos, puesto que esa proporción no puede ocurrir, ni siquiera en una muestra pequeña: *"Lo normal es que nazcan más niñas que niños".*
- f) *No se saben cuantos serán varones o hembras.* Los sucesos aleatorios son impredecibles, incluso en términos probabilísticos. No puede responderse a la pregunta, puesto que no podemos siquiera predecir la probabilidad de los distintos resultados. *"No hay ninguna regla para predecir si serán varones o hembras", "Depende del azar y no se sabe lo que sucederá".*

g) *Nacen más niños que niñas.* Similar al e) pero dando mayor probabilidad al nacimiento de varones: *"Suelen nacer mayormente más niños", "En estos tiempos suelen nacer más varones".*

*No contesta.* Por último, se incluyen los alumnos que no contestan o indican que no entienden la pregunta o que no saben explicar su respuesta

**Pregunta 5:** Hemos analizado también los argumentos en este ítem, clasificándolos en los siguientes tipos:

- a) *Es impredecible o depende de la suerte.* Análogo al comentado en casos anteriores: *"No lo sabemos, los juegos son al azar"; "Depende de la fuerza, la posición, etc..., en que tires los dados y es imposible saber todo con exactitud"; "Por mucho que haga pruebas y lance los dados, jamás podré asegurar lo que saldrá".*
- b) *Es equiprobable.* Puesto que los resultados elementales son equiprobables, también se consideran equiprobables los resultados de los experimentos compuestos. *"Porque la posibilidad de que en un dado salga un cinco y en el otro un seis es la misma que si en un dado sale un cinco y en el otro cinco"; "Hay las mismas posibilidades de obtener dos veces el mismo número que de obtener dos números distintos".*
- c) *Razonamiento de tipo combinatorio.* Estos tipos de argumentos son poco utilizados por los alumnos y las respuestas más usuales que emplean están relacionadas con el concepto laplaciano de probabilidad, más que con el razonamiento combinatorio y siendo todos los que emplean este tipo de argumento los alumnos mayores: *Elige la opción b) porque la probabilidad de que salga un 5 y un 6 es de un 33 % y la de que salgan dos 5 es de 8,5 %"; " Porque dos veces un 5 requiere 1/36 de posibilidades, mientras que un 5 y un 6 tiene 1/18".*
- d) *Es más difícil que se repita el número:* *"Al ser dados distintos, hay más posibilidades de que salga un 5 y un 6 que dos veces el 5, ya que si en un dado solo hay un 5, en los demás se puede sacar cualquier número mientras que es muy raro que salga un 5 en cada uno de los dados".*
- e) *Por experiencia.* Aunque a veces completan sus justificaciones de otros argumentos diciendo que les suele pasar así a ellos, este argumento tiene entidad propia como para justificar las opciones dadas y sus respuestas tipo suelen ser: *" Porque cuando juego al parques u otro juego parecido, me suele pasar eso, aunque no siempre".*
- f) *No contesta.*